Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Harjoitukset, Viikko 6, 2018

H

Tehtävätyypeistä: Johdantotehtävät ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät tarkastetaan vertaisarviointina seuraavalla harjoituskierroksella ellei toisin mainita.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Osoita, että yhtälöryhmällä $Ax = b$ ei ole ratkaisua. Tietyssä mielessä (pienimmän neliösumman mielessä) mahdollisimman hyvä ratkaisu (joka ei kuitenkaan — tietenkään — toteuta yhtälöryhmää) saadaan ratkaisemalla matriisiyhtälö $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$. Muodosta tämä yhtälöryhmä ja ratkaise se. Piirrä ryhmän yhtälöiden kuvaajat sekä saatu pienimmän neliösumman periaatteen mukainen ratkaisu tasoon $\mathbb{R}^2$.

TEHTÄVÄ J2 Muodosta Newtonin menetelmän mukainen matriisimuotoinen iteraatiokaava yhtälöparille

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2xy^5, \\ x^6 + x^2 + y^4 = 4. \end{cases}$$

Etsi tämän avulla yksi yhtälöparin kaikkiaan neljästä (reaalisesta) ratkaisusta.

TEHTÄVÄ V1 Sovita paraabeli $y = p + q\,x^2$ mittausdataan $(x_i, y_i) = (1, 0.11), (2, 1.62), (3, 4.07), (4, 7.55), (6, 17.63), (7, 24.20)$. Arvioi mahdollista mittaustulosta, kun $x = 5$.

TEHTÄVÄ V2 Tutki, missä pisteissä Cartesiuksen lehden $x^3 + y^3 = 3xy$ tangentin suuntakulma johonkin koordinaattiakseliin nähden on

$45°$. Muodosta tarvittava yhtälöryhmä ja ratkaise se kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla.
Ratkaisu: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, $x^2 - y \pm (y^2 - x) = 0$;
$(1.50, 1.50)$, $(1.21, 0.53)$, $(0.53, 1.21)$.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a)} \int_A x^2\, da, \quad A = \{\, (x, y) \mid |x| + |y| \leq 1 \,\};$$
$$\text{b)} \int_A \frac{x}{y}\, da, \quad A = \{\, (x, y) \mid |x| \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2 \,\}.$$

Ratkaisu: a) $\frac{1}{3}$; b) 0.

TEHTÄVÄ J2 Olkoon $a > 0$, $b > 0$, $A = \{\, (x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \,\}$. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_A e^{-(ax+by)^2}\, da$$

sijoituksella $u = ax + by,\ v = y/x$.
Ratkaisu: $\frac{1}{2ab}$.

TEHTÄVÄ V1 Olkoon $V = \{\, (x, y, z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1 \,\}$. Laske a) $\int_V (1 - x - y)^5\, dv$, b) $\int_V xyz^4\, dv$.
Ratkaisu: a) $1/56$; b) $1/15120$.

TEHTÄVÄ V2 Laske integraali

$$\iint_A (x + 2y)^4 (x - 2y)^6\, dxdy,$$

kun integroimisjoukkona on tasoalue $A = \{\, (x, y) \mid |x+2y| \leq 1,\ |x-2y| \leq 2 \,\}$.
Ratkaisu: $128/35$.

Haaste

Tässä tehtävässä tarvitaan kaavaa

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b f_t(x, t)\, dx;$$

kts. MS-A0101:n materiaali soveltuvin osin.
Laske integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

käyttämällä integraalin derivointia parametrin suhteen seuraavalla tavalla: Osoita, että funktion

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

derivaatta on $-1/(1+t^2)$, joten $F(t)$ voidaan laskea integroimalla, kun lisäksi tiedetään $F(t) \to 0$, kun $t \to \infty$. Tämän avulla saadaan $F(0)$.
Huom: Välivaiheet vaatisivat tarkempia perusteluja, koska kyseessä on epäoleellinen integraali. Vastaus on kuitenkin oikein, joten voit laskea ilman perusteluja (hieman kyseenalainen päättely?). Kurssilla MS-A0101 johdettiin (olennaisilta osin) kaava

$$\int_0^\infty e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad \text{kun} \quad a < 0.$$