



Tehtävätyypeistä: Johdantotehtävät ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät tarkastetaan vertaisarviointina seuraavalla harjoituskierroksella ellei toisin mainita.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat xy -tason yläpuolella pinnat

a) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = az$, $z = 0$ ($a > 0$);

b) $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Ratkaisu: a) $\frac{\pi}{2} a^3$; b) $\frac{1}{2}$.

TEHTÄVÄ J2 Laske sopivan muuttujanvaihdon avulla integraali

$$\iint_A (2x+3y)^2(x-5y)^2 dx dy, \quad \text{missä } A = \{(x, y) \mid |2x+3y| \leq 4, |x-5y| \leq 3\}.$$

Ratkaisu: 768/13.

TEHTÄVÄ V1 Laske muotoa $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (a ja b vakioita) olevaa muunnosta käyttäen tasointegraali

$$\int_A \ln \left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) da, \quad A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}.$$

Ratkaisu: $3\pi(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

TEHTÄVÄ V2 Laske käyrien $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, $x^4 = cy^3$, $x^4 = dy^3$ ($0 < a < b$, $0 < c < d$) ensimmäisessä neljänneksessä rajoittaman alueen pinta-ala. Valitse uusiksi muuttujiksi u ja v , jotka määräytyvät yhtälöistä $y^3 = ux^2$, $x^4 = vy^3$.

Ratkaisu: $x > 0$: $\frac{6}{35}(b^{7/6} - a^{7/6})(d^{5/6} - c^{5/6})$.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Ympyränsektorin keskuskulma on 2α . Laske sektorin keskiö.

Ratkaisu: Säde R ; symmetria-akselilla etäisyydellä $\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}R$ ympyrän keskipisteestä.

TEHTÄVÄ J2 Etsi suorakulmion $[0, a] \times [0, b]$ massakeskipiste, kun massan pintatiheys on $\rho(x, y) = y$.

Ratkaisu: $(\frac{a}{2}, \frac{2b}{3})$.

TEHTÄVÄ V1 Ympyräalueen neljännekselle $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R\}$ on levitetty massa, jonka pintatiheys on $\rho(x, y) = x$. Etsi massakeskipiste.

Ratkaisu: $(\frac{3\pi}{16}R, \frac{3}{8}R)$.

TEHTÄVÄ V2 Määritä sen tasokuvion keskiö, jota rajoittavat x-akseli ja sykloidin kaari

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ratkaisu: $(\pi a, \frac{5a}{6})$.

Haaste

Etsi R -säteisen ympyräkuvion hitausmomentti keskipisteen suhteen.