

Avoimet joukot

Taustaoletus: (X, d) on metrinen avaruus.

Määritelmä 5.3

Joukko $U \subset X$ on **avoin** (open), jos jokaista $x \in U$ vastaa sellainen $r = r_x > 0$, että $B(x, r) \subset U$. Avaruuden X **topologia** (topology) on sen kaikkien avoimien osajoukkojen kokoelma, merkitään yleensä $\mathcal{T}$.

Jos $x \in U =$ avoin, niin U on pisteen x (avoin) **ympäristö**.

Lause 5.4

- 1 Tyhjä joukko $\emptyset$, koko avaruus X ja kaikki avoimet kuulat $B(a, r)$ ovat avoimia.
- 2 Avoimien joukkojen yhdisteet ovat avoimia.
- 3 Avoimien joukkojen **äärelliset** leikkaukset ovat avoimia.

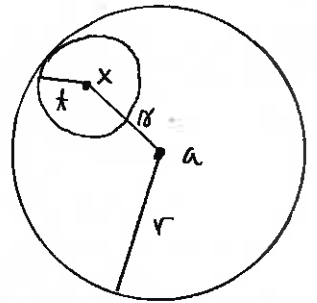
LAUSEEN TOD. (i) $B(a, r)$ AVOIN: OLKOON $x \in B(a, r)$, JOLLOIN $r = d(x, a) < r$

$\Rightarrow \delta = r - r > 0$. OSOITETAAN, ETTÄ $B(x, \delta) \subset B(a, r)$.

OLKOON $y \in B(x, \delta)$. SILLOIN $d(y, x) < \delta$, JOTEN

$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + r = r$, JOTEN

$y \in B(a, r)$. $\square$



(ii) OLKOON $A_j \subset X$ AVOIN $\forall j \in J =$ JOKIN INDEKSIOUJKKO

VÄITE: $\bigcup_{j \in J} A_j \subset X$ ON AVOIN.

TOD. OLKOON $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. SILLOIN $x \in A_{j_0}$ JOLLAKIN $j_0 \in J$.

A_{j_0} AVOIN $\Rightarrow \exists r > 0: B(x, r) \subset A_{j_0}$.

$\Rightarrow B(x, r) \subset \bigcup_{j \in J} A_j \Rightarrow$ VÄITE. $\square$

(iii) OLKOOT $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{X}$ AVOIMIA

VÄITE: $\bigcap_{j=1}^m A_j \subset \mathbb{X}$ ON AVOIN.

TGD: OLKOON $x \in \bigcap_{j=1}^m A_j$. TÄLLÖIN $x \in A_j \quad \forall j=1, \dots, m$.

$\Rightarrow \forall j=1, \dots, m \quad \exists r_j > 0$, JOLLE $B(x, r_j) \subset A_j$.

VALITAAN $r = \min \{r_1, \dots, r_m\} > 0$
ÄÄRELLINEN JOUKKO!

$\Rightarrow B(x, r) \subset B(x, r_j) \subset A_j \quad \forall j=1, \dots, m$

$\Rightarrow B(x, r) \subset \bigcap_{j=1}^m A_j. \quad \square$

Suljetut joukot I

Määritelmä 5.5

Joukko $F \subset X$ on **suljettu** (closed), jos sen komplementti $X \setminus F$ on avoin.

Lause 5.6

- Tyhjä joukko $\emptyset$, koko avaruus X ja kaikki suljetut kuulat $\overline{B}(a, r)$ ovat suljettuja.
- Suljettujen joukkojen leikkaukset ovat suljettuja.
- Suljettujen joukkojen **äärelliset** yhdisteet ovat suljettuja.

TOD. (i) $\overline{X} \setminus \overline{B}(a, r) = \bigcup_{x \in I} B(x, d(x, a) - r),$

KUN $I = \{x \in \overline{X} \mid d(x, a) > r\}.$

TÄSSÄ $d(x, a) - r > 0 \quad \forall x \in I$, JOTEN $\overline{X} \setminus \overline{B}(a, r)$ ON
AVOINTEN JOUKKOJEN YHDISTEENÄ AVAIN. $\square$

(ii) - (iii): LASKARIT!

Esimerkki 5.8

Jokaisessa joukossa X voidaan määritellä *diskreetti metriikka* asettamalla

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Tällöin kaikki avaruuden X osajoukot ovat sekä avoimia että suljettuja!

Diskreetti metriikka on hyvä esimerkki siitä, kuinka kaukana yleinen metriikka voi olla tavallisesta etäisyyden käsitteestä ja avoimien tai suljettujen joukkojen intuitiivisista ominaisuuksista.

PERUSTELU:

$$x \in X \Rightarrow \{x\} = B(x, 1/2) = \text{AVOIN}$$

$$\text{Jos } A \subset X, \text{ NIIN } A = \bigcup_{a \in A} \{a\} = \text{AVOINTEN YHDISTENÄ} \\ \text{AVOIN}$$

$\Rightarrow$ KAIKKI OSAJOUKOT AVOIMIA

$\Rightarrow$ KAIKKI OSAJOUKOT SULJETTUJA.

Reuna ja sulkeuma I

Määritelmä 5.9

Olkoon $A \subset X$. Avaruuden X pisteet voidaan jakaa kolmeen eri tyyppiin joukon A suhteen: Piste $x \in X$ on joukon A

- **sisäpiste** (interior point), jos $B(x, r) \subset A$ jollakin $r > 0$.
- **ulkopiste** (exterior point), jos $B(x, r) \subset X \setminus A$ jollakin $r > 0$.
- **reunapiste** (boundary point) muuten. Tällöin siis $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ja $B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$.

Reunapisteiden joukko ∂A on joukon A **reuna** (boundary). Joukon A **sulkeuma** (closure) on $\bar{A} = A \cup \partial A$.

- Sulkeuma voidaan määritellä myös muilla yhtäpitävillä tavoilla; ks. esimerkiksi lauseen 5.10 neljäs kohta.
- Sisä-/ulkopisteiden joukoille käytetään merkintöjä $\text{int } A / \text{ext } A$.

Huom: $\bar{X} = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \partial A$ AINA, JA JOUKOT ERILLISIÄ

$$\bar{X} \setminus \bar{A} = \text{ext}(A) \quad \text{AINA}$$

$$\text{SYY: } x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A \text{ TAI } x \in \partial A \Rightarrow x \notin \text{ext}(A)$$

$$\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{X} \setminus \text{ext}(A) \text{ ELI } \bar{X} \setminus \bar{A} \supset \text{ext}(A).$$

$$\underline{x \notin \text{ext}(A) \Rightarrow x \in \text{int}(A) \text{ TAI } x \in \partial A}$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ TAI } x \in \partial A \Rightarrow x \in \bar{A}$$

$$\text{SIIS: } \bar{X} \setminus \text{ext}(A) \subset \bar{A} \text{ ELI } \bar{X} \setminus \bar{A} \subset \text{ext}(A). \quad \square$$

ESIM. $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, TAVALLINEN ETÄISYYS

$$\Rightarrow \text{int}(A) = \text{ext}(A) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Reuna ja sulkeuma II

Lause 5.10

Olkoon X metrinen avaruus ja $A, B \subset X$. Tällöin pätee:

- (i) • Joukot $\text{int } A$ ja $\text{ext } A$ ovat avoimia.
- (ii) • Reuna ∂A on suljettu.
- (iii) • Joukko $\bar{A}$ on suljettu.
- (iv) • Joukko $\bar{A}$ on (inklusion suhteen) pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A .
- (v) • $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$
- (vi) • $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ja $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Todistukset: Luennolla/Väisälä 6.8.

TOD. (i) SELVÄ

$$(ii) \partial A = \underline{X} \setminus \underbrace{(\text{int}(A) \cup \text{ext}(A))}_{\text{AVOIN}} = \text{SULJETTU}$$

$$(iii) \bar{A} = \underline{X} \setminus \text{ext}(A) = \text{SULJETTU}$$

(iv) OSOITETAAN: JOS $B \subset \underline{X}$ ON SULJETTU JA $A \subset B$,
NIIN $\bar{A} \subset B$.

TOD. OLKOAAN $x \in \underline{X} \setminus B = \text{AVOIN}$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subset \underline{X} \setminus B \subset \underline{X} \setminus A$$

$$\Rightarrow x \in \text{ext}(A) = \underline{X} \setminus \bar{A}$$

TULOS: $\underline{X} \setminus B \subset \underline{X} \setminus \bar{A}$, JOTEN $\bar{A} \subset B$.

(v) SEURAA EDellisestä, koska $\bar{A}$ ON SULJETTU.

(vi) $\overline{A \cup B}$ ON SULJETTU JA $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \text{ KOHDAN (iv) NOJALLA.}$$

SAMOLIN $A \subset \overline{A \cup B} = \text{SULJETTU}$, JOTEN $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$

$$\text{VAST. } \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$$

$$\text{TULOS: } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$\cap$: SAMOLIN, MUTTA VAIN TOINEN SUUNTA!

Huom:

- Merkintä $\overline{B(x, r)}$ tarkoittaa avoimen kuulan $B(x, r)$ sulkeumaa, mutta se ei ole aina sama kuin suljettu kuula $\overline{B}(x, r)$. Aina pätee

$$\overline{B(x, r)} \subset \overline{B}(x, r).$$

- Normiavaruudessa (X = koko avaruus) nämä ovat aina samat ja lisäksi $\partial B(x, r) = \partial \overline{B}(x, r) = S(x, r)$.
- Esimerkki:

$$X = (\mathbb{R}^2 \setminus B(\overline{0}, 1)) \cup \{\overline{0}\},$$

jolloin $\overline{B(x, 1)}$ sisältää vain origon, mutta joukkoon $\overline{B}(x, 1)$ kuuluu myös yksikköympyrän kehä.

TAL: $(\mathbb{X}, d)$, $d = \text{DISKREETTI } 0\text{-}1\text{-METRIikka}$ (r. 53)

$$\# \mathbb{X} = \text{ALKIOIDEN LKM} \geq 2$$

$$\Rightarrow B(x, 1) = \{x\} = \text{SULJETTU}$$

$$\Rightarrow \overline{B(x, 1)} = \{x\} \quad (\text{r. 55, KOHTA (iv)})$$

$$\text{MUTTA } \overline{B}(x, 1) = \{y \in \mathbb{X} \mid d(y, x) \leq 1\} = \mathbb{X}$$