Jatkuvuus

Seuraavassa (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia.

Määritelmä 6.1

Funktio $f: X \to Y$ on **jatkuva** (continuous) pisteessä $a \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$d'(f(x), f(a)) < \varepsilon \text{ aina, kun } d(x, a) < \delta. \tag{1}$$

Funktio f on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in X$.

Huom: Ehto (1) voidaan muotoilla seuraavilla vaihtoehtoisilla tavoilla:

- $x \in X$ ja $d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$
- $f[B(a, \delta)] \subset B(f(a), \varepsilon)$
- $B(a, \delta) \subset f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$

ESIMERKKEJÄ JATKUVISTA FUNKTIOISTA:

(i) VAKIOFUNKTIOT

(ii) INKLUUSIO $j: A \to X$, KUN $A \subset X$; $j(a) = a \ \forall a \in A$.

ERITYISESTI IDENTTINEN KUVAUS $id: X \to X$, $id(x) = x \ \forall x \in X$

(VALITAAN $\delta = \varepsilon$)

(iii) $X = \mathbb{R}$, d = EUKLIDINEN METRIIKKA

$Y = \mathbb{R}$, d' = DISKREETTI METRIIKKA

$B_{d'}(a, 1) = \{a\}$ AINA

$B_d(a, \delta) =]a-\delta, a+\delta[$

$\Rightarrow f = id: (X, d) \to (Y, d')$ EI OLE JATKUVA, KOSKA

$]a-\delta, a+\delta[\not\subset \{a\}$ MILLÄÄN $\delta > 0$.

SIIS: JATKUVUUS RIIPPUU METRIIKASTA!

ESIM. (X, d) METRINEN AVARUUS, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$

TÄLLÖIN $f: X \to [0, \infty[$, $f(x) = d(x, A) = d(\{x\}, A)$

$= x$:N ETÄISYYS JOUKOSTA A

ON JATKUVA.

TOD. OLKOON $a \in A$, $x, y \in X$

$\Rightarrow d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

$\Rightarrow d(y, a) \geq d(x, A) - d(x, y)$ ← ALARAJA EI RIIPU a:STA

$\Rightarrow d(y, A) = \inf\{d(y, a) \mid a \in A\} \geq d(x, A) - d(x, y)$

$\Rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$

VAIHDETAAN $x \leftrightarrow y$: $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$

TULOS: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

TS. $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$

f ON 1-LIPSCHITZ-JATKUVA $\Rightarrow$ f JATKUVA $\square$

↑

$\delta = \varepsilon$ (VRT. HARJOITUKSET)

ESIM. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ JATKUVA

$f(x, y) = 0$ VOI ESITTÄÄ MITÄ TAHANSA (SULJETTUA) JOUKKOA

$A \subset \mathbb{R}^2$, JOS $f(x, y) = d((x, y), A)$.

Jatkuvuus $\Leftrightarrow$ avoimet/suljetut joukot

Lause 6.2

Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) *f on jatkuva.*

(ii) *Jokaisen avoimen joukon $V \subset Y$ alkukuva $f^{-1}[V] \subset X$ on avoin.*

(iii) *Jokaisen suljetun joukon $F \subset Y$ alkukuva $f^{-1}[F] \subset X$ on suljettu.*

Huom: Sen sijaan avoimen joukon $U \subset X$ kuvajoukko $f[U] \subset Y$ ei aina ole avoin, eikä suljetun joukon $G \subset X$ kuvajoukko $f[G] \subset Y$ aina suljettu, vaikka f on jatkuva.

Esimerkiksi vakiofunktio kuvaa kaikki osajoukot yhden pisteen joukolle, joka on suljettu (kaikissa metrisissä avaruuksissa).

Toisaalta jatkuvan funktion $f \colon]0,1] \to \mathbf{R}^2$, $f(x) = (x,x)$, arvojoukko ei ole suljettu, vaikka sen määrittelyjoukko on suljettu, koska se on koko avaruus $X =]0,1]$.

TOD. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii): OLKOON $V \subset Y$ AVOIN JA $x \in f^{-1}[V]$, JOLLOIN

$$f(x) \in V \Rightarrow \exists\, r>0 : B(f(x), r) \subset V$$

$$f \text{ JATKUVA } x\text{:SSÄ} \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f[B(x,\delta)] \subset B(f(x), r) \subset V$$

$$\Rightarrow B(x,\delta) \subset f^{-1}[V] \Rightarrow f^{-1}[V] \text{ AVOIN}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): OLKOON $F \subset Y$ SULJETTU $\Rightarrow Y \setminus F$ ON AVOIN

$$\text{(ii)} \Rightarrow X \setminus f^{-1}[F] = f^{-1}[Y \setminus F] \subset X \text{ ON AVOIN}$$

$$\Rightarrow f^{-1}[F] \text{ ON SULJETTU.}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): OLKOON $a \in X$ JA $\varepsilon > 0$. KOSKA $Y \setminus B(f(a), \varepsilon)$ ON SULJETTU,

NIIN $X \setminus f^{-1}[B(f(a),\varepsilon)] = f^{-1}[Y \setminus B(f(a),\varepsilon)] \subset X$

ON SULJETTU $\Rightarrow f^{-1}[B(f(a),\varepsilon)]$ ON AVOIN

KOSKA $a \in f^{-1}[B(f(a),\varepsilon)]$, NIIN $\exists\, \delta > 0 : B(a,\delta) \subset f^{-1}[B(f(a),\varepsilon)]$

$\Rightarrow f$ JATKUVA PISTEESSÄ a. $\square$

ESIM. OSOITA, ETTÄ JOUKKO

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 4y^2 < 12,\ y > 0\}$$

= ELLIPSIN SISÄPUOLEN YLÄOSA

ON AVOIN.

RATK. $D = E \cap H$,

KUN $E = \{(x,y) \mid 3x^2 + 4y^2 < 12\}$

JA $H = \{(x,y) \mid y > 0\}$

OSOITETAAN, ETTÄ E JA H OVAT AVOIMIA $\Rightarrow$ VÄITE.

OLKOON $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 12$,

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = y$

$$\Rightarrow E = f^{-1}[\mathbb{R}_-]$$

$$H = g^{-1}[\mathbb{R}_+]$$

KOSKA f, g JATKUVIA JA $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+$ AVOIMIA, NIIN

E, H AVOIMIA. $\square$

Homeomorfismi II

- Avaruuksien homeomorfisuus on **ekvivalenssirelaatio**, ts:
  1. $X \approx X$
  2. $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$
  3. $X \approx Y$ ja $Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$
- Topologisessa mielessä homeomorfisia avaruuksia voidaan pitää samoina. Metrisen avaruuden tapauksessa on luonnollisempaa vaatia myös kvantitatiivisia metriikkaan liittyviä ehtoja, kuten määritelmässä 6.6.
- Eräs topologian keskeisistä ongelmista on selvittää, mitkä avaruudet ovat keskenään homeomorfisia. Tämä koskee erityisesti *monistoja*, joiden määritelmä alla.

ESIMERKKEJÄ

(i) $[a,b] \approx [c,d] \quad \forall\, a<b,\ c<d \in \mathbb{R}$

(ii) $]0,1[\approx \mathbb{R}$

(iii) $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^k$, KUN $m \neq k$ (VAIKEA!)

VAIKKA $\exists$ JATKUVA SURJEKTIO $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

(TAPAUS $k=1$, $m \geq 2$ SEURAA HELPOSTI YHTENÄISYYDEN AVULLA)

KURSSIN VIIMEINEN AIHE

Homeomorfismi III

Eräitä käsitteitä (jotka esitetään tässä metrisinä avaruuksina, mutta yleisemmät määritelmät ovat yhtäpitäviä):

- Metrinen avaruus X on **kaari** (arc), jos $X \approx [0,1]$.
- Metrinen avaruus S on **Jordan-käyrä** (Jordan curve), jos se on homeomorfinen tason yksikköympyrän (kehän) kanssa.
- Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Metrinen avaruus M on n-**monisto**, jos
  (i) jokaisella pisteellä $x \in M$ on (avoin) ympäristö $U \approx B(\overline{0},1) \subset \mathbf{R}^n$.
  (ii) On olemassa numeroituva osajoukko $N \subset M$, jolle $\overline{N} = M$.

Luku n on moniston **dimensio**. Määritelmän ensimmäinen ehto takaa sen, että n-monisto näyttää paikallisesti samantapaiselta kuin $\mathbf{R}^n$. Jälkimmäinen ehto on tekninen lisävaatimus, joka estää "kummalliset erikoistapaukset".

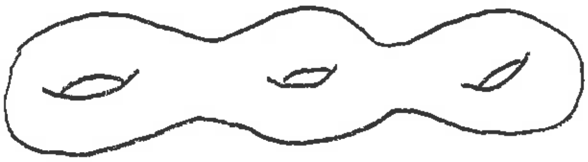
Voidaan osoittaa, että yhtenäiset[3] 1-monistot ovat joko Jordan-käyriä tai $\approx \mathbf{R}$, mutta tilanne muuttuu mielenkiintoisemmaksi, kun $n \geq 2$.

[3] Määritelmä 11.1

2-MONISTOJA $\mathbb{R}^3$:SSA:

S^2 = PALLO

T = TORUS $\approx S^1 \times S^1$



$\vdots$

NÄIN SAADAAN KAIKKI
SUUNNISTUVAT 2-MONISTOT!

ESIM. $f : C[0,10] \to C[0,10]$,

$$[f(x)](t) = \int_0^t x(s)\,ds = \text{FUNKTION } f(x) \text{ ARVO KOHDASSA } t \in [0,10].$$

OSOITETAAN: $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq 10\,\|x-y\|_\infty \quad \forall x,y \in C[0,10]$

$\Rightarrow f$ ON JATKUVA NORMIN $\|.\|_\infty$ INDUSOIMASSA METRIIKASSA.

OLKOOT $x,y \in C[0,10]$ JA $0 \leq t \leq 10$.

$$\Rightarrow \left|[f(x)](t) - [f(y)](t)\right| = \left|\int_0^t x(s)\,ds - \int_0^t y(s)\,ds\right|$$

$$= \left|\int_0^t \big(x(s) - y(s)\big)\,ds\right| \leq \int_0^t \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{\leq \|x-y\|_\infty \ \forall s}\,ds$$

$$\leq \|x-y\|_\infty \int_0^t ds = t\,\|x-y\|_\infty \leq 10\,\|x-y\|_\infty,$$

KUN $0 \leq t \leq 10$.

TÄMÄ PÄTEE $\forall t \in [0,10]$, JOTEN

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \sup\left\{\left|[f(x)](t) - [f(y)](t)\right| \;\middle|\; 0 \leq t \leq 10\right\}$$

$$\leq 10\,\|x-y\|_\infty. \quad \square$$