Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Laskuharjoitus 4P viikolla 5 (30.1.–1.3.)
Aiheet: Jatkuvuus, funktiojonot (MC-monisteet 63–87, Väisälä 4, 9, 11)

Tehtävät 3 ja 4 on tarkoitus laskea ennen omaa harjoitusryhmää ja lasketut tehtävät merkitään listaan. Assitentti valitsee yhden (tai useamman, jos a-b-. . . -kohtia) opiskelijan esittämään jomman kumman (satunnaisesti valitun!) tehtävän taululla, ja esittää itse toisen tehtävän ratkaisun.

Loppuajan voi käyttää palautettavien tehtävien laskemiseen. Ne palautetaan kirjallisesti laskutupaa Y190c vastapäätä olevaan lokerikkoon seuraavaan tiistaihin klo 12.15 mennessä. Myös todistustäydennysten 4T palautuksen takaraja on sama.

3. a) Olkoot X ja Y joukkoja, $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$ ja $f\colon X \to Y$ jokin funktio. Alla olevista kaavoista (i) ei päde yleiseti. Esitä tästä konkreettinen esimerkki (esim. kuvio tms.), ja todista kaava (iv).

   (i) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, (ii) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$,
   (iii) $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$, (iv) $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$.

   Vihje: Kaikissa oikeissa kaavoissa onnistuu päättely

   $$x \in \text{vasemman puolen joukko} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in \text{oikean puolen joukko}.$$

   Lisätieto: Oikeat kaavat (ii)–(iv) ovat tosia mielivaltaisille (enemmän kuin kaksi joukkoa) leikkauksille ja yhdisteille. Myös väärässä kaavassa (i) pätee yleisesti $\subset$ tai $\supset$, kumpi?
   b) Osoita, että joukko

   $$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 < y^2 + z^2 - xyz + 3\}$$

   on avoin ja joukko

   $$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 - 4xy + 2y^3 = 6\}$$

   suljettu.
   Vihje: Esitä ne sopivalla tavalla alkukuvina (vrt. Luento 6+, s. 4). Tarvittavien funktioiden jatkuvuutta ei tarvitse perustella.

4. a) Olkoon $L \geq 0$. Funktio $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ on L-Lipschitz, jos

   $$d'(f(a), f(b)) \leq Ld(a, b) \quad \text{kaikilla} \quad a, b \in X.$$

   Osoita $\varepsilon - \delta$-määritelmästä lähtien, että Lipschitz-funktio on jatkuva.
   Vihjeenä hyvä alku: Olkoon $a \in X$ ja $\varepsilon > 0$.
   b) Osoita (väliarvolauseen avulla tai algebrallisesti), että funktio

   $$p\colon [-10, 10] \to \mathbf{R},\ p(x) = x^3,\ x \in \mathbf{R},$$

   toteuttaa Lipschitz-ehdon jollakin $L \geq 0$.
   c) Osoita, ettei funktio $q\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $q(x) = \sqrt{x}$, toteuta Lipschitz-ehtoa millään vakiolla $L \geq 0$ (vaikka se on jatkuva).
   Huom: b- ja c-kohdat tavallisessa metriikassa.
   Lisätieto: Rudolf Lipschitz oli saksalainen matemaatikko (1832–1903).

5. a) Määritellään funktio $f\colon C([0,10]) \to C([0,10])$ asettamalla

$$[f(x)](t) = \int_0^t s\,x(s)\,ds, \text{ kun } x \in C([0,10]) \text{ ja } t \in [0,10].$$

Tässä siis $f(x)$ on funktio, jonka arvo pisteessä t lasketaan ym. kaavalla. Osoita, että f on Lipschitz-jatkuva normin $\|.\|_\infty$ indusoiman metriikkan suhteen, ts.

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \le L\|x - y\|_\infty \text{ jollakin } L \ge 0.$$

Vihje: Vertaa esimerkkiin Luento 6+, s. 7.
b) Tarkastellaan funktiota $g\colon C^1(\mathbf{R}) \to C(\mathbf{R})$,

$$[g(x)](t) = x'(t), \text{ kun } x \in C^1(\mathbf{R}) \text{ ja } t \in \mathbf{R}.$$

Osoita, ettei g toteuta a-kohdan tyyppistä Lipschitz-ehtoa millään vakion arvolla $L \ge 0$.
Vihje: Tässä

$$C^1(\mathbf{R}) = \{x\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid x' \text{ on jatkuva}\}.$$

Valitaan Lip-ehdossa $y = \overline{0}$ = nollafunktio, jolloin riittää keksiä esimerkki funktiojonosta x_n, jolle $\|x_n\|_\infty \le 1$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, mutta $\|x_n'\|_\infty \to \infty$, kun $n \to \infty$ (tai jotain vastaavaa).

6. a) Osoita, että $[0,1[\approx [0,\infty[$ reaaliakselin tavallisessa metriikassa.
Huom: Tarvittavien funktioiden jatkuvuus voidaan olettaa tunnetuksi.
b) Osoita, että tason euklidisessa metriikassa

$$B(\overline{0},1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \approx \mathbf{R}^2.$$

Vihje: Yksi mahdollisuus on a-kohtaan perustuva radiaalinen kuvaus napakoordinaattien avulla.

7. Tarkastellaan funktiojonoa (f_n), jossa $f_n\colon [0,\infty[\to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n + 1, & \text{kun } n - 1 \le x \le n, \\ n + 1 - x, & \text{kun } n \le x \le n + 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

a) Piirrä kuvaajia ja määritä jonon pisteittäinen rajafunktio f.
b) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti kohti rajafunktiota f joukossa $[0,\infty[$?
c) Onko voimassa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx?$$

d) Pienellä muutoksella saadaan samantapainen funktiojono, jolla on sama rajafunktio, mutta c-kohdan vasemman puolen raja-arvo (tai jopa kaikki integraalit) on $= \infty$; millaisella? Kuva riittää.