Nimi:

Opiskelijanumero:

Harjoitusryhmä:

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Todistustäydennys 4T
Aiheet: Jatkuvuus, jonot (MC-monisteet, Väisälä 4–5, 11)

Palauta tämä paperi yhdessä muiden palautettavien tehtävien kanssa viimeistään seuraavana tiistaina klo 12.15 mennessä. Kukin tehtävä arvostellaan asteikolla 0–3. Näitä papereita jaetaan luennolla ja luennoitsijan toimiston M227 viereisessä kansiossa. Voit myös tulostaa tehtävät MC-sivulta.

1. Olkoot (X, d) metrinen avaruus, $(E, \|.\|)$ normiavaruus ja $f, g\colon X \to E$ jatkuvia kuvauksia. Osoita, että $f + g\colon X \to E$ on jatkuva täydentämällä seuraava todistus.

   Todistus. Osoitetaan, että $f + g$ on jatkuva pisteessä $a \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä a, niin on olemassa sellainen

   $$\underline{\hspace{4cm}},$$

   että

   $$\|f(x) - f(a)\| < \underline{\hspace{2cm}}$$

   aina, kun $x \in X$ ja

   $$\underline{\hspace{4cm}}.$$

   Koska g on jatkuva pisteessä a, niin on olemassa sellainen

   $$\underline{\hspace{3cm}}, \quad \text{että} \quad \underline{\hspace{8cm}}.$$

   Valitaan

   $$\delta = \underline{\hspace{5cm}} > 0.$$

   Jos nyt $x \in X$ ja $d(x, a) < \delta$, niin

   $$\begin{aligned} \|(f+g)(x) - (f+g)(a)\| &= \underline{\hspace{8cm}} \\ &\leq \underline{\hspace{8cm}} \\ &< \underline{\hspace{5cm}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

   Tästä seuraa, että $f + g$ on jatkuva pisteessä a, ja joten se on jatkuva jokaisessa avaruuden X pisteessä. $\square$

Käännä!

2. a) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) suppeneva jono avaruudessa X. Osoita, että jono (x_n) on rajoitettu täydentämällä seuraava todistus.

Todistus. Olkoon (x_n) suppeneva jono ja

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Sovelletaan raja-arvon määritelmää valitsemalla $\varepsilon = 1$. Tällöin on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbf{N}$, että

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} < 1 \text{ aina, kun } \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Koska jonon pisteitä $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1-1}$ on vain äärellinen määrä, niin

$$R = \max\{1, d(x_1, a), \underline{\qquad\qquad}, \ldots, \underline{\qquad\qquad}\} < \infty.$$

Tällöin kaikille jonon pisteille x_k pätee

$$d(x_k, a) \leq \underline{\qquad},$$

joten ne sisältyvät suljettuun kuulaan

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että jono on rajoitettu. $\square$

b) Tarkastellaan metristä avaruutta $(\mathbf{R}, d)$, kun metriikkana on diskreetti $0-1$-metriikka. Täydennä seuraava todistus, jossa osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \neq 0.$$

Todistus. Kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee

$$d(1/n, 0) = \underline{\qquad\qquad},$$

joten ei ole olemassa sellaista $\underline{\qquad\qquad}$, että

$$\underline{\qquad\qquad} < 1/2 \text{ aina, kun } \underline{\qquad\qquad}.$$

Raja-arvon ehto ei toteudu arvolla $\varepsilon = 1/2$, joten väite seuraa tästä. $\square$