

- Tuloavaruuden **projektiot** määritellään kaavoilla

$$\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X, \text{pr}_1(x, y) = x,$$

$$\text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y; \text{pr}_2(x, y) = y.$$

- Projektiot ovat jatkuvia, jos tuloavaruuden metriikka liittyy "järkevällä" tavalla alkuperäisiin metriikoihin kuten d ja e . Syy: Projektiot ovat 1-Lipschitz-jatkuvia näiden metriikkojen suhteen.
- Funktion $f: Z \rightarrow X \times Y$ koordinaattifunktiot ovat $f_1 = \text{pr}_1 \circ f$ ja $f_2 = \text{pr}_2 \circ f$.
- Yhdistettyjen funktioiden jatkuvuutta koskevasta lauseesta seuraa: Funktio $f: Z \rightarrow X \times Y$ on jatkuva $\Leftrightarrow$ molemmat (yleisemmin: kaikki) koordinaattifunktiot ovat jatkuvia.

JATKUVUUDEN PERUSTELU:

$$U \subset X \text{ AVOIN} \Rightarrow \text{pr}_1^{-1}[U] = U \times Y \text{ ON AVOIN}$$

$$\Rightarrow \text{pr}_1 \text{ ON JATKUVA}$$

$$(\text{TAI: pr}_1 \text{ ON 1-LIPSCHITZ})$$

Metrisen avaruuden jonot

Jonon käsite liittyy keskeisesti kurssin loppuosan kahteen tärkeään käsitteeseen: täydellisyyteen ja kompaktiuteen.

Määritelmä 7.1

- Metrisen avaruuden (X, d) **jono** on funktio $x: \mathbf{N} \rightarrow X$. Yleensä merkitään $x(n) = x_n$, kun $n \in \mathbf{N}$, ja

$$x = (x_n) = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (x_1, x_2, \dots).$$

- Jono (x_n) **suppenee** (converges) kohti **raja-arvoa** (limit) $a \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että

$$d(x_n, a) < \varepsilon \text{ aina, kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ tai } x_n \rightarrow a.$$

Huom: $x[\mathbf{N}] = \underbrace{\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}}_{\text{joukko}} \subset X$ on eri asia kuin (x_n) .

Esim. jonon $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ vastaa joukko $\{0, 1\}$.

Yleisesti:

$$x_n \rightarrow a$$

Korkei siis kukaikin ympäristö!

$(\Leftrightarrow)$

Jos $U \subset X$ on pisteen a avoin ympäristö, niin

$x_n \in U$ niin äärellisen monella $n \in \mathbf{N}$

$(\Leftrightarrow)$

$$d(x_n, a) \rightarrow 0$$

Lause 7.2

- Suppeneva jono (x_n) on **rajoitettu**, ts. on olemassa sellaiset $b \in X$ ja $r > 0$, että $x_n \in B(b, r)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
- Olkoon $A \subset X$ ja $a \in X$. Tällöin

$$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \text{ joukon } A \text{ jono } (a_n), \text{ jolle } a_n \rightarrow a.$$

- Seuraus: Joukko $A \subset X$ on suljettu $\Leftrightarrow A$ sisältää kaikkien X :ssä suppenevien jonojensa raja-arvot.

Huom: Metrinen avaruuden jonoilla ei ole reaalityyppisten jonojen tapaisia laskusääntöjä 2.3, paitsi silloin, kun tarvittavat laskutoimitukset on määritetty. Esimerkiksi normiavaruuden tapauksessa summaa ja vakiolla kertomista koskevat laskusäännöt ovat voimassa.

TOISEN KOHDAN TOD:

$\Rightarrow$: OLKoon $a \in \bar{A}$. JOS $a \in A$, NIIN VAKIOJONO $(a, a, a, \dots) \rightarrow a$.

JOS $a \notin A$, NIIN $A \cap B(a, 1/m) \neq \emptyset \quad \forall m \in \mathbb{N}$, JOTEN

$$\exists a_m \in A \cap B(a, 1/m)$$

$$\Rightarrow 0 \leq d(a_m, a) < 1/m \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_m \rightarrow a.$$

$\Leftarrow$: OLKoon $a_m \in A \quad \forall m \in \mathbb{N}$ JA $a_m \rightarrow a$. JOS $r > 0$, NIIN

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}: a_m \in A \cap B(a, r) \quad \forall m \geq m_0$$

$$\Rightarrow a \in \text{Ext}(A) \Rightarrow a \in \bar{A}. \quad \square$$

Lause 7.3

Olkoon $f: X \rightarrow Y$ ja $a \in X$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- 1 Funktio f on jatkuva pisteessä a .
- 2 Aina kun avaruuden X jono (x_n) suppenee kohti pistettä a , niin jono $(f(x_n))$ suppenee kohti pistettä $f(a) \in Y$.

Jatkuvuus tarkoittaa siis kaavaa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

suppeneville jonoille (x_n) .

TOD. (1) $\Rightarrow$ (2): OLETETAAN, ETTÄ f ON JATKUVA a :SSA.

OLKOON $x_m \in X \quad \forall m \in \mathbb{N}$ JA $x_m \rightarrow a$.

OSOITETAAN, ETTÄ $f(x_m) \rightarrow f(a)$, JOTEN OLKOON $\varepsilon > 0$.

JATKUVUUS $\Rightarrow \exists \delta > 0 : d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$

KOSKA $x_m \rightarrow a$, NIIN $\exists m_0 \in \mathbb{N} : m \geq m_0 \Rightarrow d(x_m, a) < \delta$

TÄLLÖIN: $m \geq m_0 \Rightarrow d(x_m, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x_m), f(a)) < \varepsilon$
 $\Rightarrow$ VÄITTE.

(2) $\Rightarrow$ (1): OLETETAAN, ETTÄ (2) ON TOSI.

VASTAOLETUS: f EI OLE JATKUVA a :SSA

SILLOIN $\exists \varepsilon > 0$, JOLLE VAADITTUA $\delta > 0$ EI OLE.

ERITYISESTI: MIKÄÄN $\delta = 1/m, m \in \mathbb{N}$, EI KÄY

TS. $\forall m \in \mathbb{N} \exists x_m \in X$, JOLLE $d(x_m, a) < 1/m$, MUTTA

$$d'(f(x_m), f(a)) \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow x_m \rightarrow a$, MUTTA $f(x_m) \not\rightarrow f(a)$ R.R.

$\Rightarrow$ VASTAOLETUS VÄÄRÄ $\Rightarrow$ VÄITTE TOSI. $\square$

Jonot tuloavaruudessa

Olkoon $Z = X \times Y$ metristen avaruuksien X ja Y tuloavaruus. Jos (z_n) on avaruuden Z jono, niin $z_n = (x_n, y_n)$, joten sitä vastaa 1-käsitteisellä tavalla avaruuksien X ja Y jonot (x_n) ja (y_n) .

Lause 7.4

Jono (z_n) suppenee $\Leftrightarrow$ jonot (x_n) ja (y_n) suppenevat. Tällöin pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

Oletuksena on jälleen se, että tuloavaruuden metriikka liittyy "järkevällä" tavalla avaruuksien X ja Y metriikoihin.

Vastaava tulos on voimassa myös silloin, kun tulon tekijöitä on enemmän kuin kaksi.

TOD. $\Rightarrow$; SEURAA PROJEKTIoidEN pr_1, pr_2 JATKUVUUDESTA

$$\Leftarrow: d_{\max}(z_m, z) = \max(d_1(x_m, x), d_2(y_m, y)) \rightarrow 0,$$

kun $m \rightarrow \infty$.

$\mathbb{R}^m$: Jos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on jono $\mathbb{R}^m$:ssä, niin

$$x_k \rightarrow a \Leftrightarrow pr_j(x_k) \rightarrow pr_j(a) \quad \forall j=1, \dots, m.$$

Rajafunktio

Esimerkki 8.3

Olkoon $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, kun $x \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

Esimerkki 8.4

Olkoon $f_n: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, kun $x \in [0, 1/2]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

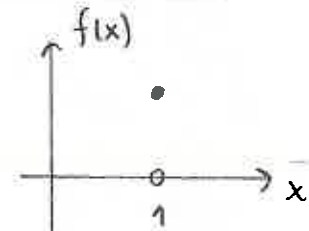
Esimerkki 8.5

Olkoon $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2 - nx, & 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$

Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

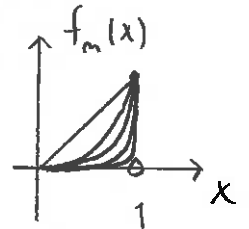
Ratkaisut: Luennolla/monisteessa.

$$\underline{8.3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases} = f(x)$$



$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

JOS $0 \leq x < 1$, NIIN



$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - f(x)| = \begin{cases} 1^n - 1 = 0, & x = 1 \\ |x^n - 0| = x^n, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sup \{ |f_n(x) - f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1 \} = \sup \{ x^n \mid 0 \leq x < 1 \} = 1 \quad \forall n$$

$\Rightarrow$ EI SUPPENE TASAISTESTI.

$$\underline{8.4} \quad \text{NYT} \quad \sup \{ |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| \mid 0 \leq x \leq 1/2 \} = \sup \{ x^n \mid 0 \leq x \leq 1/2 \} \\ = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ SUPPENE TASAISTESTI VÄLILLÄ $[0, 1/2]$.

Rajafunktio

Esimerkki 8.3

Olkoon $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, kun $x \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

Esimerkki 8.4

Olkoon $f_n: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, kun $x \in [0, 1/2]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

Esimerkki 8.5

Olkoon $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2 - nx, & 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$

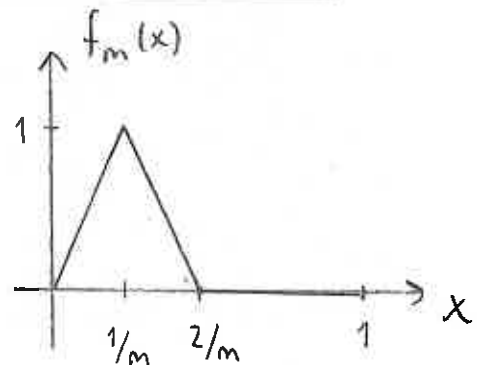
Määritä jonon (f_n) rajafunktio f ja tutki, onko suppeneminen tasaista.

Ratkaisut: Luennolla/monisteessa.

8.5 RAJAFUNKTIO ON $f = \bar{0}$.

$$\text{S44: } x=0 \Rightarrow f_m(x) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0$$



$0 < x \leq 1$: JOS $\frac{2}{m} < x$ ELI $m > \frac{2}{x}$, NIIN $f_m(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = 0$, KOSKA JONON LOPPUOSA ON $(\dots, 0, 0, 0, \dots)$

EI SUPPENE TASAISESTI, KOSKA

$$|f_m(1/m) - f(1/m)| = |1 - 0| = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(POIKKEAMA YHDESSÄ PISTEESSÄ $\leq$ sup{POIKKEAMA KAIKKIALLA})

Lause 8.6

Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita $f_n: (X, d) \rightarrow (Y, d')$, joka suppenee tasaisesti joukossa X kohti funktiota $f: X \rightarrow Y$. Tällöin funktio f on jatkuva.

Lause 8.7

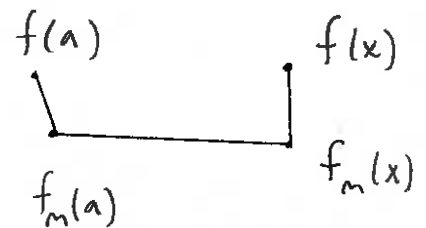
Olkoon (f_n) jono Riemann-integroituvia funktioita $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, joka suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ kohti Riemann-integroituvaa funktiota $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Huom: Rajafunktion f integroitavuus seuraa automaattisesti, jos funktiot f_n ovat jatkuvia (edellinen lause) tai kasvavia (tai väheneviä).

8.6 TOD. OLKOON $a \in X$ JA $\varepsilon > 0$.

KOSKA $f_n \rightarrow f$ TASAISESTI, NIIN



$$\exists m_0 \in \mathbb{N} : m \geq m_0 \Rightarrow \sup \{ d'(f_m(x), f(x)) \mid x \in X \} < \varepsilon/3$$

f_{m_0} JATKUVA $\Rightarrow \exists a$:N YMPÄRISTÖ U , JOLLE

$$x \in U \Rightarrow d'(f_{m_0}(x), f_{m_0}(a)) < \varepsilon/3.$$

JOS NYT $x \in U$, NIIN Δ -EY:N NOJALLA

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(a)) &\leq d'(f(x), f_{m_0}(x)) + d'(f_{m_0}(x), f_{m_0}(a)) + d'(f_{m_0}(a), f(a)) \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ON JATKUVA a :SSA. $\square$

SEURAVS: f_n JATKUVIA, f EPÄJATKUVA $\Rightarrow \nexists$ SUPPENEE TASAISESTI

(MUTTA: f JATKUVA $\nRightarrow$ SUPPENEE TASAISESTI, VRT. 8.5)