3 Differentiaalilaskentaa

Yhden muuttujan reaalifunktioiden tutkimista jatketaan

- funktion arvojen **muutosnopeutta** kuvaavan mittarin avulla,

- josta tärkeänä sovelluksena on **optimointiongelman** käsittely.

Tätä varten tarvitaan:

3.1 Raja-arvo ja jatkuvuus

Raja-arvon käsite on matemaattisen analyysin peruskäsite.

Tässä ei ole mahdollista eikä myöskään tarkoituksenmukaista käsitellä raja-arvon käsitettä matemaattisesti täsmällisellä tavalla, vaan tyydytään esimerkkien antamiin mielikuviin aiheesta.

1 Raja-arvo pisteessä x_0

Esim. Funktio f:**R**\{0} → **R**, $f(x) = \frac{(1+x)^2-1}{x}$

- ei ole määritelty, kun x = 0, mutta kuitenkin

- ”lähellä” lähtöjoukon arvoa x = 0 on

x	$\frac{(1+x)^2-1}{x}$	
-1	1,000000000	
-0,5	1,500000000	
-0,1	1,900000000	Kun x lähestyy nollaa, f:n arvot
-0,01	1,990000000	”näyttävät lähestyvän” arvoa 2.
-0,001	1,999000000	
-0,0001	1,999900000	Silloin sanotaan, että funktion f **raja-arvo**
-0,00001	1,999990000	**pisteessä x**=0 on 2.
-0,000001	1,999999000	
0,0000001	**1,999999899**	
0,0000001	**2,000000101**	
0,000001	2,000001000	
0,00001	2,000010000	
0,0001	2,000100000	
0,001	2,001000000	
0,01	2,010000000	
0,1	2,100000000	
0,5	2,500000000	
1	3,000000000	

Jos funktion f arvot f(x) lähestyvät arvoa a, kun x lähestyy arvoa x_0,

sanotaan a:ta funktion f **raja-arvoksi pisteessä** x_0 ja

merkintänä on $\mathbf{\lim_{x \to x_0} f(x) = a}$.

Edellä siis (ilmeisesti) on $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = 2.$

Raja-arvon ja sen ominaisuuksien täsmällinen käsittely ja todistukset (ε, δ-tekniikalla(?)) sivuutetaan.

”Selvissä” tapauksissa raja-arvon olemassaolo ja suuruus näkyy edellä esimerkissä kuvatulla tavalla.

2 Toispuoliset raja-arvot pisteessä x_0

Esim. Funktio f:**R**\{0} → **R**, f(x) = $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{-x}{x} = -1, & x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 \quad , & x > 0 \end{cases}$

”Näyttää” siltä, että

f(x) → -1, kun x → 0 vasemmalta puolelta ja

f(x) → +1, kun x → 0 oikealta puolelta.

Silloin sanotaan, että

f:n **vasemmanpuoleinen raja-arvo** on -1, mistä merkintänä käytetään

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \quad \text{ja}$$

f:n **oikeanpuoleinen raja-arvo** on 1 ja merkintänä käytetään

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 .$$

Selvästi on

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 -} f(x) = a \text{ ja } \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = a.$$

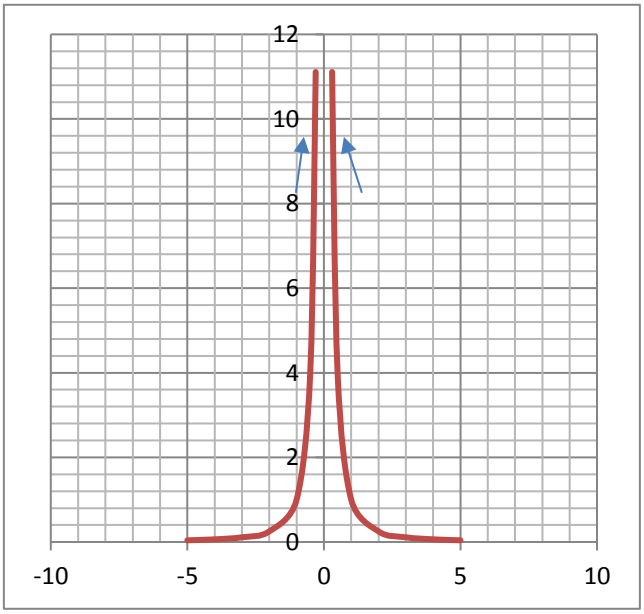
Esimerkissä siis raja − arvoa $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ ei ole olemassa.

Raja-arvon yleisten ominaisuuksien käsittely sivuutetaan tässä.

3 Raja-arvo $+\infty$ ja $-\infty$ pisteessä x_0

Esim. Funktio f:**R**\{0} → **R**, $f(x) = x^{-2}$

x	$f(x) = 1/x^2$
-5	0,04
-4	0,0625
-3	0,111111
-2	0,25
-1	1
-0,5	4
-0,3	11,11111
-0,1	**100**
-0,01	**10000**
0,01	**10000**
0,1	**100**
0,3	11,11111
0,5	4
1	1
2	0,25
3	0,111111
4	0,0625
5	0,04

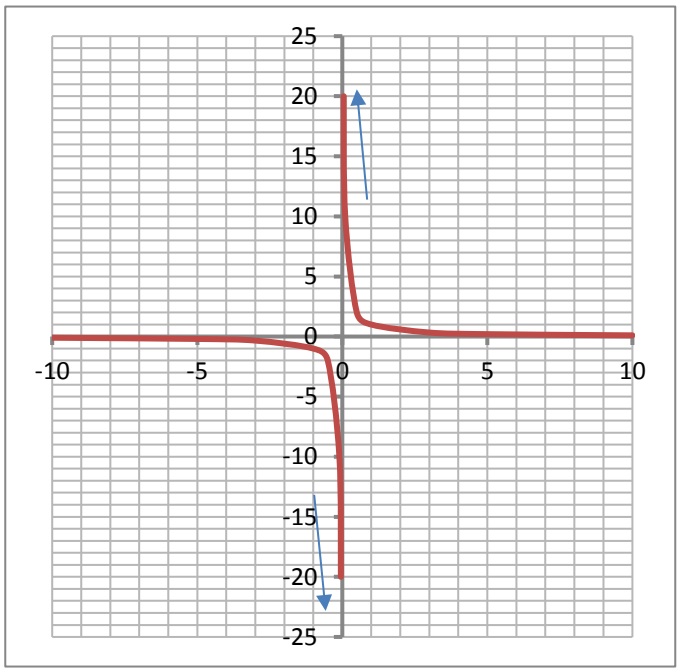


”Näyttää siltä”, että x:n lähetessä (tässä) nollaa f(x) kasvaa rajatta kohti ääretöntä.

Tästä käytetään merkintää $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Esim. Funktio f:**R**\{0} → **R**, f(x) = x^{-1} = 1/x

x	x^{-1}
-10	-0,1
-5	-0,2
-3	-0,33333
-1	-1
-0,5	-2
-0,1	-10
-0,05	**-20**
-0,01	**-100**
-0,001	**-1000**
0,001	**1000**
0,01	**100**
0,05	**20**
0,1	10
0,5	2
1	1
3	0,333333
5	0,2
10	0,1



Tässä taas ”näyttää siltä”, että x:n lähetessä (tässä) nollaa vasemmalta puolelta f(x) vähenee rajatta kohti -∞.

Tästä käytetään merkintää $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

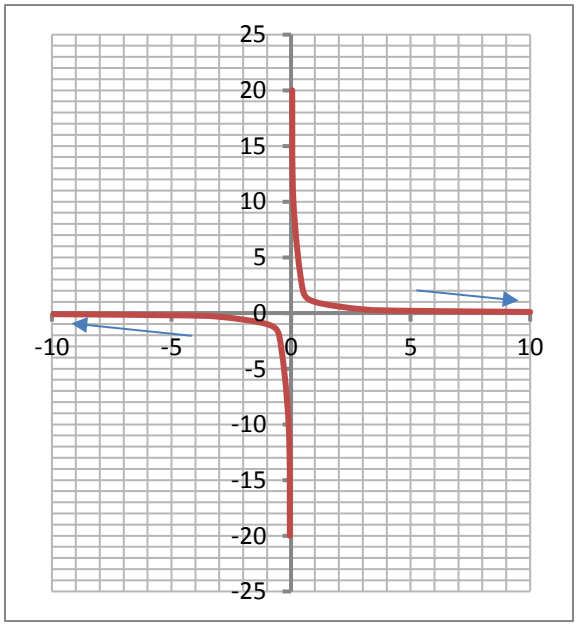
Kun x:n lähenee nollaa oikealta puolelta f(x) kasvaa rajatta kohti $+\infty$.

Tästä käytetään merkintää $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$.

4 Raja-arvo, kun x → ∞ tai x → −∞

Esim. Funktio f:**R**\{0} → **R**, f(x) = x^{-1}

x	f(x) = 1/x
-10000	**-0,0001**
-1000	**-0,001**
-100	-0,01
-10	-0,1
-1	-1
-0,1	-10
-0,05	-20
0,05	20
0,1	10
1	1
10	0,1
100	0,01
1000	**0,001**
10000	**0,0001**



- Kun x → ∞, niin (tässä) ”selvästi” f(x) → 0

ja tästä käytetään merkintää $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Tämä tilanne on **yleistys lukujonon raja-arvolle**.

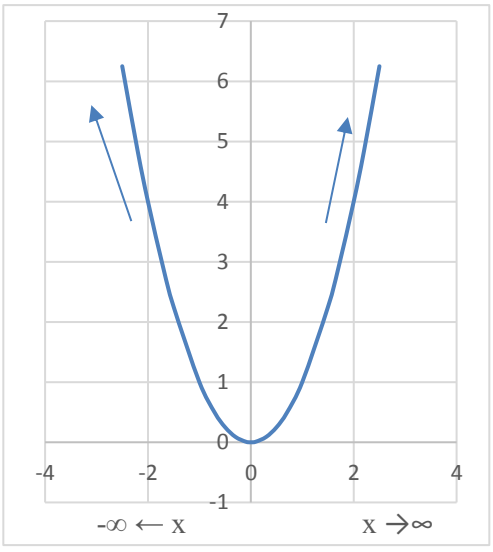
- Kun x → −∞, niin ”selvästi” f(x) → 0

ja tästä käytetään merkintää $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Vastaavasti kuin lukujonoilla voi olla, että

- f(x) → +∞ tai − ∞, kun x → +∞ tai − ∞

Esim. funktio f:**R** → **R**, f(x) = x^2



- Myös voi olla, että f(x) ei kasva tai vähene rajatta, mutta ei myöskään suppene kohti mitään kiinteää arvoa.

Esim. funktio g:**R** → **R**, g(x) = sin x

Jatkuvuus

- Differentiaali- ja integraalilaskennan tarkasteluissa on yleensä välttämätön edellytys, että tutkittava funktio on jatkuva.

- Luonnollinen mielikuva jatkuvuudesta on, että jollain **välillä** jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton yhtenäinen käyrä.

Täsmällisemmin:

Oletetaan, että funktio f on määritelty pisteen x_0 ympäristössä(?).

Funktio f on **jatkuva pisteessä** x_0, jos

3) ↓

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2) ↑ 1) ↑

Siis

1) f on määritelty x_0:ssa,

2) raja-arvo x_0:ssa on olemassa ja

3) raja-arvo on sama kuin funktion arvo.

Funktio f on **jatkuva**

- **avoimella välillä** (a, b), jos se on jatkuva kaikilla $x \in (a, b)$

ja

- **suljetulla välillä** [a, b], jos se on jatkuva avoimella välillä (a, b)

ja lisäksi $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ **ja** $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

Voidaan osoittaa, että mm.

polynomifunktio, potenssifunktio, eksponenttifunktio, logaritmifunktio ja trigonometriset funktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan.

3.2 Funktion arvojen muutosnopeus

Derivaatta

Esim. (jatkoa) Luomuturnipsin tuottajat aikovat tehdä kartellin ja heidän käytössään on kysyntäfunktio,

$f:A\rightarrow B$, $f(x) = -15.9x + 810.2$,

missä yksikköhinta (€/kg) $x\in A\subset \mathbf{R}^+$ ja kysyntä (t) $y=f(x)\in B\subset \mathbf{R}^+$.

Kun kustannukset ovat 5 €/kg, voittoa/tappiota kuvaa funktio

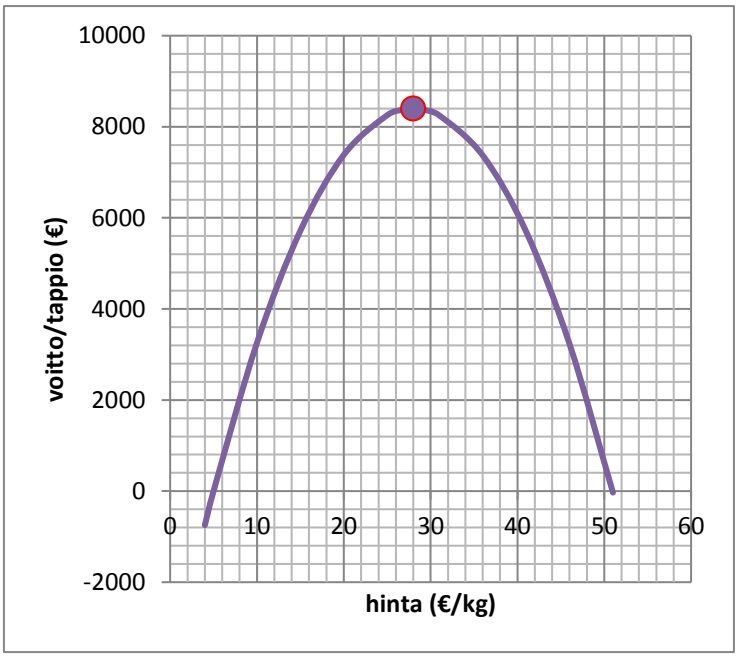
$v:\mathbf{R}^+\rightarrow\mathbf{R}$, $v(x) = f(x)\cdot(x-5) = -15.9x^2 + 889.7x - 4051.0$.

Funktion arvoista ja kuviosta näkyy, että kasvatettaessa yksikköhintaa x

- voiton suuruus v(x) **muuttuu** ja

- muutoksen **voimakkuus** ja **suunta** muuttuvat:

hinta x (€/kg)	voitto f(x) (€)
4	-746,6
5	0
10	3256
15	5717
20	7383
25	8254
27	8379,8
28	8395
29	8378,4
31	8249,8
36	7371,8
41	5698,8
46	3230,8
51	-32,2



- Aluksi yksikköhinnan x kasvaessa voitto v(x) kasvaa voimakkaasti,

mutta lähestyttäessä arvoa x≈28 €/kg kasvu hidastuu

- ja tässä kohdassa saadaan maksimivoitto

- Tämän jälkeen voitto v(x) alkaa vähentyä ensin hitaasti ja sitten voimakkaasti.

Voiton v **muutosnopeus on erilainen** eri hintatasoilla x.

Funktion v muutosnopeuden muuttumista voidaan likimääräisesti kuvata laskemalla voiton suuruuden eroja, kun siirrytään aina 1 €/kg (1 yksikkö) eteenpäin.

Kuitenkin (mm. optimointiongelman käsittelyssä) tarvitaan tarkempi muutosnopeuden mittari.

Tällainen (alun perin erityisesti fysiikan kysymysten tutkimiseen kehitetty)

- matemaattisilta ominaisuuksiltaan erinomainen
- empiirisesti varsin helposti tulkittava

funktion f arvojen (**absoluuttisen**) **muutosnopeuden mittari** on **derivaatta**.

Derivaatan arvojen ”auki lukemisessa” on sama ajatus kuin auton nopeusmittarin arvojen seuraamisessa:

- Nopeusmittarin lukema on esim. 80 km/h (f:n derivaatta):

Jos matkaa jatkettaisiin ”täysin samalla tavalla”,

niin odotetaan, että

- kuljettu matka (funktion arvo f(x)) kasvaa 80 km,

- kun matka-aika (x) kasvaa 1 h verran.

Silloin myös

Ajan x (absoluuttinen) muutos	Matkan f(x) (abs.) muutos
0.5 h	80 km/h · 0.5 h = 40 km
0.1 h	80 km/h · 0.1 h = 8 km
jne.	

Olosuhteet ja toiminta (funktion f arvo) muuttuvat yleensä, kun aika (muuttujan x arvo) muuttuu.

Kuitenkin nopeusmittari (funktion f derivaatta) näyttää hetkellisen ”muutospyrkimyksen” suuruuden helposti hahmotettavalla tavalla.

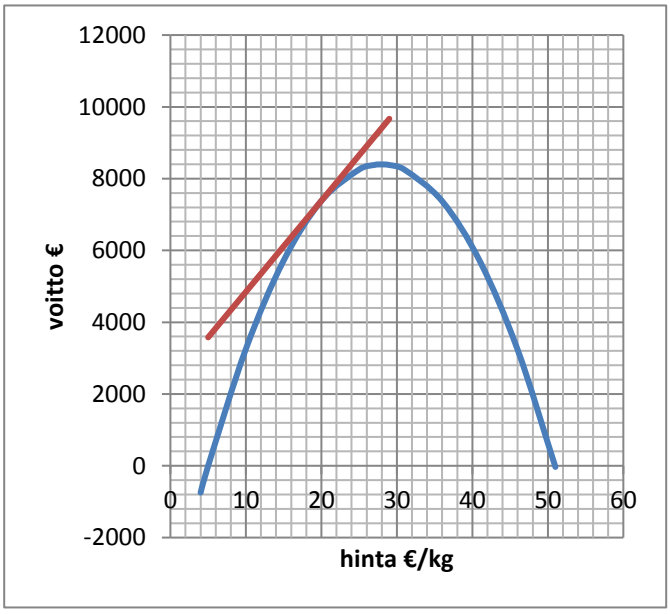
Tällainen ajatus f:n arvon muuttumisesta (matkan karttumisesta) tasaisesti, siis **lineaarisesti**, muuttujan x arvon (ajan) muuttuessa yhden yksikön verran, vastaa funktion f kuvaajan seuraamista **kuvaajaa sivuavan tangentin** avulla:

Esim. (jatkoa) Luomuturnipsista saatava voitto

$v:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $v(x) = f(x)\cdot(x-5)$

$= -15.9x^2 + 889.7x - 4051.0.$

hinta x (€/kg)	voitto f(x) (€)
4	-746,6
5	0
10	3256
15	5717
20	7383
25	8254
27	8379,8
28	8395
29	8378,4
31	8249,8
36	7371,8
41	5698,8
46	3230,8
51	-32,2



- Esimerkiksi, kun hinta x = 5 €/kg,

- voittoa kuvaava **funktio** v kasvaa voimakkaasti ja

- **tangentti** on jyrkästi nouseva suora ja

-sen **kulmakerroin** on ”suuri” positiivinen luku.

- Kun hinta x ≈28 €/kg,

- voitto**funktio** v ei kasva eikä vähene ja

- **tangent**ti on x-akselin suuntainen suora ja

-sen **kulmakerroi**n on nolla.

- Kun x= 30 €/kg,

- **funktio** v vähenee hitaasti ja

- **tangentt**i on loivasti laskeva suora ja

- sen **kulmakerroin** on (itseisarvoltaan) ”pieni” negatiivinen luku.

Siis funktion arvojen **muutoksen suuntaa ja voimakkuutta**

arvon x kohdalla voidaan mitata kuvaajan pisteeseen (x,f(x)) ”asetetun” **tangentin kulmakertoimen** avulla.

Tällaista kulmakerrointa sanotaan **funktion f derivaataksi pisteessä x**.

Funktion f muutosnopeutta kuvaava derivaatta(-funktio) saadaan selville raja-arvon avulla approksimoimalla tangenttia pisteessä (x,f(x)) kuvaajan leikkaavan suoran (sekantin) avulla:

Olkoon f: A → B jokin funktio.

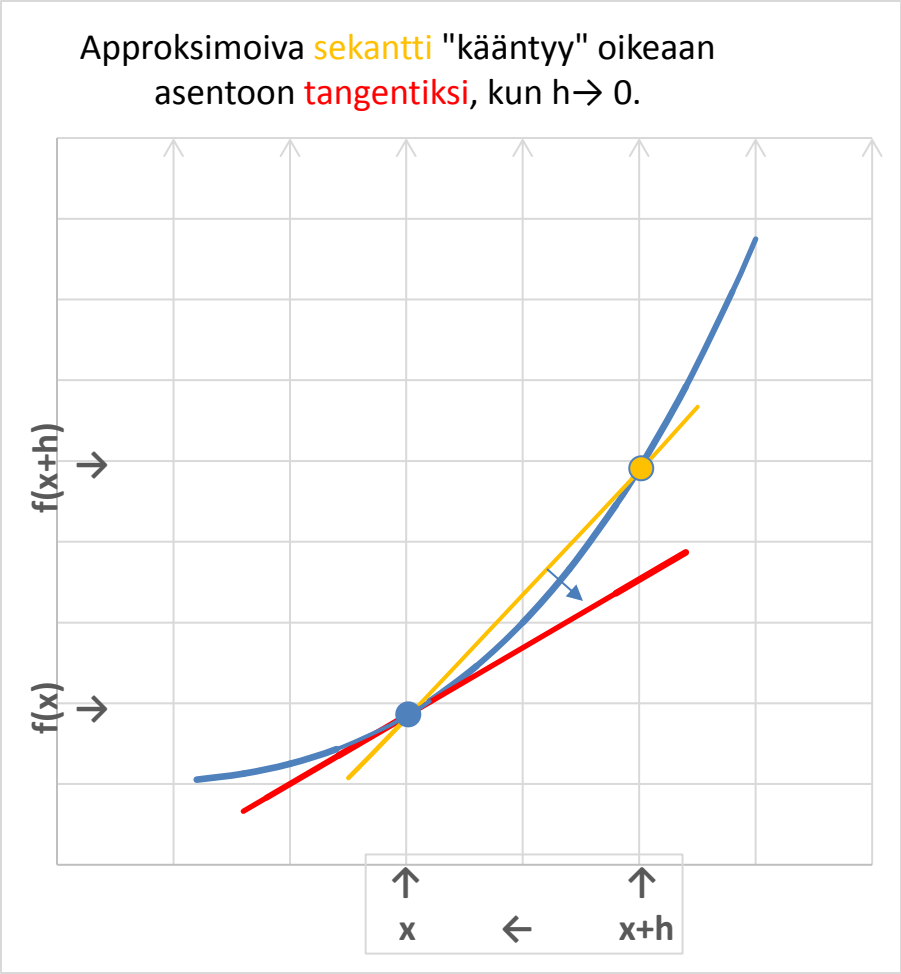
- Tarkastellaan funktiota f pisteen x ”ympäristössä”.

- Olkoon h ”pieni” reaaliluku. (Voi olla h>0 tai h<0.)

- Asetetaan pisteiden (x, f(x)) ja (x+h, f(x+h)) kautta kulkemaan suora.

- Sen kulmakerroin on $\dfrac{\mathbf{f(x+h)-f(x)}}{\mathbf{h}}$

Tätä lauseketta sanotaan **erotusosamääräksi**.



- Jos h on ”pieni”, tämä suora approksimoi hyvin pisteen x kohdalle piirrettyä tangenttia.

- Silloin voidaan ajatella (toivoa), että tangenttia approksimoiva suora ”kääntyy” kohti tangenttia ja ”rajalla” yhtyy siihen.

- Jos näin käy, myös approksimoivan suoran kulmakerroin eli erotusosamäärä ”lähestyy” tangentin kulmakerrointa.

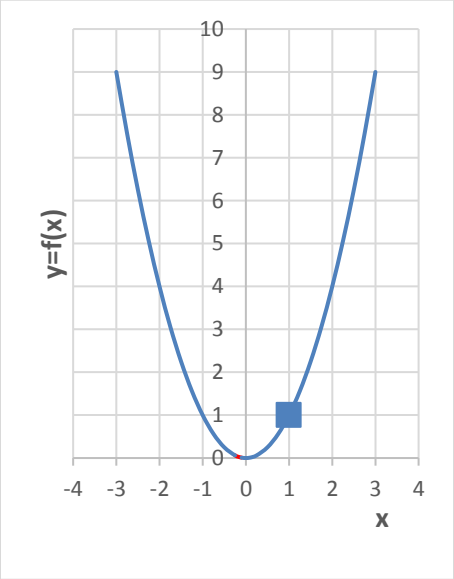
Esim. f: **R** → **R**, $f(x) = x^2$

Erotusosamäärä

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

pisteessä x=1 on

h	$\frac{(1+h)^2-1}{h}$
-1	1,000000000
-0,5	1,500000000
-0,1	1,900000000
-0,01	1,990000000
-0,001	1,999000000
-0,0001	1,999900000
-0,00001	1,999990000
-0,000001	1,999999000
0,0000001	**1,999999899**
0,0000001	**2,000000101**
0,000001	2,000001000
0,00001	2,000010000
0,0001	2,000100000
0,001	2,001000000
0,01	2,010000000
0,1	2,100000000
0,5	2,500000000
1	3,000000000



Kun h lähestyy nollaa,
erotusosamäärä
”näyttää lähestyvän” arvoa 2.

Silloin pisteen x=1 kohdalla tangentin kulmakerroin on (ilmeisesti) 2.

Derivaatan määritelmä perustuu tähän visuaaliseen mielikuvaan:

Olkoon funktio f määritelty pisteen x ympäristössä.

Jos erotusosamäärällä $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ on äärellinen raja-arvo, kun h → 0,

tätä raja-arvoa sanotaan funktion f **derivaataksi pisteessä x**, ja siitä käytetään merkintää f´(x).

Siis

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Jos funktiolla f on derivaatta kaikilla x ∈ (a,b), sanotaan, että f on derivoituva tällä välillä.

Derivaatasta käytetään f´(x):n sijasta käytetään myös merkintöjä

Df(x), $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, y´(x), y´

Esimerkkinä edellä käytetyn voittoa kuvaavan funktion

v(x) = -15.9**x²** + 889.7**x** – 4051.0 derivaatta

- voidaan johtaa edellisen määritelmän avulla, mutta

- se saadaan helpommin ”osiensa” avulla, joista eräs on:

Esim. (jatkoa) f: **R** → **R**, $f(x) = x^2$

Erotusosamäärä pisteessä x on

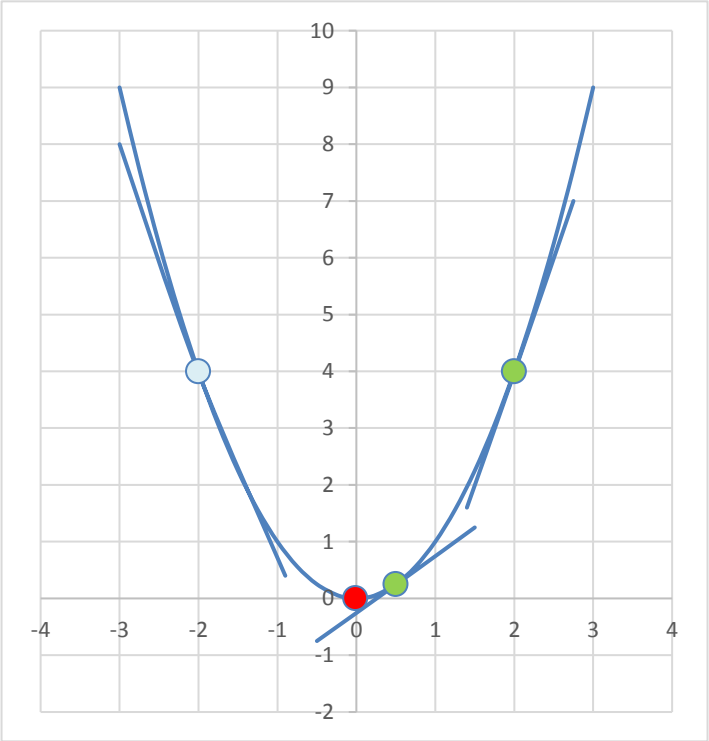
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h,$$

jolloin

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x$$

Kun x < 0,

niin **derivaatta** f´(x) < 0 ja **tangentti** on laskeva suora ja f vähenee



Esim. f´(-2) = -4 ja f´(-1) = -2

ja siis f:n vähenemisnopeus on 2-kertainen -2:n kohdalla.

Kun x = 0, niin **derivaatta** f´(0) = 0 ja f:n **tangentti** on x-akselin suuntainen suora ja f saa tässä minimiarvon.

Kun x > 0,

niin **derivaatta** f´(x) > 0 ja **tangentti** on nouseva suora ja f kasvaa.

Esim. $f'(0.5) = 1$ ja $f'(2) = 4$

ja siis f:n kasvunopeus on 4-kertainen 2:n kohdalla.

Derivaatta(-funktio) ja integraalifunktio:

Jos funktio g on f:n derivaatta ($g(x)=f'(x)$), funktiota f sanotaan

g:n **integraalifunktioksi** ja merkintänä käytetään

$$f(x) = \int g(x)dx$$

Esim. (jatkoa) f: **R** → **R**, $f(x) = x^2$ (**"taso"**)

ja derivaatta f´: **R** → **R**, $f'(x) = 2x$ (**"muutosnopeus"**).

Silloin

$$\int 2x\,dx = x^2 \qquad (= f(x))$$

on funktion f´: **R** → **R**, $f'(x) = 2x$ (eräs) integraalifunktio.

Siis

derivointi

”taso” → **“muutosnopeus”**

f(x) **f´(x)**

←

integrointi

Yleiset derivoituvuuden teoriatarkastelut sivuutetaan.

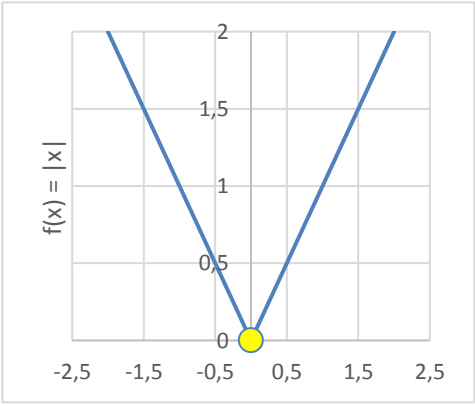
Voidaan mm. osoittaa, että

- jos f on derivoituva pisteessä x, se on myös jatkuva,

- mutta vaikka f olisi jatkuva, se ei ole välttämättä derivoituva.

Esim. Funktio

f:**R**→**R**, $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, \text{kun } x < 0 \\ x, \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$



on jatkuva, mutta ei derivoituva pisteessä x=0.

Myös funktioiden f:**R**→**R** derivoinnissa (eli derivaattafunktioiden f´ muodostamisessa) tarvittavien derivointisääntöjen johtaminen sivuutetaan.

Derivointisääntöjä

D1 Vakiofunktion derivaatta

Olkoon f:**R**→**R**, f(x) = a (vakio).

Silloin f´(x) = **Da = 0.**

f ei kasva eikä vähene. f:n muutosnopeus on nolla.

D2 Olkoon f:**R**→**R**, f(x) = x^n (n∈**N**)

Voidaan osoittaa (vastaavalla tavalla kuin aikaisemmassa esimerkissä erotusosamäärän raja-arvon avulla), että

$$f'(x) = Dx^n = n \cdot x^{n-1}$$

D3 Jos Funktio f on derivoituva pisteessä x ja a on vakio, niin

f:n arvot a-kertaistetaan

↓

$D(af(x)) = a \cdot f'(x)$ ← f:n muutosnopeus a- kertaistuu

D4 Summan derivointisääntö

Jos funktiot f ja g ovat derivoituvia pisteessä x, niin

$$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x) = f'(x) + g'(x)$$

↑ ↑

"kokonaismuutosnopeus" = "osamuutosnopeuksien summa"

Näiden sääntöjen avulla saadaan selville kaikkien **polynomifunktioiden**

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathbf{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}$ derivaatat.

Esim. (jatkoa) Luomuturnipsista saatava **voiton tason** yksikköhinnan yhteyttä kuvaavasta funktiosta

$v:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $v(x) = -15.9x^2 + 889.7x - 4051.0$

saadaan näiden sääntöjen avulla

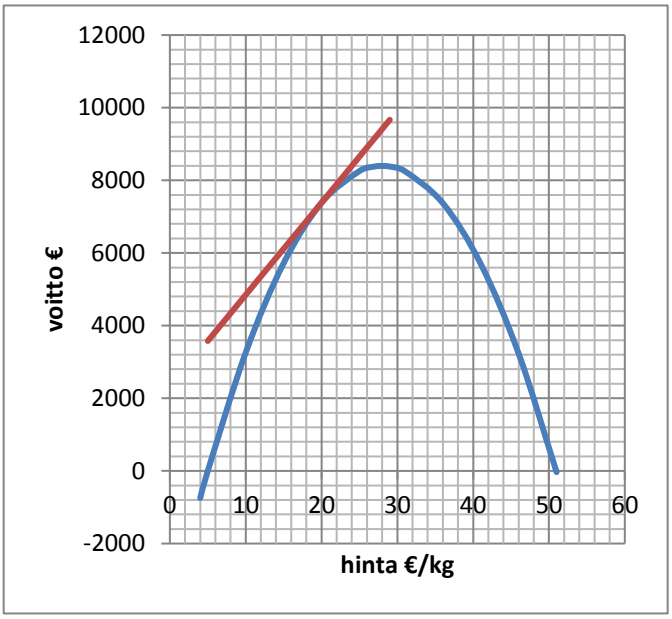
$$v'(x) = D(-15.9x^2 + 889.7x - 4051.0) = D(-15.9x^2) + D\,889.7x + D(-4051.0)$$
$$= -15.9Dx^2 + 889.7Dx + 0$$
$$= -15.9\cdot 2x + 889.7\cdot 1 = -31.8x + 889.7$$

yksikköhinnan x suuruuden ja voiton **muutosnopeuden** yhteyttä kuvaava funktio

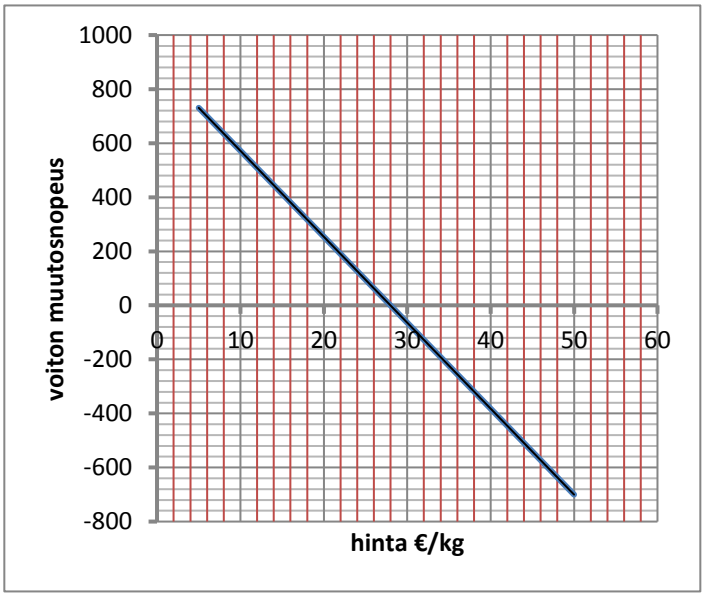
$v':\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $v'(x) = -31.8x + 889.7$

(Geometrisena sivutuotteena) derivaatan arvoista saadaan v:n kuvaajaa sivuavien tangenttien kulmakertoimet.

hinta x (€/kg)	"taso" voitto v(x) (€)	”muutosnopeus" v´(x)
4	**-746,6**	**762,5**
5	0	730,7
10	3256	571,7
15	5717	412,7
20	**7383**	**253,7**
25	8254	94,7
27	8379,8	31,1
28	**8395**	**-0,7≈ 0**
29	8378,4	-32,5
31	8249,8	-96,1
36	7371,8	-255,1
41	5698,8	-414,1
46	3230,8	-573,1
51	-32,2	-732,1



Voiton muutoksen ”nopeusmittari” v’(x)



- Esimerkiksi 4 €/kg hintatasolla voiton muutosnopeus

v'(4) = 762.5 on noin 3-kertainen verrattuna

muutosnopeuteen v'(20) = 253.7 hintatasolla 20 €/kg.

Derivaatan arvojen "auki lukeminen" vastaavasti kuin auton nopeusmittaria käytetään, perustuu derivaatan (enemmän tai vähemmän tarkkaan) approksimointiin erotusosamäärän avulla:

Määritelmän mukaan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} .$$

Kun lisäys h on "pieni",

niin $\frac{\mathbf{f(x+h)-f(x)}}{\mathbf{h}} \approx \mathbf{f'(x)}$, joten

muutosnopeus x:n muutos

↘ ↙

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$

↑

f:n muutos

Jos yhden yksikön lisäystä h=1 voidaan pitää ”pienenä”,

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \approx f'(x)$

ja tulkinta on juuri vastaava kuin auton nopeusmittarilla.

Esim. (jatkoa edelliseen) Tässä yksikköhinnan 1 yksikön (€/kg) ei ole aivan ”pieni”, ja derivaatta

- yliennustaa f:n kasvun, kun hinta $x < 28$ €/kg ja
- aliennustaa f:n vähenemisen, kun hinta $x > 28$ €/kg.

Vertaa kuvaajaan.

Kuitenkin esimerkiksi

$v'(4) = 762.5$ on melko hyvä approksimaatio voiton muutokselle,

kun hinta x kasvaa 4 €/kg → 5 €/kg (Vrt. taulukon arvoihin.)

Voiton **”tason”** $v(x)$ **muutosnopeus** $v'(x)$ **muuttuu**, kun yksikköhinta x kasvaa.

- Voitto v(x) kasvaa ja $v'(x) > 0$, mutta

kasvu on hidastuvaa ja kasvunopeus $v'(x)$ vähenee, kun yksikköhinta lähestyy arvoa $x \approx 28$.

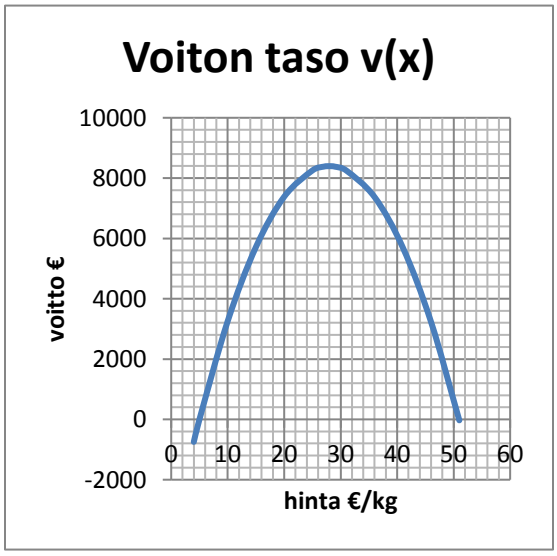
- Kun hinta on $x \approx 28$,

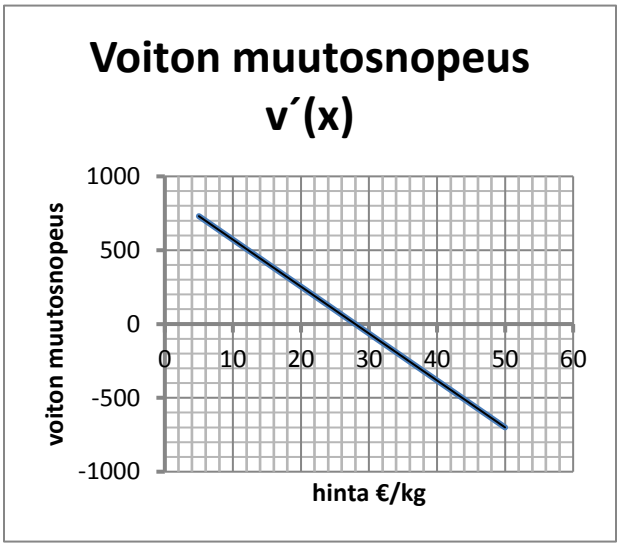
voitto v(x) saa maksimiarvon ja $v'(x) = 0$.

- Tämän jälkeen voitto v(x) vähenee ja $v'(x) < 0$,

ja väheneminen voimistuu ja vähenemisnopeus $v'(x)$

tulee ” aina vain negatiivisemmaksi”.





Funktion arvojen muutoksen **kiihtyvyyttä** mittaa:

Toinen derivaatta

Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteessä x.

Jos myös f´ on derivoituva pisteessä x, on

f´´(x) = Df´(x) **funktion f toinen derivaatta pisteessä x**.

Esim. (jatkoa) Yksikköhinnalla x (€/kg)

- voiton **tason**

v:$\mathbf{R^+ \rightarrow R}$, $v(x) = -15.9x^2 + 889.7x - 4051.0$

- **muutosnopeuden**

v':$\mathbf{R^+ \rightarrow R}$, $v'(x) = -31.8x + 889.7$

- **kiihtyvyys** on

$v'':\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $v''(x) = D(-31.8x + 889.7) = -31.8$

Siis tässä negatiivinen **kiihtyvyys** (hidastuvuus) on **tasaista**.

- Aluksi positiivinen kasvuvauhti $v'(x)$ pienenee tasaisesti 31.8 verran aina, kun hinta kasvaa 1 €/kg, kunnes

- maksimikohdassa $v'(27.98) = 0$ ja (hetkellisesti) voitto ei kasva eikä vähene.

- Tämän jälkeen voitto alkaa pienentyä ja vähenemisvauhti $v'(x)$ (<0) lisääntyy tasaisesti.

(Vrt. edellisiin kuvioihin)

Paikallisten (lokaalien) ääriarvojen määräämisestä

Esim. (jatkoa) Edellä nähtiin, että voittoa kuvaavalla funktiolla

$v:\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $v(x) = -15.9x^2 + 889.7x - 4051.0$

on **maksimi**, kun hinnaksi asetetaan x = 27.98 €/kg.

Tämän yksikköhinnan kohdalla

- derivaatta (muutosnopeus) v'(27.98) = 0 ja

- derivaatan arvot muuttuvat

positiivisista → negatiivisiksi
kasvu muuttuu vähenemiseksi)

Funktion f ääriarvokohdat saadaan selville tällä tavalla derivaatan f´ arvojen muutosten avulla:

Piste x_0 on funktion f **lokaali ääriarvopiste**, jos

$f'(x_0) = 0$ ja derivaatan f´ merkki muuttuu x_0:n ohi mentäessä.

x_0 on **minimipiste**, jos f'(x) muuttuu - → + , joten

minimipisteen x_0 ympäristössä f´ kasvaa (negatiivisesta positiiviseksi)

ja silloin myös (f´:n muutosnopeus) $f''(x_0) > 0$.

x_0 on **maksimimipiste**, jos f'(x) muuttuu + → - , joten

maksimipisteen x_0 ympäristössä f´ vähenee (positiivisesta negatiiviseksi)

ja silloin myös (f´:n muutosnopeus) $f''(x_0) < 0$.

Myös tätä ominaisuutta voidaan käyttää ääriarvon laadun (min vai max) tutkimiseen.

Esim. (jatkoa) Voiton muutosnopeutta kuvaavan derivaatan

v':$\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, v'(x) = -31.8x + 889.7

- nollakohta on x = 27.98 €/kg ja

- derivaatta v´(x) muuttuu positiivisesta negatiiviseksi (siis vähenee) pisteen x = 27.98 ohi kuljettaessa, joten tässä on maksimipiste.

- Toinen derivaatta on

$v''(x) = D(-31.8x + 889.7) = -31.8 < 0$,

siis v´(x) muuttuu posit.(v kasvaa) → 0 → negat.(v vähenee)

mikä myös kertoo ääriarvon laadun.

Huom. Funktion f muutos voi kuitenkin olla ”niin hidasta” ääriarvopisteessä x_0, että 2. derivaatta f´´ ei ”reagoi siihen” ja $f''(x_0) = 0$ eikä kerro ääriarvon laatua.

(Ks. esim. funktio f: **R** → **R**, $f(x) = x^4$.)

- 2. kertaluvun derivaatoilla on kuitenkin tärkeä merkitys usean muuttajan ääriarvotehtävissä. Tätä käsitellään myöhemmin.

D5. Yleisen **potenssifunktion derivointisääntö**

$\boldsymbol{Dx^a = a \cdot x^{a-1}}$ on sama kuin erikoistapauksessa D2.

Esim. (jatkoa) Kultakalakaviaarin kysyntää ja tarjontaa kuvaavat:

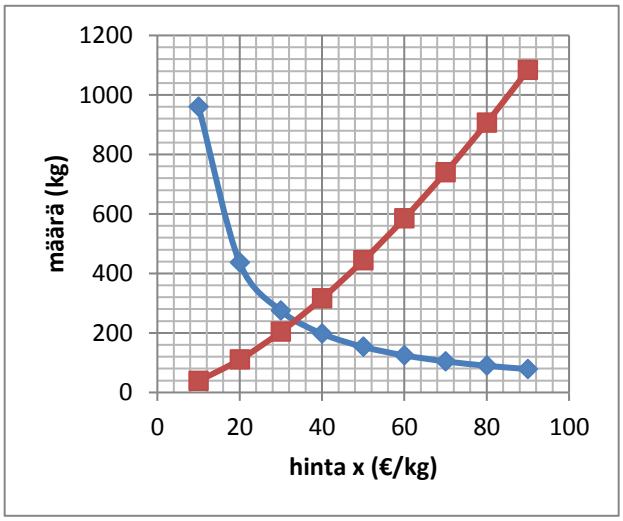
<u>kysyntä:</u> $f:\mathbf{R}^+\backslash\{0\} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 13262x^{-1.14}$

<u>tarjonta:</u> $g:\mathbf{R}^+\backslash\{0\} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 1.16x^{1.52}$

f(x)=kysyntä (kg), g(x)=tarjonta (kg) ja x=hinta (€/kg)

Kultakalakaviaarin kysyntä ja tarjonta

x	kysyntä	tarjonta
10	961	38
20	436	110
30	275	204
40	198	316
50	153	443
60	125	585
70	105	740
80	90	906
90	78	1084



Kuvaajien perusteella näyttää, että yksikköhinnan x kasvaessa

- tarjonta g kasvaa, jolloin **muutosnopeus** $g'(x) > 0$,

- ja kasvu on kiihtyvää, jolloin muutoksen **kiihtyvyys** $g''(x) > 0$.

Derivoimalla nähdään muutosten suunnan lisäksi, kuinka voimakkaita nämä ”muutospyrkimykset” ovat:

$g'(x) = D\ 1.16x^{1.52}$

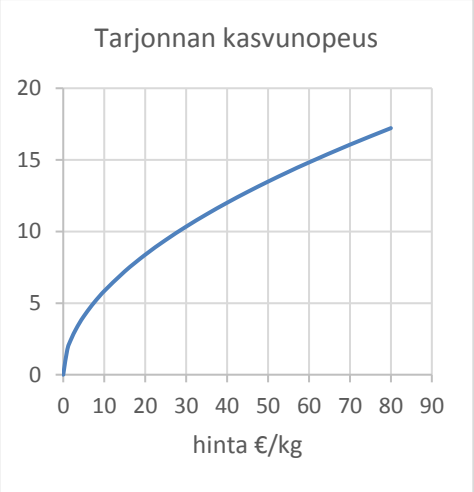
$= 1.16 \cdot 1.52\ x^{1.52-1}$

$= 1.7632x^{0.52}$

$g'(x) > 0,$

mikä sopii yhteen g:n tasosta

edellä havaitun kanssa.



Kasvunopeus $g'(x)$ suurenee eli kasvu kiihtyy, mutta kiihtyminen ”hiipuu” yksikköhinnan x kasvaessa.

Tarkemmin:

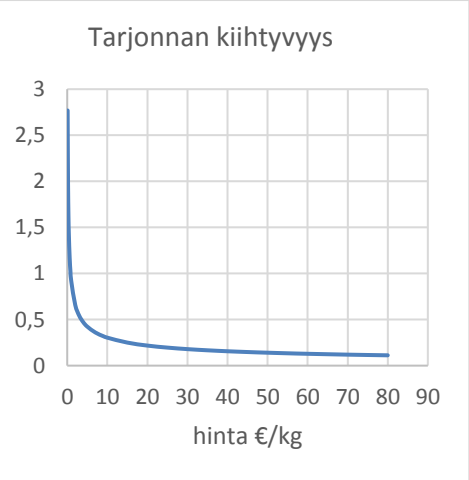
$g''(x) = D\ 1.7632x^{0.52}$

$= \ldots$

$= 0.9169x^{-0.48}$

Siis $g''(x)$ on positiivinen

mutta vähenevä.



- Kysynnän **taso** f taas vähenee, jolloin **muutosnopeus** $f'(x) < 0$.

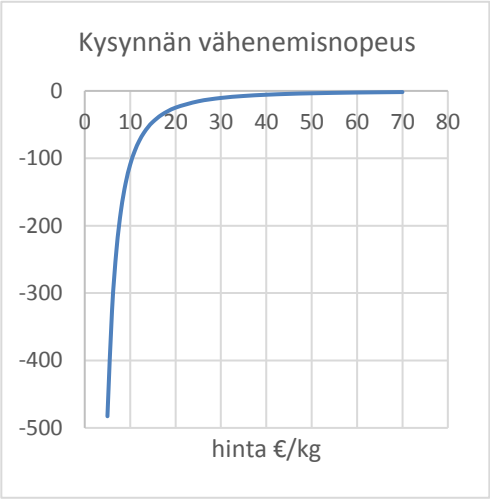
Tarkemmin:

$f'(x) = D\ 13262x^{-1.14}$

$= \ldots$

$= -\ 15118.68x^{-2.14}$

$f'(x) < 0,$



mikä sopii yhteen f:n tason
muutoksesta edellä havaitun kanssa.

Vähenemisnopeus $f'(x)$ kasvaa (ks. kuvaaja), joten väheneminen siis hidastuu,

→ f´ ”tulee vähemmän” negatiiviseksi.

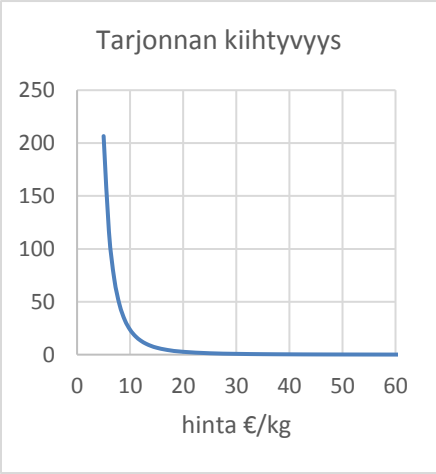
→ vähenemisen muutos eli **kiihtyvyys** $f''(x) > 0$. (!)

Taas 2. derivaatasta tämä näkyy tarkemmin:

$f''(x) = D(-15118.68x^{-2.14})$

$= \ldots$

$= + 32354x^{-3.14}$



Eksponenttifunktiolla f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$ ($a > 0$ vakio) on

D6 $\boldsymbol{Da^x = a^x \ln a}$ ja erityisesti $\boldsymbol{De^x = e^x}$

Logaritmifunktiolla f:$\mathbf{R}^+\backslash\{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ on

D7 $\boldsymbol{D \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$ ja $\boldsymbol{D \ln x = \frac{1}{x}}$

Edellisistä derivointisäännöistä:

- säännöt D1, D2, D5, D6 ja D7 esittävät, kuinka eräistä tärkeistä **perusfunktioista** f saadaan (niiden muutosnopeutta) kuvaavat derivaattafunktiot f´.

Tätä luetteloa voidaan vielä jatkaa, mutta tässä sivuutetaan mm. (jaksollisten ilmiöiden käsittelyssä tärkeät) trigonometriset funktiot.

- Säännöt D3 ja D4 ovat **yleisiä** funktioiden yhdistelmien **käsittelysääntöjä**. Tällaisia sääntöjä tarvitaan vielä muutama lisää:

Esim. Funktio polynomi ↘ ↙ potenssifunktio

t: **R** → **R**, $t(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} = (x^2 + 2x + 3)^{½}$

ei ole mitään ”perustyyppiä” eikä sille ole valmista derivointisääntöä.

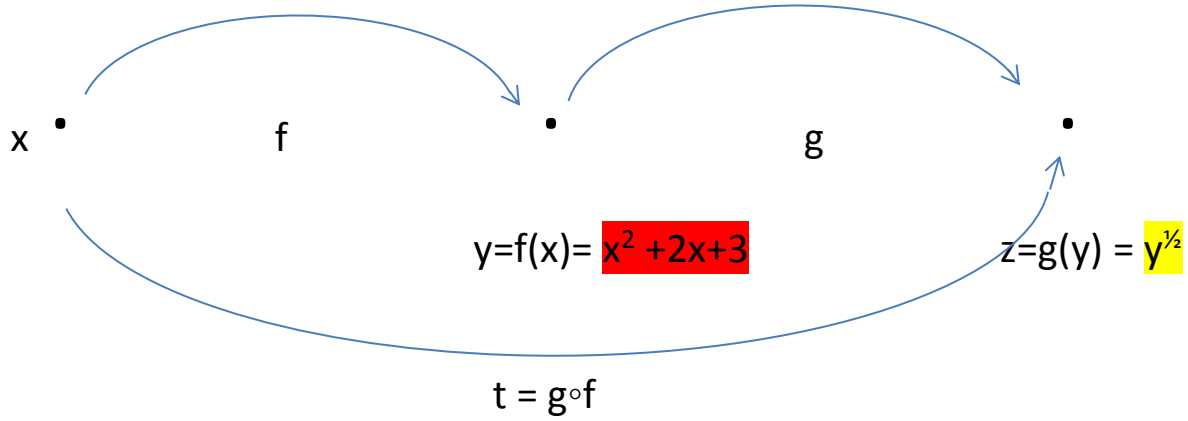
Tällaisten sääntöjen johtaminen lukemattomia erikoistapauksia varten ei myöskään ole tarkoituksenmukaista.

Tässä funktio t voidaan **hahmottaa yhdistettynä funktiona**, jonka osafunktioihin edelliset säännöt soveltuvat:

$t(x) = g \circ f(x)$ ($= g(y)$), kun

sisäfunktiona on $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$

ulkofunktiona on $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(y) = y^{1/2}$



Yhdistetyn funktion derivointisäännön

avulla sisäkkäisten funktioiden yhdistelmä, joka ei ole mitään perustyyppiä, voidaan hajottaa osafunktioiden käsittelyksi:

Jos (sisä)funktio $f: A \rightarrow B$ on derivoituva pisteessä x

ja (ulko)funktio g: $V_f \rightarrow C$ on derivoituva pisteessä y = f(x)

niin (voidaan osoittaa, että)

”kokonaismuutosnopeus” on ”osamuutosnopeuksien” tulo

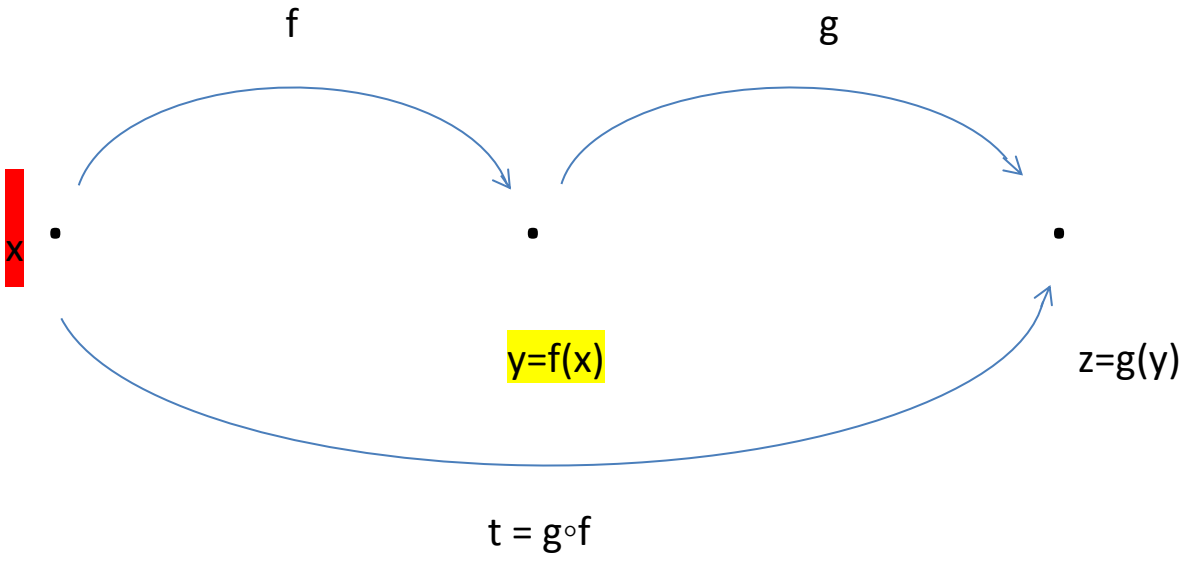
↓

D8. $D(g \circ f)(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$ $\quad (= f'(x) \cdot g'(y))$

↗ ↖

f: n muutos – nopeus x: ssä	g: n muutosnopeus f(x) = y : ssä

↙ ↓



$t = g \circ f$

Esim. (jatkoa) t: **R** → **R**, $t(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} = (x^2 + 2x + 3)^{½}$

Sisäfunktio f: **R** → **R**, $f(x) = x^2 + 2x + 3$ on **polynomifunktio** ja

$f'(x) = D(x^2 + 2x + 3) = 2x + 2$

Ulkofunktio g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(y) = y^{½}$ on **potenssifunktio** ja

$g'(y) = D\, y^{½} = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}}$

$t'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$ $\quad (= f'(x) \cdot g'(y) = (2x+2) \cdot \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}}\ )$

$= (2x+2) \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 3)^{-½}$

$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Sisäfunktion f arvosta käytetty (apu-)merkintä y ei ole välttämätön, mutta sen avulla voi helpottaa osien hahmottamista.

Tulon derivointisääntö

Esim. Härvelitehtaan tuotannon

määrän arvioitua kehitystä kuvaa malli f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 186400(x+1)^{0.54}$

ja **yksikköhinnan** kehitystä kuvaa g: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 3.47 \cdot 1.08^x$,

missä x = aika (v), f(x) = määrä (kpl) ja g(x) = hinta (€/kpl).

Silloin **tuotannon arvoa** (€) kuvaa funktio

v: $R^+ \rightarrow R^+$, $v(x) = f(x) \cdot g(x) = 186400(x+1)^{0.54} \cdot 3.47 \cdot 1.08^x$

Funktio v on

- potenssifunktion ja eksponenttifunktion tulo

- ja tuotannon arvon muutosnopeus x vuoden kohdalla v'(x) riippuu tietenkin sekä määrän f(x) että hinnan g(x) muutosnopeuksista jollain tavalla.

- Voidaan osoittaa, että tulomuotoisen funktion muutosnopeus voidaan hajottaa tekijöiden muutosnopeuksien yhdistelmäksi seuraavalla tavalla:

Jos funktiot f ja g ovat derivoituvia pisteessä x, niin

g(x)-kertaisena ↓ ↓ f(x)-kertaisena

D9. $Df(x)\cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

↗ Kokonais-muutos-nopeus

↑ f:n muutos-nopeus

↑ g:n muutos-nopeus

Esim. (jatkoa) Tuotannon arvon

$v(x) = f(x)\cdot g(x) = 186400(x+1)^{0.54} \cdot (3.47\cdot 1.08^x)$

muutosnopeus x vuoden kohdalla on

$v'(x) = Df(x)g(x) = \mathbf{f'(x)}g(x) + f(x)\mathbf{g'(x)}$

$= \mathbf{D[186400(x+1)^{0.54}]} \cdot (3.47 \cdot 1.08^x) + (186400(x+1)^{0.54}) \cdot \mathbf{D[(3.47 \cdot 1.08^x)]}$

$= [186400 \cdot (1+0) \cdot 0.54(x+1)^{0.54-1}] \cdot (3.47 \cdot 1.08^x)$

$+ (186400(x+1)^{0.54}) \cdot 3.47 \cdot 1.08^x \ln 1.08$

muutosnopeus	taso
↓	↓

taso	muutosnopeus
↓	↓

$= (100656(x+1)^{-0.46}) \cdot (3.47 \cdot 1.08^x) + (186400(x+1)^{0.54}) \cdot (0.26705 \cdot 1.08^x)$

$(= 1.08^x \left(\frac{349276}{(x+1)^{0.46}} + 49779\,(x+1)^{0.54}\right.$ jne.)

x	f'(x)	g(x)	f'(x)g(x)	f(x)	g'(x)	f(x)g'(x)	v'(x)
0	100656	3,47	**349276**	186400	0,26705	**49778**	**399054**
1	73176	3,7476	**274233**	271020,5	0,288414	**78166**	**352399**
5	44146	5,098568	**225081**	490509,7	0,392384	**192468**	**417549**
10	33404	7,49147	**250245**	680452,7	0,576541	**392309**	**642554**

Alussa määrän muutos “ruokkii” pääasiassa tuotannon arvon kasvua, mutta myöhemmin hinnan kasvupyrkimys tulee tärkeämmäksi.

Esim. (jatkoa) Kapakalan kysyntää kuvaa funktio

$f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72}$,
missä x= hinta (€/kg) ja f(x) = kysyntä (t).

Tuottajat tekevät kartellin. Mikä yksikköhinta maksimoi markkinoilta saatavan voiton, kun tuotantokustannukset ovat 5 €/kg?

Voiton suuruutta kuvaa funktio

$v:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $v(x) = f(x)(x-5) = 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72} \cdot (x-5)$

$v'(x) = D[1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72} \cdot (x-5)]$

$= D(1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72})(x-5) + 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72} \cdot D(x-5)$

$= 1400 \cdot (1.21 + 0) \cdot 0.87^{1.21x+1.72} \ln 0.87 (x-5) + 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1.72} \cdot 1$

$= 1400 \cdot 0.87^{1.21x+1} \cdot [1.21 \cdot \ln 0.87 (x-5) + 1]$

$= f(x) \cdot (-0.16851x + 1.84254)$.

Aina on $f(x) > 0$, joten $v'(x) = 0$ vain silloin, kun

$-0.16851x + 1.84254 = 0 \iff x = \frac{-1.84254}{-0.16851} \sim 10.93$ €

Derivaatan merkki muuttuu + → - , joten x = 10.93 on maksimipiste.

Maksimivoitto on v(10.93) ∼ 1036 (1000) €.

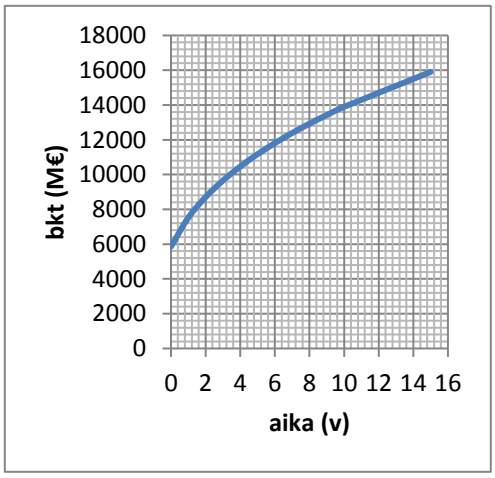
Osamäärän derivointisääntö

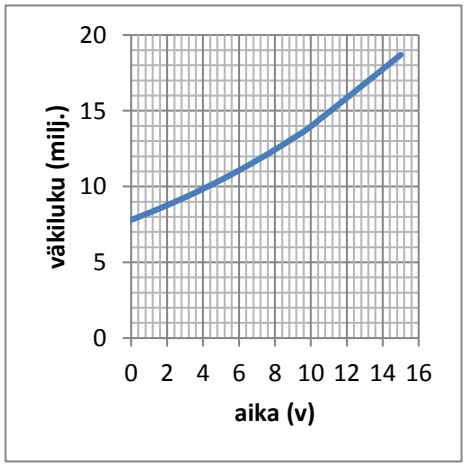
Esim. Kehitysmaassa arvioidaan, että bkt ja väkiluku kehittyvät seuraavalla tavalla:

Bkt: $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = 5860(x+1)^{0.36}$ ja

Väkiluku: $g: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $g(x) = 7.8 \cdot 1.06^x$, missä

x = aika (v), f(x) = bkt (M€) ja g(x) = väkiluku (milj.)





Bkt:n arvoa asukasta kohti (€/as.) kuvaa näiden suhde

$$s: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+, \quad s(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5860(x+1)^{0.36}}{7.8 \cdot 1.06^x}$$

Tällaiselle potenssifunktion ja eksponenttifunktion osamäärälle ei ole ”omaa” derivointisääntöä, mutta myös tämä ”hajoaa” osiin:

Jos funktiot f ja g ovat derivoituvia pisteessä x ja $g(x) \neq 0$, niin

D10. $$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Esim. (jatkoa) Osamäärän derivointisäännöllä saadaan (absoluuttinen) muutosnopeus:

$$s'(x) = D\frac{5860(x+1)^{0.36}}{7.8 \cdot 1.06^x}$$

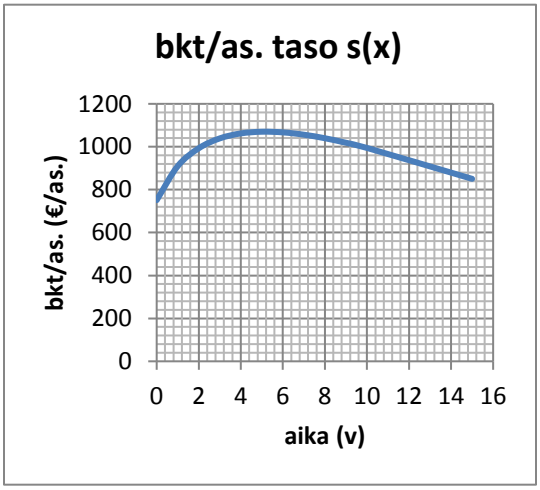
$$= \frac{[\mathbf{D5860(x+1)^{0.36}}](7.8 \cdot 1.06^x) - (5860(x+1)^{0.36})[\mathbf{D7.8 \cdot 1.06^x}]}{(7.8 \cdot 1.06^x)^2}$$

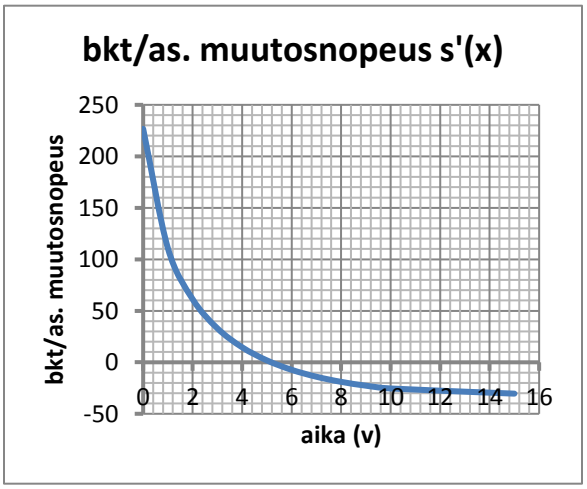
$$\frac{[\mathbf{5860(1+0)\cdot 0.36(x+1)^{0.36-1}}](7.8\cdot 1.06^{x})-(5860(x+1)^{0.36})[\mathbf{7.8\cdot 1.06^{x}ln1.06}]}{(7.8\cdot 1.06^{x})^{2}}$$

$$= \frac{(7.8\cdot 1.06^{x})(2109.6(x+1)^{-0.64}-341.5(x+1)^{0.36})}{(7.8\cdot 1.06^{x})^{2}} \cdot \frac{(x+1)^{0.64}}{(x+1)^{0.64}} \quad (\leftarrow \text{lavennus})$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{1768.1-341.5x}{7.8\cdot 1.06^{x}\cdot(x+1)^{0.64}}$$





Alussa bkt/as. kasvaa voimakkaasti, mutta myöhemmin eksponentiaalisesti voimistuva väestön kasvu ”voittaa” bkt:n volyymin hitaan kasvun.

Suhteellinen muutosnopeus

Esim. (jatkoa) Tuotannon määrän arvioitua kehitystä kuvaa malli

$f: R^+ \rightarrow R^+$, $f(x) = 186400(x+1)^{0.54}$, missä x = aika (v) ja f(x) = määrä (kpl).

Tuotetun määrän **”tason”** arvio esim. 5 vuoden kuluttua on

$f(5) = 186400\ (5+1)^{0.54} \approx 490510$ kpl.

Derivaatta

$f'(x) = D(186400(x+1)^{0.54}) =$ … (edellä) $= 100656(x+1)^{-0.46}$

mittaa määrän **absoluuttista muutosnopeutta**.

Esim. $f'(5) = 44146$ kertoo (hyvin karkean arvion), että mallin mukaan

ajan x muuttuessa yhden yksikön 5 v. → 6 v. (absoluuttinen muutos)

tuotettu määrä f(x) kasvaa ≈ 44000 kpl. (absoluuttinen muutos)

Vastaava määrän f(x) **suhteellinen muutos** on (likimain)

$\frac{44146\ \text{kpl}}{490510\ \text{kpl}}$ (= $\frac{f'(x)}{f(x)}$) = 0.09,

eli

ajan x muuttuessa yhden yksikön 5 v. → 6 v. (absoluuttinen muutos)

tuotannon määrä f(x) kasvaa ≈ 9 % (suhteellinen muutos)

Siis funktion f arvojen **suhteellista muutosnopeutta** arvon x kohdalla

↙ f:n absoluuttinen muutosnopeus

mittaa suhde $\frac{f'(x)}{f(x)}$

↖ f:n taso

kun f on derivoituva x:ssä ja f(x) > 0.

Samaan rakenteeseen päädytään myös toisella tavalla logaritmimuunnoksen avulla:

Oletetaan, että funktio f: A → B derivoituva pisteessä x ja y = f(x) > 0.

Kun tähän yhdistetään ulkofunktioksi

funktio g: $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, g(y) = ln y,

yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla saadaan funktiolle

g∘f : A → **R**, g∘f(x) = lnf(x)

s.f.

↓ ↓ ↙ f:n absoluuttinen muutosnopeus

$$D\,\ln f(x) = f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

↑ ↑ ↖ f:n ”taso”

u.f.

= funktion f **suhteellinen muutosnopeus** pisteessä x.

Esim. (jatkoa) Tuotteiden yksikköhinnan arvioitua kehitystä kuvaa malli

g: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 3.47 \cdot 1.08^x$, missä x = aika (v) ja g(x) = hinta (€/kpl).

Mallin mukaan esim. 5 vuoden kuluttua on

$g(5) = 3.47 \cdot 1.08^5 = 5.099$ €/kpl.

Yksikköhinnan **absoluuttista muutosnopeutta** mittaa derivaatta

$g'(x) = D(3.47 \cdot 1.08^x) = 3.47 \cdot 1.08^x \ln 1.08 = 0.2675 \cdot 1.08^x$

Esim. $g'(5) = 0.392$ kertoo (karkean arvion), että mallin mukaan

ajan x muuttuessa yhden yksikön 5 v. → 6 v. (abs. muutos)

yksikköhinta g(x) kasvaa ≈ 0.392 €/kpl. (abs. muutos)

Vastaava yksikköhinnan g(x) **suhteellinen muutosnopeus** on

$$\text{Dlng}(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3.47 \cdot 1.08^x \ln 1.08}{3.47 \cdot 1.08^x} = \ln 1.08$$

$$= 0.077 \qquad \left(= \frac{0.392\ €/\text{kpl}}{5.099\ €/\text{kpl}}\right)$$

Siis

ajan x muuttuessa yhden yksikön 5 v. → 6 v. (**absoluuttinen** muutos)

yksikköhinta g(x) kasvaa ≈ 7.7 ≈ 8 % (**suhteellinen** muutos)

Tässä on samantekevää, määrätäänkö suhteellinen muutosnopeus ”suoraan” absoluuttisen muutosnopeuden g´(x) ja tason g(x) suhteena, tai logaritmimuunnoksen kautta.

Jälkimmäisen tavan avulla saadaan kuitenkin logaritmifunktion hyvät ominaisuudet avuksi joidenkin useista muutoksista koostuvien ”yhdistelmien” muutosnopeuden tutkimiseen:

Tulon derivointisäännön tulkinnasta

Esim. (jatkoa)

Tuotannon määrä: f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 186400(x+1)^{0.54}$

Yksikköhinta: g: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 3.47 \cdot 1.08^x$,

missä x = aika (v) ja g(x) = hinta (€/kpl).

Tuotannon arvoa (€) kuvaa funktio

v: $R^+ \rightarrow R^+$, $v(x) = f(x) \cdot g(x) = (186400(x+1)^{0.54}) \cdot (3.47 \cdot 1.08^x)$

Tulon derivointisäännön avulla saatiin selville tuotannon arvon **absoluuttinen kasvunopeus v´(x)**, mutta määrän f(x) ja yksikköhinnan g(x) ”kasvupyrkimysten” merkitys kokonaisuudelle jää melko hämäräksi.

Kun kasvua tarkastellaan **suhteellisen muutosnopeuden** näkökulmasta, rakenne yksinkertaistuu:

Tuotannon arvon suhteellinen muutosnopeus on

$$Dlnv(x) = D[\ln(f(x) \cdot g(x)] = D[\ln f(x) + \ln g(x)]$$

$$= Dlnf(x) + Dlng(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{186400 \cdot 0.54(x+1)^{0.54-1}}{186400 \cdot (x+1)^{0.54}} + \frac{3.47 \cdot 1.08^{x} \ln 1.08}{3.47 \cdot 1.08^{x}}$$

$$= \quad 0.54(x+1)^{-1} \qquad + \qquad \ln 1.08$$

↑ määrän	ja	yksikköhinnan ↑
suhteelliset kasvunopeudet		

Siis tuotannon arvon v(x) = f(x)·g(x) suhteellinen muutosnopeus hajoaa tekijöidensä suhteellisten muutosnopeuksien summaksi.

Näiden vaikutusten merkitys näkyy näin paljon selvemmin kuin tulon derivointisäännön avulla saatavasta absoluuttisesta muutosnopeudesta:

- Alussa on

$Dlnv(0) = 0.54(0+1)^{-1} + \ln 1.08 = \mathbf{0.540} + \mathbf{0.077} = 0.617 = 61.7\ \%$,

- 5 vuoden kuluttua

$Dlnv(5) = \mathbf{0.09} + \mathbf{0.077} = 0.167 = 16.7\ \%$ ja

- 10 vuoden kuluttua on

$Dlnv(10) = \mathbf{0.049} + \mathbf{0.077} = 0.216 = 12.6\ \%$

Alussa tuotannon arvon suhteellista kasvunopeutta ”ruokkii” voimakkaammin volyymin muutos,

mutta myöhemmin taas yksikköhinnan ”muutospyrkimys”.

Vastaavalla tavalla yksinkertaistuu:

Funktioiden osamäärän derivaatan tulkinta

Esim. (jatkoa) Bkt:n ja väkiluvun kehitystä kuvaavat:

Bkt: f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 5860(x+1)^{0.36}$ ja

Väkiluku: g: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 7.8 \cdot 1.06^x$, missä

x = aika (v), f(x) = bkt (M€) ja g(x) = väkiluku (milj.)

Bkt:n arvoa asukasta kohti (€/as.) kuvaa funktio

s: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $s(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5860(x+1)^{0.36}}{7.8 \cdot 1.06^x}$

Funktion s **absoluuttinen muutosnopeus** s´ laskettiin edellä osamäärän derivointisäännön avulla.

Tässä kuitenkin bkt:n ja väkiluvun keskenään kilpailevien

”kasvupyrkimysten” vaikutuksen vertailu on vielä vaikeampaa kuin tulomuotoisella funktiolla.

Sen sijaan s:n **suhteellinen muutosnopeus** x:n vuoden kuluttua Dlns(x) hajoaa helposti hahmotettaviin osiin:

$$\text{Dlns}(x) = \text{Dln}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{D}[\ln f(x) - \ln g(x)]$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{0.36}{x+1} - \ln 1.06$$

↑

Bkt:n ja väkiluvun ”kasvupyrkimykset” ”kilpailevat” keskenään.

- Alussa Dlns(0) = Dlnf(0) – Dlng(0)

$$= \frac{0.36}{0+1} - \ln 1.06$$

$$= \mathbf{0.360} - \mathbf{0.058} = 0.302$$

ja (karkea) arvio vuoden bkt/as. kasvusta on yli 30 %.

- 3 vuoden kuluttua Dlns(3) = **0.090** - **0.058** = 3.2%

ja tämän mukaan bkt/as. kasvaisi seuraavan vuoden aikana vielä n. 3 %.

- 10 vuoden kuluttua Dlns(10) = **0.033** - **0.058** = -2.5%

ja väestön voimakas kasvu on jo ”voittanut” hiipuvan bkt:n kasvun ja bkt/as. vähenee.

- Funktion f **derivaatan arvo** f´(x) on likimääräinen vastaus

kysymykseen:

Kuinka suuri on f:n arvon y= f(x) **absoluuttinen** muutos,

jos x:n arvo muuttuu x → x+1 (”pieni” **absoluuttinen** muutos)?

- **Suhteellinen muutosnopeus** $\mathrm{Dlnf}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ taas vastaa kysymykseen:

Kuinka suuri on f:n arvon y= f(x) **suhteellinen** muutos,

jos x:n arvo muuttuu x → x+1 (”pieni” **absoluuttinen** muutos).

Jousto

- Joskus funktioiden kuvaamien ilmiöiden muutosnopeutta kannattaa tarkastella niin, että sekä selittäjän x arvon että selitettävän y= f(x) arvon **muutos on suhteellinen**:

Esim. Alkoholipolitiikan tueksi on Suomessa tutkittu paljon alkoholin hinnan (x) muutosten vaikutusta kulutuksen määrään (y).

Alkoholin kokonaiskulutuksen ”juomakorissa” on hyvin monia eri juomia ja on luontevaa mitata ”kokonaishinnan” (x) muutosta suhteellisena muutoksena hintaindeksin avulla.

Myös kulutuksen (y) muutoksen mittaaminen prosentteina on luontevaa. Siis halutaan vastaus kysymykseen:

Kuinka monta % kulutus (y) muuttuu, jos hintataso (x) nousee 1 %:n?

Funktion f **jousto** vastaa (likimain) tällaiseen kysymykseen:

Kuinka monta % funktion arvo y = f(x) muuttuu (**suhteellinen muutos**),

jos x kasvaa 1 % verran (**suhteellinen muutos**)?

Funktion f **derivaatta** pisteessä x

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

on funktion arvon ja x:n arvon **absoluuttisten muutosten** suhteen raja-arvo.

Funktion f **jousto Ef(x)** pisteessä x on vastaavien **suhteellisten muutosten** raja-arvo:

$$Ef(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}}{\frac{h}{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{x}{f(x)}\right]$$

$$= \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \cdot \frac{x}{f(x)}$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

Esim. (jatkoa) Kultakalakaviaarin kysyntää kuvaa funktio

$f:\mathbf{R}^+\backslash\{0\} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 13262x^{-1.14}$

f(x)=kysyntä (kg) ja x=hinta (€/kg)

Kysynnän hintajousto on

$$Ef(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

$$= \frac{D13262x^{-1.14}}{13262x^{-1.14}} \cdot x$$

$$= \frac{13262 \cdot (-1.14) \cdot x^{-1.14-1}}{13262x^{-1.14}} \cdot x$$

= -1.14 (= eksponentti a)

Siis kaikilla hintatasoilla x (!)

x:n kasvaessa 1 %:n verran kysyntä f(x) vähenee noin 1.14 %.

Esim. (jatkoa) Härvelien yksikköhinnan kehittymistä ennakoi funktio

g: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 3.47 \cdot 1.08^x$, missä x = aika (v) ja g(x) = hinta (€/kpl).

g:n jousto on

$$Eg(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot x$$

$$= \frac{3.47 \cdot 1.08^x \cdot \ln 1.08}{3.47 \cdot 1.08^x} \cdot x$$

$$= x \cdot \ln 1.08$$ (suoraan verrannollinen x:n arvoon)

Tällaisessa tilanteessa jousto ei ole kovin selkeä muutosnopeuden mittari:

Esim. $Eg(1) = 1 \cdot \ln 1.08 = 0.077$ ja $Eg(10) = 0.77$, joten mallin mukaan

1 % lisää aikaa 1 vuoteen ($\approx$ 4 vrk) → hinta kasvaa likimain 0.077 % ja

1 % lisää aikaa 10 vuoteen ($\approx$ 37 vrk) → hinta kasvaa likimain 0.77 %.

?