Nimi:

Opiskelijanumero:

Harjoitusryhmä:

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Todistustäydennys 5T
Aiheet: Täydellisyys (MC-monisteet, Väisälä 12)

Palauta tämä paperi yhdessä muiden palautettavien tehtävien kanssa viimeistään seuraavana tiistaina klo 12.15 mennessä. Kukin tehtävä arvostellaan asteikolla 0–3. Näitä papereita jaetaan luennolla ja luennoitsijan toimiston M227 viereisessä riippukansiossa. Voit myös tulostaa tehtävät MC-sivulta.

1. Tässä tehtävässä todistetaan luentokalvojen lauseen 9.4 kohta 4:
   Lause. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin A on suljettu osajoukko $\Leftrightarrow$ A on täydellinen aliavaruus.

   Huom: Aliavaruuden täydellisyydestä puhuttaessa raja-arvon täytyy kuulua joukkoon A (eikä pelkästään ympäröivään avaruuteen X).

   Todistus. $\underline{\Rightarrow}$: Olkoon $A \subset X$ suljettu osajoukko ja (a_n) Cauchy-jono aliavaruudessa A. Tällöin (a_n) on Cauchy-jono myös avaruudessa

   $$_____,$$

   joten se

   $$_____ \text{ kohti jotakin raja-arvoa } _____ \in _____.$$

   Koska A on suljettu, niin lauseen 7.2 nojalla raja-arvolle pätee

   $$_____.$$

   Tästä seuraa, että A on täydellinen aliavaruus.

   $\underline{\Leftarrow}$: (Monta eri tapaa, tässä yksi) Oletetaan, että A on täydellinen ja osoitetaan, että $\partial A \subset A$. Olkoon $x \in \partial A$. Tällöin jokaisella $n \in \mathbf{N}$ on olemassa piste $a_n \in A$, jolle

   $$a_n \in B(_____, 1/n).$$

   Selvästi

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = _____.$$

   Koska suppeneva jono on Cauchy-jono ja A on täydellinen, niin aliavaruuden A Cauchy-jonon (a_n) raja-arvo

   $$x \ _____.$$

   Tästä seuraa, että $\partial A \subset A$, joten $A = A \cup \partial A = \overline{A}$ on suljettu. $\square$

   Käännä!

2. Tässä kohdassa käydään läpi esimerkki, joka osoittaa: Täydellisyyden määritelmässä ei riitä tutkia vain jonon kahden peräkkäisen termin välistä etäisyyttä $d(x_{n+1}, x_n)$, vaan täytyy tarkastella kaikkia etäisyyksiä $d(x_n, x_k)$, $k, n \geq n_0$.

   Perustelu. Tarkastellaan reaaliakselin jonoa (x_n), joka muodostuu harmonisen sarjan osasummista:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   Diff-int-1-kurssin tietojen perusteella jono (x_n)

$$\underline{\hspace{6cm}}.$$

   Koska $\mathbf{R}$ on täydellinen, niin (x_n) ei voi olla Cauchy-jono. Osoitetaan, että se kuitenkin toteuttaa seuraavan ehdon: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_0 \in \mathbf{N}$, että

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_0.$$

   Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Koska

$$|x_{n+1} - x_n| = \underline{\hspace{3cm}},$$

   niin ehto $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ on voimassa arvoilla

$$n > \underline{\hspace{3cm}}.$$

   Luvuksi n_0 voidaan siis valita jokin oikean puolen reaalilukua suurempi luonnollinen luku, jolloin ehto toteutuu arvoilla $n \geq n_0$.