

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Laskuharjoitus 5P viikolla 6 (6.–8.2.)

Aiheet: Funktiojonot, täydellisyys, kompaktius (MC-moniste 79–95, Väisälä 11–12)

Tehtävät 3 ja 4 on tarkoitus laskea ennen omaa harjoitusryhmää ja lasketut tehtävät merkitään listaan. Assistentti valitsee yhden (tai useamman, jos a-b-...-kohtia) opiskelijan esittämään jomman kumman (satunnaisesti valitun!) tehtävän taululla, ja esittää itse toisen tehtävän ratkaisun.

Loppuajan voi käyttää palautettavien tehtävien laskemiseen. Ne palautetaan kirjallisesti laskutupaa Y190c vastapäätä olevaan lokeriin seuraavaan tiistaihin klo 12.15 mennessä. Myös todistustäydennysten 5T palautuksen takaraja on sama.

3. (Loppukoe 2017) Määritellään $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ asettamalla $f_n(x) = n \sin(x/n)$, kun $x \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbf{N}$.
a) Määritä funktiojonon (f_n) rajafunktio $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

- b) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti välillä $[0, 1]$ kohti funktiota f ?

Vihje: sin-funktion 1. asteen Taylor-polynomi tai L'Hospitalin sääntö auttaa tilanteen hahmottamisessa. Maksimointi/supremointi täytyy (?) tehdä derivaatan tai Taylorin kaavan avulla.

4. Yhtälöllä $\tan x = 1/x$ on yksikäsitteinen ratkaisu (hahmottele kuvaajat!) välillä $x \in]0, \pi/2[$ ja se voidaan muuntaa kiintopisteyhtälöksi $f(x) = x$ (ainakin kahdella eri tavalla).
a) Kumpi tapa johtaa suppenevaan kiintopisteiteraatioon, kun alkuarvona on $x_0 = 1$? (Määrittely/maali joukoista ei tarvitse tässä tehtävässä välittää).
b) Määritä ratkaisun kaksidesimaalinen likiarvo kiintopisteitoinnin avulla.
Lisätieto: Jos funktiolla f on käänteisfunktio, niin kiintopisteessä $f(a) = a$ on myös $f^{-1}(a) = a$, mutta kaavan

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

perusteella vain jompi kumpi luvuista $|f'(a)|$ tai $|(f^{-1})'(a)| = 1/|f'(a)|$ voi olla < 1 ja johtaa kontraktioon kiintopisteen a lähellä.

5. Olkoon $f_n(x) = x^n$, kun $0 \leq x \leq 1$ ja $n \in \mathbf{N}$.
 a) Osoita (määritelmän perusteella), ettei (f_n) ole Cauchy-jono avaruudessa $C([a, b])$, kun normina on $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

Vihje: Riittää tutkia Cauchy-jonon määritelmässä tapausta $k = 2n$ ja maksimoida erotus $x^n - x^{2n}$.

- b) Osoita, että (f_n) on Cauchy-jono avaruudessa $C([a, b])$, kun normina on $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$.

Lisätietoja: Avaruus $C([a, b])$ on täydellinen a-kohdan normilla, muttei b-kohdan normilla varustettuna. Lisäksi suppeneminen a-kohdan normissa on yhtäpitävää tasaisen suppenemisen kanssa, joten (f_n) ei voi olla Cauchy-jono, koska sen pisteittäinen raja-funktio on epäjatkuva (luennot). Sen sijaan b-kohdan normissa (f_n) suppenee kohti nollafunktiota, joten epätäydellisyyden osoittamiseen tarvitaan monimutkaisempi esimerkki.

6. Tarkastellaan jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden avaruutta $C([0, 1])$, jossa on max-normin määräämä metriikka

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

Osoita, ettei suljettu yksikkökuula $\overline{B}(\overline{0}, 1)$ ole kompakti.

Vihje: Konstruoi jono (f_n) , jolle $\|f_n\|_\infty \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja

$$\|f_k - f_n\|_\infty \geq 1$$

aina, kun $k \neq n$. Tällaisella jonolla ei voi olla suppenevaa osajonoa. Yksi idea voisi olla luento-esimerkin (Luento 7+, s. 7) $1/n$ -piikkijonon muokkaaminen. Havainnollinen kuva ilman kaavoja riittää.

7. a) Todista lauseen 8.9 (luentokalvo 86) Weierstrassin M -testi: Jos $I \subset \mathbf{R}$ on väli ja $g_k: I \rightarrow \mathbf{R}$ ovat jatkuvia funktioita, joille $|g_k(x)| \leq M_k$ kaikilla $x \in I$ ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ suppenee, niin summafunktio

$$f: I \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

on jatkuva.

Vihje: Osasummien tasainen suppeneminen tai alkeellinen päättely:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \sum_{k=1}^n (g_k(x) - g_k(y)) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(y) \right| \\ &\leq \dots < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \end{aligned}$$

kun $|x - y| < \delta$ ja n on valittu sopivalla tavalla. Äärellisten summien jatkuvuus voidaan olettaa tunnetuksi ja suppenevan sarjan jäännöstermi lähestyy nollaa indeksiin kasvaessa.

b) Osoita a-kohdan avulla, että Fourier-sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}$$

summafunktio on jatkuva joukossa $\mathbf{R}$.

Lisätieto: Tämä liittyy funktion $f(x) = x(\pi - x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, parillisen 2π -jaksollisen jatkeen Fourier-sarjaan, jonka avulla voidaan laskea sarjan $\sum 1/k^2$ summa (sijoittamalla $x = 0$).

