ELEC-C3210 Materiaalien ominaisuudet **3.harjoitus, malliratkaisut**

1. a) Kohdistetaan esim. kuution muotoiseen kappaleeseen yhdestä suunnasta voima $-F_x$ (puristus). Tällöin pituuden suhteellinen muutos puristuksen suunnassa on $\varepsilon_x = \sigma_T / Y$, $\sigma_T = -F_x / A$ ja kahdessa sitä vastaan kohtisuorassa suunnassa $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \sigma_T / Y$. Kun kuutioon kohdistetaan sama voima jokaiselta suunnalta, on pituuden muutos $\varepsilon = \sigma_T/Y - \nu\sigma_T/Y - \nu\sigma_T/Y = (1-2\nu)\sigma_T/Y$ ja jännitys, joka tarvitaan muutoksen ε aikaansaamiseksi on $\sigma_T = \dfrac{Y\varepsilon}{1-2\nu}$. Jos alkutilavuus on $V_i = a^3$, missä a on kuution sivun pituus, niin lopputilavuus on $V_f = [a(1+\varepsilon)]^3 = a^3(1+3\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3) \approx a^3(1+3\varepsilon)$, koska ε on pieni. Tällöin tilavuuden muutos on $\Delta V = V_f - V_f = 3\varepsilon a^3$ ja tilavuuskimmokerroin on määritelmän mukaan $B = -\dfrac{\Delta p}{\Delta V/V} = -\dfrac{-\sigma_T}{3\varepsilon} = \dfrac{1}{3\varepsilon}\dfrac{Y\varepsilon}{1-2\nu} = \dfrac{1}{3}\dfrac{Y}{1-2\nu}$.
   b) Jos $\nu > 0{,}5$, niin pituuden muutos $\varepsilon = (1-2\nu)\sigma_T/Y$ olisi eri merkkinen kuin σ_T eli esim. puristettaessa kappaletta sen pituus kasvaisi.
   c) Kokoonpuristuvuus $\kappa = \dfrac{1}{B} = 3\dfrac{1-2\nu}{Y} = 1{,}9\times10^{-11}$ Pa^{-1}.

2. Merkitään jääkerroksen paksuutta ajan hetkellä t x:llä. Tällöin lämpövirta jään läpi (vedestä ilmaan päin) on $H = \dfrac{dQ}{dt} = kA\dfrac{\Delta T}{x}$ pinta-alaa A kohden. Ajassa dt jääkerros paksunee dx:n verran. Pinta-alaa A kohden jäätyy ajassa dt vettä $dm = \rho_{jää} A\,dx$, josta vapautuu lämpömäärä $dQ = dm\,L_f = \rho_{jää} A L_f\,dx$, jonka täytyy olla yhtä suuri kuin jään läpi ajassa dt johtuva lämpö $dQ = H\,dt \;\Rightarrow\; \rho_{jää} A L_f\,dx = kA\dfrac{\Delta T}{x}dt$. Separoidaan muuttujat: $dt = \dfrac{\rho_{jää} L_f}{k\Delta T}x\,dx \;\Rightarrow\; \int_0^t dt = \dfrac{\rho_{jää} L_f}{k\Delta T}\int_0^x x\,dx \;\Rightarrow\; t = \dfrac{\rho_{jää} L_f}{2k\Delta T}x^2$. a) $t = 6{,}0 \times 10^5$ s = 6,9 vrk. b) $t = 9{,}6\times10^8$ s $\approx$ 30 vuotta.

3. Säiliön tilavuuden muutos on $dV_{teräs} = \beta_{teräs} V_0\,dT$ ja elohopean tilavuuden muutos on $dV_e = \beta_e V_0\,dT$, jolloin efektiivinen tilavuuden muutos on $dV_{eff} = dV_e - dV_{teräs} = (\beta_e - \beta_{teräs})V_0\,dT$. Hooken laki tilavuusjännityksen (paineen) tapauksessa on $dp = -B_e\dfrac{dV}{V_0} = -\dfrac{1}{k_e}\dfrac{dV}{V_0}$, missä k_e on elohopean kokoonpuristuvuus $\Rightarrow$ $dV = -k_e V_0\,dp$. Tilavuuden muutosten täytyy kompensoida toisensa eli
   $dV_{tot} = dV + dV_{eff} = -kV_0\,dp + (\beta_e - \beta_{teräs})V_0\,dT = 0$
   $\Rightarrow\; \Delta T = k\Delta p / (\beta_e - \beta_{teräs})$ = 0,23°C $\Rightarrow$ $T \approx$ 60,2°C.

4. Maxwell-Boltzmann-jakauma: $f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}$. Todennäköisin nopeus v_{mp} saadaan jakauman derivaatan nollakohdasta $df(v)/dv = 0 \quad \Rightarrow$

$$\frac{df(v)}{dv} = 8\pi v \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} + 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \left(\frac{-mv}{kT}\right) =$$

$$= \left[2 - \frac{mv^2}{kT}\right] 4\pi v \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} = 0 \quad \Rightarrow \quad mv_{mp}^2 = 2kT$$

$$\Rightarrow \quad v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 410 \text{ m s}^{-1}.$$