Kompaktius I

Kompakteilla avaruuksilla on monia samanlaisia ominaisuuksia kuin euklidisen avaruuden suljetuilla ja rajoitetuilla joukoilla.

Määritelmä 10.2

Metrinen avaruus on **kompakti** (compact), jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono.

Osajoukon $A \subset X$ kompaktius määritellään tarkastelemalla aliavaruutta $(A, d) \subset (X, d)$ omana avaruutena. Erityisesti raja-arvojen täytyy kuulua joukkoon A eikä vain X:ään.

Yleisessä topologiassa tätä ominaisuutta kutsutaan *jonokompaktiudeksi* ja kompaktius määritellään avointen peitteiden avulla. Metrisen avaruuden tapauksessa nämä käsitteet ovat yhtäpitäviä; vrt. lause 10.8.

ESIM. (i) $]0,1[$, $]0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ EIVÄT OLE KOMPAKTEJA

SYY: HELPPO KEKSIÄ ESIMERKKEJÄ JONOISTA, JOILLA EI OLE SUPPENEVIA OSAJONOJA, ESIM. $x_m = 1/m$, $y_m = m$ TMS

(ii) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ON KOMPAKTI, $a < b$

SEURAA 1. VIIKON TULOKSISTA

ESIM. HILBERTIN KUUTIO

$$H = \{ x \in \ell^2 \mid |x_m| \leq 1/m \ \forall m \in \mathbb{N} \}$$

ON KOMPAKTI, VAIKKEI SE OLE "ÄÄRELLISULOTTEINEN".

ESIM. $\ell^2 = \{ (x_m) \mid x_m \in \mathbb{R} \ \forall m \in \mathbb{N} \text{ JA } \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 < \infty \}$

$e_m \in \ell^2$, $(e_m)_i = \delta_{mi}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ LUONNOLLISET YKSIKKÖVEKTORIT

$\Rightarrow (e_m)$ ON JONO $\overline{B}(\bar{0},1)$:SSÄ, MUTTA $d(e_m, e_k) = 2$, $m \neq k$

$\Rightarrow$ EI SUPPENEVAA OSAJONOA $\Rightarrow \overline{B}(\bar{0},1)$ EI KOMPAKTI.

(SAMOIN KÄY $C([a,b])$:SSÄ)

Kompaktius II

Kompaktiuden ominaisuuksia:

1. Kompakti $\Rightarrow$ täydellinen.
2. Kompakti $\Rightarrow$ rajoitettu.
3. Osajoukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti $\Leftrightarrow$ A on suljettu ja rajoitettu.
4. Kompaktin avaruuden X osajoukko $A \subset X$ on kompakti $\Leftrightarrow$ $A \subset X$ on suljettu.
5. Ääretönulotteisen normiavaruuden suljetut kuulat eivät ole kompakteja.
6. Tuloavaruus $X \times Y$ on kompakti täsmälleen silloin, kun X ja Y ovat kompakteja.

TOD. 1 OLKOON (x_m) CAUCHY-JONO X:SSÄ JA $\varepsilon > 0$.

VALITAAN $m_0 \in \mathbb{N}$: $k, l \geq m_0 \Rightarrow d(x_k, x_l) < \varepsilon/2$

X KOMPAKTI $\Rightarrow \exists$ SUPPENEVA OSAJONO $(x_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$,

$x_{\varphi(m)} \to a \in X$

VÄITE: $x_m \to a$ (ILMAN OSAJONOA)

TOD.

$$\exists m_1 \in \mathbb{N}: m \geq m_1 \Rightarrow d(x_{\varphi(m)}, a) < \varepsilon/2$$

JOS $m \geq \max(m_0, m_1)$, NIIN

$$d(x_m, a) \leq d(x_m, x_{\varphi(m)}) + d(x_{\varphi(m)}, a)$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad (\varphi(m) \geq m)$$

$\Rightarrow$ VÄITE. $\square$

③ $\Leftarrow$: OLKOON $A \subset \mathbb{R}^2$ SULJETTU JA RAJOITETTU $(n=2)$

VÄITE: A ON KOMPAKTI

TOD: OLKOON (z_m) JONO A:SSA, $z_m = (x_m, y_m)$, $m \in \mathbb{N}$

TÄLLÖIN (x_m) ON RAJOITETTU JONO $\mathbb{R}$:SSÄ, JOTEN

$\exists$ SUPPENEVA OSAJONO $x_{\varphi(m)} \to a \in \mathbb{R}$

TOISAALTA $(y_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ ON RAJOITETTU JONO $\mathbb{R}$:SSÄ,

JOTEN $\exists$ SUPPENEVA OSAJONO $y_{\psi(m)} \to b \in \mathbb{R}$.

$(\psi(m) \in \{\varphi(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ KAIKILLA $m \in \mathbb{N}\})$

$\Rightarrow$ $(z_{\psi(m)})$ ON ALKUPERÄISEN JONON (z_m) SUPPENEVA OSAJONO:

$z_{\psi(m)} \to \underbrace{(a,b)}_{\in \mathbb{R}^2}$. KOSKA $z_{\psi(m)} \in A$ $\forall m \in \mathbb{N}$ JA

A ON SULJETTU, NIIN $(a,b) \in A$. SIIS: A ON KOMPAKTI. $\square$

<u>HUOM</u>: $(x_{\varphi(m)}, y_{\psi(m)})$ – TYYPPINEN JONO EI OLE YLEENSÄ

(z_m):N OSAJONO!

VRT. $((1,2), (3,4), (1,2), (3,4), \ldots)$

$\Rightarrow$ $x_{2m-1} = 1 \to 1$, $y_{2m} = 4 \to 4$

MUTTA PISTEET $(1,4)$ EIVÄT ESIINNY JONOSSA.

(2) <u>TOD</u>: Vastaoletus: X on kompakti, mutta rajoittamaton.

Tällöin $X \not\subset \bar{B}(a,r)$ millään $a \in X$, $r > 0$.

Erityisesti $X \not\subset \bar{B}(a,n)$ millään $n \in \mathbb{N}$, joten

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in X : d(x_n, a) > n$.

X kompakti $\Rightarrow \exists$ suppeneva osajono $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$,

$x_{\varphi(n)} \to b \in X$. Tällöin

$$\underbrace{d(x_{\varphi(n)}, a)}_{> n} \longrightarrow d(b,a) \in \mathbb{R},$$

mikä on RR. $\square$

(4) <u>$\Leftarrow$</u>: Olet. A suljettu ja X kompakti.

<u>Väite</u>: A on kompakti

<u>Tod</u>. Olkoon (a_n) jono A:ssa

X kompakti $\Rightarrow \exists$ suppeneva osajono $(a_{\varphi(n)})$ X:ssä,

$a_{\varphi(n)} \to b \in X$.

A suljettu $\Rightarrow b \in A$.

Tulos: A on kompakti. $\square$

Huom: $A \subset X$ kompakti $\Rightarrow$ A suljettu (RIIPPUMATTA X:stä!)

Tod. Olkoon $b \in \overline{A}$. Silloin $\exists$ jono (a_n) A:ssa, jolle

$a_n \to b$; valitaan $a_n \in A \cap B(b, 1/n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Koska A on kompakti, niin $\exists$ osajono $(a_{\varphi(n)})$, jolle

$a_{\varphi(n)} \to a \in A$. Mutta suppenevan jonon osajonoilla

on sama raja-arvo kuin alkuperäisellä, joten $a = b$.

Tulos: $b = a \in A$, joten A on suljettu. $\square$

(6) TOD: Sama idea kuin (3):ssa: "osajonon osajono".

LAUSE (BOLZANO-WEIERSTRASS) KOMPAKTIN AVARUUDEN ÄÄRETTÖMÄLLÄ OSAJOUKOLLA ON AINAKIN YKSI KASAUTUMISPISTE.

DEF. PISTE $x \in X$ ON JOUKON $A \subset X$ KASAUTUMISPISTE, JOS JOKAISESSA $B(x,r)$:SSÄ ON ∞ MONTA JOUKON A PISTETTÄ (TAI: AINAKIN YKSI PISTE $y \neq x$!)

LAUSEEN TOD. VALITAAN A:N JONO, JOSSA KAIKKI x_m ERI PISTETTÄ. X KOMPAKTI $\Rightarrow$ JOLLEKIN OSAJONOLLE $x_{m_k} \to x \in X$ $\Rightarrow$ x ON JOUKON A KASAANTUMISPISTE. $\square$

Kompaktius $\leftrightarrow$ jatkuvuus

1. Kompaktius säilyy jatkuvissa kuvauksissa: Jos X on kompakti ja $f\colon X \to Y$ on jatkuva, niin $f[X] \subset Y$ on kompakti.
2. Seuraus: Jos X on kompakti ja $f\colon X \to Y$ on jatkuva bijektio, niin f^{-1} on jatkuva (joten f on homeomorfismi).
   Syy: Jos $F \subset X$ on suljettu, niin sen alkukuva
   $$(f^{-1})^{-1}[F] = f[F]$$
   on suljettu. (F KOMPAKTI $\Rightarrow$ $f[F]$ KOMPAKTI $\Rightarrow$ $f[F]$ SULJETTU!)
3. Jos X on kompakti ja $Y \approx X$, niin Y on kompakti.
4. Jos $X \neq \emptyset$ on kompakti ja $f\colon X \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa X. Toisin sanoen, funktiolla f on maksimi ja minimi joukossa X.
5. Erityisesti: Jos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu ja $f\colon A \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin funktiolla f on maksimi ja minimi joukossa A.

TOD. (1) OLKOON (y_m) JONO JOUKOSSA $f[X]$ JA $x_m \in f^{-1}[\{y_m\}]$,

TS. $f(x_m) = y_m$.

X KOMPAKTI $\Rightarrow$ $\exists$ OSAJONO $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, JOLLE

$x_{m_k} \to a \in X$, KUN $k \to \infty$

f JATKUVA $\Rightarrow$ $y_{m_k} = f(x_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(a) \in f[X]$

$\Rightarrow$ VÄITE. $\square$

(4) OLETUKSET $\Rightarrow$ $f[X] \subset \mathbb{R}$ KOMPAKTI ELI SULJETTU JA RAJOITETTU

$\Rightarrow$ $\inf(f[X]) = \min(f[X]) = f(a)$ JOLLAKIN $a \in X$

$\sup(f[X]) = \max(f[X]) = f(b)$ JOLLAKIN $b \in X$

Kompaktiuden sovelluksia

Alkeellisia esimerkkejä kompaktiuden sovelluksista:

- Jos X on kompakti, niin on olemassa sellaiset pisteet $a, b \in X$, että $d(a,b) = d(X)$.
- Jos $A, B \subset X$ ovat kompakteja joukkoja, niin on olemassa sellaiset pisteet $a \in A$ ja $b \in B$, että $d(a,b) = d(A,B)$.
- Jos X on kompakti ja $f\colon X \to]0,\infty[$ on jatkuva, niin on olemassa sellainen vakio $c > 0$, että $f(x) \geq c$ kaikilla $x \in X$.

Yleisemmin: sup/inf-tyyppisen maksimointi- tai minimointipäättelyn tuloksena saadaan konkreettinen ratkaisu; tämä liittyy myös täydellisyyteen. Tällaisia tilanteita esiintyy mm. osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa ja monissa muissa sovelluksissa.

EKAN TOD. TAPA 1: $d(X) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in X\}$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$: $d(X) - \frac{1}{m}$ EI OLE YLÄRAJA, JOTEN

$\exists\, a_m, b_m \in X$, JOILLE $d(a_m, b_m) > d(X) - \frac{1}{m}$

VALITAAN ENSIN SUPPENEVA OSAJONO $a_{\varphi(m)} \to a \in X$,

JA SITTEN JONOSTA $b_{\varphi(m)}$ SUPPENEVA OSAJONO

$b_{\psi(m)} \to b \in X$. TÄLLÖIN

$$d(X) - \frac{1}{m} \leq d(a_{\psi(m)}, b_{\psi(m)}) \leq d(X) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

JOTEN $d(a,b) = d(X)$ (SUPPILOPERIAATE JA METRIIKKAFUNKTION JATKUVUUS)

TAPA 2 X KOMPAKTI $\Rightarrow X \times X$ KOMPAKTI

$\Rightarrow$ JATKUVA FUNKTIO $d : X \times X \to [0, \infty[$ SAAVUTTAA MAKSIMINSA JOSSAKIN PISTEESSÄ (a,b), JOLLOIN

$d(a,b) = d(X)$. $\square$

MUISSAKIN KAKSI ERI TAPAA.

Lebesguen peitelause

Seuraava tulos on tekninen apuväline, jota tarvitaan kompaktiuden edistyneemmissä (?) sovelluksissa. Avoimen peitteen määritelmä löytyy kohdasta 10.7.

Lause 10.13

Olkoon $A \subset X$ kompakti ja $\mathcal{D}$ joukon A avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda > 0$, että kaikille $x \in A$ pätee $B(x, \lambda) \subset U$ jollakin $U \in \mathcal{D}$.

Lauseessa esiintyvä λ on peitteen $\mathcal{D}$ **Lebesgue-luku**, joka on siis riippumaton pisteestä x.

Lauseen todistus lienee yksi tämän kurssin hankalimmista, vaikkei se ole kovin pitkä.

TOD. OSOITETAAN, ETTÄ $\lambda = 1/m$ TOIMII JOLLAKIN $m \in \mathbb{N}$.

VASTAOLETUS: MIKÄÄN $\lambda = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, EI KÄY.

TÄLLÖIN $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists x_m \in A$, JOLLE $B(x_m, 1/m)$ EI SISÄLLY MIHINKÄÄN PEITTEEN $\mathcal{D}$ JOUKKOON. KOSKA A ON KOMPAKTI, NIIN $\exists$ SUPPENEVA OSAJONO $x_{\varphi(m)} \to a \in A$.

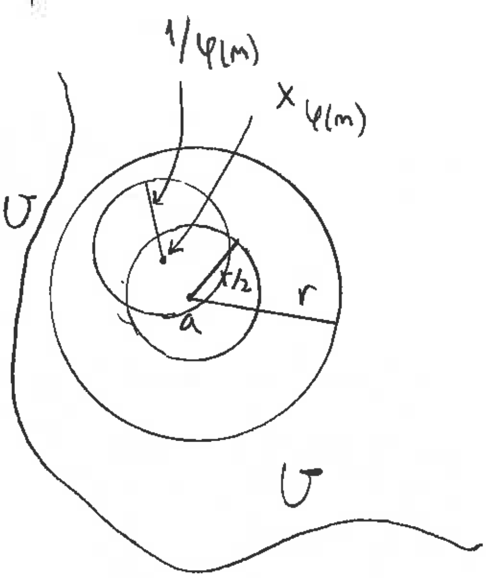
KOSKA $\mathcal{D}$ ON JOUKON A PEITE, NIIN $a \in U \in \mathcal{D}$ JOLLAKIN U.

KOSKA U ON AVOIN, NIIN $\exists r > 0 : B(a, r) \subset U$.

TÄSTÄ SEURAA RISTIRIITA, JOS m ON NIIN SUURI, ETTÄ $d(x_{\varphi(m)}, a) < r/2$ JA $\dfrac{1}{\varphi(m)} < r/2$

SYY: $B(x_{\varphi(m)}, 1/\varphi(m)) \subset B(a, r/2 + r/2) = B(a, r) \subset U$

RR



$\Rightarrow$ VASTAOLETUS VÄÄRÄ, VÄITE TOSI $\square$

Tasainen jatkuvuus I

Lebesguen peitelauseen seuraus:

Lause 10.4

Jos X on kompakti ja $f : (X, d) \to (Y, d')$ on jatkuva, niin f on tasaisesti jatkuva joukossa X, ts. jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, jolle

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad x, y \in X \quad \text{ja} \quad d(x, y) < \delta.$$

Tasaisen jatkuvuuden kohdalla sama luku δ toimii kaikkialla, riippumatta pisteiden x, y sijainnista joukossa X, kunhan vain $d(x, y) < \delta$.

Yhden muuttujan funktioille tasainen jatkuvuus suljetulla välillä voidaan todistaa myös ilman Lebesguen peitelausetta, mutta sekin todistus on melko monimutkainen.

TOD. OLKOON $\varepsilon > 0$. KOSKA f ON JATKUVA, NIIN

$\mathcal{D} = \{ f^{-1}[B(z, \varepsilon/2)] \mid z \in Y \}$ ON JOUKON X AVOIN PEITE.

OLKOON $\lambda > 0$ LAUSEEN 10.3 LUKU; OSOITETAAN, ETTÄ $\delta = \lambda$ OK.

OLKOOT SIIS $x, y \in X$ JA $d(x, y) < \lambda$

$\Rightarrow y \in B(x, \lambda) \subset U \in \mathcal{D}$ JOLLAKIN U.

$\Rightarrow x, y \in f^{-1}[B(z, \varepsilon/2)]$ JOLLAKIN $z \in Y$

$\Rightarrow f(x), f(y) \in B(z, \varepsilon/2)$ —〃—

$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ $\square$

ERITYISESTI: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ JATKUVA

$\Rightarrow f$ TASAISESTI JATKUVA.

HUOM: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ON TAS. JATKUVA, MUTTEI LIPSCHITZ!

Esim. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ei ole tasaisesti jatkuva.

Perustelu: Valitaan $\varepsilon = 1$ ja osoitetaan, ettei $\exists\, \delta > 0$, jolle pätee:

$$x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1.$$

Tutkitaan ehtoa arvoilla $0 < y < x$:

$$|x^2 - y^2| < 1 \Leftrightarrow (x-y)\cdot(x+y) < 1$$

$$\Leftrightarrow x - y < \frac{1}{x+y}$$

Kokeillaan: $y = x - \frac{\delta}{2}$, jolloin $|x-y| = \delta/2 < \delta$ ja

ehto $\Leftrightarrow \dfrac{\delta}{2} < \dfrac{1}{2x - \delta/2} \Leftrightarrow x\delta - \delta^2/4 < 1$

$$\Leftrightarrow x < 1/\delta + \delta/4$$

Tulos: Ehto ei toteudu tietyllä arvolla $\delta > 0$, jos x on riittävän suuri ja $y = x - \delta/2$.

Tasainen jatkuvuus II

Derivoituvan funktion tapaus on selvästi helpompi.

Esimerkki 10.5

Olkoon $L \geq 0$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva, derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja $|f'(x)| \leq L$ kaikilla $x \in]a, b[$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva.

Ratkaisu: Väliarvolauseen nojalla f on L-Lipschitz-jatkuva, josta tasainen jatkuvuus seuraa helposti.

Esimerkki 10.6

Osoita tasaisen jatkuvuuden avulla, että suljetulla välillä jatkuva funktio on Riemann-integroituva.

Ratkaisu: Luennolla/monisteessa.

10.6.

TOD. OLKOON $\varepsilon > 0$. KOSKA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ON TASAISESTI JATKUVA, NIIN

$$\exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{AINA, KUN } |x-y| < \delta, \; x, y \in [a,b]$$

VALITAAN SELLAINEN JAKO

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b, \quad \text{JOSSA } x_k - x_{k-1} < \delta \quad \forall k = 1, \ldots, m$$

$$\Rightarrow M_k - m_k = \text{MAX}\{f(z) \mid x_{k-1} \leq z \leq x_k\} - \text{MIN}\{f(y) \mid x_{k-1} \leq y \leq x_k\}$$

$$= f(z_k) - f(y_k) \quad \text{JOILLAKIN } z_k, y_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \qquad (\text{JATKUVA} \Rightarrow \exists \text{ MAX/MIN})$$

$$\Rightarrow S - s = \sum_{k=1}^{m} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1})}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{TÄLLE JAOLLE}$$

$\Rightarrow f$ ON R-INTEGROITUVA. $\square$

Kompaktius ja peitteet

Määritelmä 10.7

Joukon $A \subset X$ **avoin peite** (open cover) on kokoelma $\mathcal{D}$ avaruuden X avoimia osajoukkoja, joiden yhdiste sisältää joukon A:

$$A \subset \cup\mathcal{D} = \cup\{U \mid U \in \mathcal{D}\}.$$

Peitteen $\mathcal{D}$ **osapeite** (subcover) on jokin osakokoelma peitteen $\mathcal{D}$ joukoista, jotka edelleen peittävät tarkasteltavan joukon A.

Lause 10.8

Olkoon $A \subset X$. Tällöin joukko A on kompakti $\Leftrightarrow$ Jokaisella joukon A avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Peite-ominaisuus voi tuntua hieman oudolta, mutta sen avulla monet todistukset sujuvat määritelmää helpommin. Esimerkki: Osoita, että kahden kompaktin joukon yhdiste on kompakti.

10.8 TOD. $\Rightarrow$: OLKOON A KOMPAKTI JA $\mathcal{D}$ SEN AVOIN PEITE.

VASTAOLETUS: MIKÄÄN ÄÄRELLINEN OSA EI PEITÄ A:TA.

OLKOON $\lambda > 0$ LAUSEEN 10.4 LUKU. MUODOSTETAAN A:N JONO (x_m) SEURAAVALLA TAVALLA: OLKOON $x_1 \in A$ JOKIN PISTE.

$\Rightarrow \exists\, U_1 \in \mathcal{D}: B(x_1, \lambda) \subset U_1$. TÄLLÖIN $A \not\subset U_1$, KOSKA MUUTEN $\{U_1\}$ ON $\mathcal{D}$:N ÄÄRELLINEN OSAPEITE. VOIDAAN SIIS VALITA $x_2 \in A \setminus U_1$, JOLLOIN $\exists\, U_2 \in \mathcal{D}: B(x_2, \lambda) \subset U_2$

$\Rightarrow \{U_1, U_2\}$ EI PEITÄ A:TA, KOSKA MUUTEN SE OLISI ÄÄRELLINEN OSAPEITE.

$\Rightarrow \exists\, x_3 \in A \setminus (U_1 \cup U_2)$ JNE.

$\Rightarrow$ SAADAAN JONO (x_m) JA $U_1, U_2, \ldots \in \mathcal{D}$, JOILLE

$B(x_m, \lambda) \subset U_m$, $x_{m+1} \in A \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_m)$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_m \notin U_k$ JA $d(x_m, x_k) \geq \lambda$ $\forall\, 1 \leq k < m$

SYMMETRIA $\Rightarrow d(x_m, x_k) \geq \lambda$ $\forall m \neq k$ $\Rightarrow$ JONOLLA (x_m) EI VOI OLLA SUPPENEVAA OSAJONOA $\Rightarrow$ A EI OLE KOMPAKTI RR. $\square$

$\Leftarrow$: Oletetaan, että peite-ominaisuus on voimassa.

Vastaoletus: A ei ole kompakti.

Tällöin $\exists$ A:n jono (x_n), jolla ei ole suppenevaa osajonoa $\Rightarrow$ mikään piste $a \in A$ ei ole suppenevan osajonon $(x_{\varphi(n)})$ raja-arvo

$\Rightarrow \forall a \in A \; \exists$ avoin ympäristö $U(a)$, jolle

$x_n \in U(a)$ vain äärellisen monella indeksillä $n \in \mathbb{N}$.

(Syy: Jos jokainen $B(a, 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$, sisältää ∞ monta x_n:ää, niin $\forall k \in \mathbb{N} \; \exists \, x_{\varphi(k)} \in B(a, 1/k)$ ja $\varphi(k+1) > \varphi(k)$, jolloin $x_{\varphi(k)} \to a$ RR)

$\Rightarrow \mathcal{D} = \{ U(a) \mid a \in A \}$ on A:n avoin peite.

Peite-ominaisuus $\Rightarrow \exists$ äärellinen osapeite, eli

$A \subset U(a_1) \cup \ldots \cup U(a_k)$ jollakin $k \in \mathbb{N}$.

Mutta silloin $x_n \in A \subset U(a_1) \cup \ldots \cup U(a_k) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, joten johonkin $U(a_j)$ sisältää ∞ monta jonon pistettä x_n, joka on RR ympäristön $U(a_j)$ valinnan kanssa.

$\Rightarrow$ Vastaoletus väärä $\Rightarrow$ A on kompakti. $\square$