Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet, kevät 2019

Laskuharjoitus 6 viikolla 7 (13.–15.2.)
Aihepiiri: Kompaktius, yhtenäisyys.
MyCourses-monisteet, Väisälä 13–14.

Tehtävät 1–3 on tarkoitus laskea ennen omaa harjoitusryhmää ja ne käydään harjoituksen alussa läpi taululla. Harjoituksen loppuaika käytetään muihin tehtäviin, joita lasketaan harjoituksen aikana ja ratkaisut käydään lopuksi läpi. Muista tehtävistä saa läsnäolon perusteella 6 p.
Tällä viikolla ei ole enää palautettavia tehtäviä, koska kurssitentti on jo maanantaina 18.2.

1. Osoita, että metrisen avaruuden X kahden kompaktin osajoukon yhdiste $A \cup B$ on kompakti
   a) käyttämällä kompaktiuden määritelmää (luentokalvo 95).
   b) käyttämällä kompaktiuden karakterisointia peitteiden avulla (luentokalvo 102).
   Vihjeinä todistusten alut:
   a) Olkoon (x_n) jono joukossa $A \cup B$.
   b) Olkoon $\mathcal{D}$ joukon $A \cup B$ avoin peite.

2. Todista seuraavat kompaktiuteen liittyvät väitteet muodostamalla jatkuva funktio, jonka maksimi tai minimi ratkaisee asian.
   a) Jos $A \subset \mathbf{R}^3$ on kompakti, niin siinä on korkein piste $a \in A$, jolle $a_3 \geq x_3$ kaikille $x \in A$.
   b) Jos $B \subset \mathbf{R}^2$ on kompakti, niin on olemassa pisteet $a, b, c \in B$, joiden määräämän kolmion piiri
   $$\|a - b\| + \|b - c\| + \|c - a\|$$
   on suurin mahdollinen, kun kolmion kärkien täytyy sijaita joukossa B.
   c) Jos C on kompakti metrinen avaruus ja $g\colon C \to C$ on jatkuva kuvaus, jolla ei ole kiintopistettä, niin on olemassa sellainen $c > 0$, että $d(g(x), x) \geq c$ kaikilla $x \in C$.
   Huom: Kaikki kohdat voidaan ratkaista myös jonojen avulla valitsemalla aluksi sup/inf-arvoa lähestyvä jono.

3. a) Luokittele aakkosten isot kirjaimet (sans serif -fontti)
   $$\mathsf{A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\ M\ N\ O\ P\ Q\ R\ S\ T\ U\ V\ W\ X\ Y\ Z}$$
   sekä Å Ä Ö ryhmiin, joissa kirjaimet ovat keskenään homeomorfisia tasojoukkoja. Intuitiivinen idea riittää, mutta tarkoissa perusteluissa voisi esiintyä sellaisia käsitteitä kuin yhdesti yhtenäisyys tai yhtenäisten komponenttien lukumäärä yhden pisteen poistamisen jälkeen. Perusidea: I $\approx$ J ovat kaaria.
   b) Kuinka monella erilaisella, mutta homeomorfisella tavalla oma etunimesi voidaan kirjoittaa? Kuka saavuttaa laskariryhmän maksimin?

4. Olkoon X yhtenäinen metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ epätyhjiä. Osoita, että on olemassa (ainakin yksi) piste $x \in X$, jolle $d(x, A) = d(x, B)$.
   Vihje: Tutki jatkuvaa funktiota $f(x) = d(x, A) - d(x, B)$.

5. Osoita: Jos X tai Y on epäyhtenäinen, niin niiden karteesinen tulo $X \times Y$ on epäyhtenäinen.

6. a) Olkoon X metrinen avaruus ja (A_n) laskeva jono avaruuden X kompakteja epätyhjiä osajoukkoja, ts. $A_{n+1} \subset A_n$ kaikilla $n \geq 1$. Osoita, että joukkojen A_n leikkaus
$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$
   on
   (i) epätyhjä;
   (ii) kompakti.
   b) Muodosta esimerkki tilanteesta, jossa sisäkkäiset joukot A_n ovat suljettuja ja epätyhjiä, mutta leikkaus on tyhjä joukko.