4 Vektoreista ja matriiseista

Matriiseja ja niiden erikoistapauksia vektoreita tarvitaan

- moniulotteisten funktioiden käsittelyssä ”pitämässä osat koossa”

- olioina, joihin voidaan ”pakata” empiiristen muuttujien sisältämää informaatiota, jota voidaan tällöin käsitellä yhtäaikaisesti.

Esim. Yhden muuttujan lineaarinen yhtälö:

Herkkumatikka maksaa 50 €/kg. Rahaa on 1000 €.

Paljonko matikkaa saadaan tällä rahalla?

Ratkaistavana on yhtälö

1) kerroin → **50·x = 1000**

↑ ↖

2) tuntematon 3) side-ehto

$\Leftrightarrow$ ...

$\Leftrightarrow$ x = 20 kg.

Siis

1. asteen lineaarinen yhtälö ratkaistaan

$$1) \rightarrow \mathbf{ax = b} \quad | \cdot \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\uparrow \qquad \nwarrow$$

$$2) \qquad 3)$$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a^{-1} \cdot ax = a^{-1} \cdot b}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{(a^{-1} \cdot a)x = a^{-1} \cdot b}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{1 \cdot x = a^{-1} \cdot b}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = a^{-1} \cdot b}$

Yhtälöryhmä (siis moniulotteinen tilanne) halutaan ja myös voidaan ratkaista vastaavalla tavalla.

Esim. Yritys tekee norsun ruoka-annoksia, joissa käytetään raaka-aineita A, B ja C. Niillä ovat ominaisuudet:

	A	B	C
Valmistettava määrä (kg)	x_1	x_2	x_3
N-vitamiinin määrä (mg/kg)	40	340	60
Hinta (€/kg)	10	60	20

Kuinka paljon raaka-aineita A, B ja C on käytettävä, kun

- Annoksen koko on100 kg,
- N:ää on oltava 8000 mg ja
- annos saa maksaa 2000 €?

Ehdoista saadaan **yhtälöryhmä**:

(1) määrä $x_1 + x_2 + x_3 = 100$

(2) N:n määrä $40x_1 + 340x_2 + 60x_3 = 8000$

(3) hinta $10x_1 + 60x_2 + 20x_3 = 2000$

Yhtälöitä voidaan muokata niin, että

- yhtälö voidaan kertoa molemmilta puolilta samalla ”sopivalla” vakiolla

- yhtälö voidaan lisätä puolittain toiseen yhtälöön,

jolloin tässä ratkaisuna saadaan …

$x_1 = 40$ kg, $x_2 = 10$ kg ja $x_3 = 50$ kg.

Jos yhtälöitä on paljon (tilanne on hyvin moniulotteinen), edellinen tapa on sekava ja hankala.

Parempaan ratkaisuun päästään hahmottamalla tilanne ”vastaavalla tavalla” kuin edellisessä yksinkertaisessa esimerkissä. Silloin koko yhtälöryhmää voidaan käsitellä samanaikaisesti:

Yhtälöryhmässä on samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä kolme erilaista osaa, jotka ”irrotetaan” omiksi kokonaisuuksikseen:

1) kertoimet, joilla x_1, x_2 ja x_3 kerrottu

2) tuntemattomat

3) side-ehdot

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

↑ ↖ ↗

Tällaista kaaviota sanotaan **matriisiksi**

Nämä ovat erikoistapauksia matriiseista ja niitä sanotaan **vektoreiksi**.

Näistä käytetään tässä (vastaavalla tavalla kuin 1-ulotteisessa tilanteessa edellä) merkintöjä:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{x} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \bar{b}.$$

Yhtälöryhmän **ratkaisu** $\bar{x}$ riippuu

kerroinmatriisista A, ja **side-ehto**na olevasta vektorista $\bar{b}$.

Matriiseille (ja vektoreille) määritellään niiden käsittelyssä tarvittavat operaatiot niin, että

- yhtälöryhmä **voidaan esittää** edellisen esimerkin tapaan

$$A\,\bar{x} = \bar{b}$$

- ja se myös **ratkaistaan** kertoimen a käänteisluvulla kertomista ”vastaavalla tavalla” (käänteismatriisin avulla).

Myös tämä ongelma liittyy funktioiden käsittelyyn:

Matriisi A määrittelee (lineaarisen) funktion $f:D\rightarrow V$, joka kuvaa

kaikki mahdolliset ainemääräyhdistelmät $(x_1,x_2,x_3)\in D=\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$ niitä vastaaviksi

määrä, N-vitamiini, hinta-yhdistelmiksi $(y_1,y_2,y_3)\in V=\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$,

missä $f(x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2,y_3)$ ja

$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$ (määrä)

$y_2 = 40x_1 + 340x_2 + 60x_3$ (N:n määrä)

$y_3 = 10x_1 + 60x_2 + 20x_3$ (hinta)

Tällaista funktiota sanotaan **lineaarikuvaukseksi**.

Jos esimerkiksi käytetään raaka-ainetta A **5** kg, B:tä **10** kg ja C:tä **20** kg, niin edelliseen sijoittamalla saadaan

$y_1 = \ldots = 35$ kg

$y_2 = 40\cdot\mathbf{5} + 340\cdot\mathbf{10} + 60\cdot\mathbf{20} = 4800$ mg

$y_3 = \ldots = 1050$ €

ja siis $f(5,10,20) = (35,4800,1050)$

Yhtälöryhmän ratkaisussa haluttiin vastaus kysymykseen:

”Mikä on (x_1,x_2,x_3), kun $f(x_1,x_2,x_3) = (100,8000,2000)$?”,

joka on erikoistapaus **käänteisfunktio-ongelmasta**.

Seuraavassa määritellään tarvittavat käsitteet, laskutoimitukset ja muut tarvittavat operaatiot.

Vaatimuksina määrittelyssä ovat:

- On saatava **matemaattisesti toimiva** ”koneisto” (lineaariavaruus), jossa yleiset matematiikan tulokset saadaan käyttöön.

- Määrittelyn on oltava **empiirisen maailman kanssa yhteen sopiva**, jotta tästä käsitteistöstä on hyötyä sovelluksissa.

4.1 R^n:n vektoreista

n-ulotteisen reaaliavaruuden

$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\ \forall i=1, \ldots, n\}$,

alkioita $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sanotaan **vektoreiksi**. (Myös merkitään **x.**)

Arvoja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sanotaan vektorin **komponenteiksi**.

Huom. Alussa olleessa johdattelussa käytettiin yhtälöryhmän tuntemattomien muuttujan arvojen ja side-ehtojen yhdistelmien muodostamista vektoreista $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\bar{b} = (100, 8000, 2000)$ myös (matriisien käsittelyssä tarkoituksenmukaisia) merkintöjä

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{x} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \bar{b},$$

joita sanotaan **pystyvektoreiksi**.

Vastaavasti vektoreita $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\overline{b} = (100, 8000, 2000)$

sanotaan myös **vaakavektoreiksi**.

Vaakavektoreista käytetään myös merkintää

$\bar{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$ ja $\overline{b} = [100 \;\; 8000 \;\; 2000]$,

mikä tarvitaan käsiteltäessä vektoreita matriisien erikoistapauksina.

Esitystapa valitaan ”tilanteen mukaan”.

Asetetut tavoitteet määräävät, kuinka **laskutoimitukset** ja muut **operaatiot** on määriteltävä:

Esim. Ekonomisti E käyttää terveysvaikutteisia luonnontuotteita:

Kuntojuomaa (KJ), Terveysuutetta (TU) ja Ihmepillereitä (IP).

Hän seuraa näiden hyödykkeiden hintoja ja viikon aikana kuluttamiaan määriä noin vuoden välein. Vuosina 2009, 2010 ja 2011 tulokset olivat:

	Hinnat			Määrät		
Vuosi	KJ (€/dl)	TU (€/g)	IP (€/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)
2009	0,40	0,50	1,40	35	60	30
2010	0,80	0,60	2,00	50	70	25
2011	0,30	0,80	4,00	120	90	50

Vakiolla kertominen:

Vuoden 2009 yksikköhinnat

KJ (€/dl)	TU (€/g)	IP (€/kpl)
0,40	0,50	1,40

voidaan ”pakata” hintavektoriksi $\bar{p}_{09} = (0.40,0.50,1.40)$.

Kun hinnat muutetaan dollareiksi kurssilla 1.40 USD/€, jokainen niistä kerrotaan tällä vakiolla.

Jos halutaan

- tehdä muunnos yhtäaikaisesti vektoriin $\bar{p}_{09}$ kootuille hinnoille

- ja koota tulokset vektoriin, joka esittää hintoja dollareina,

on järkevää määritellä hinta**vektorin** $\bar{p}_{09}$ **kertominen** muunnos**vakiolla** 1.40 USD/€

1.40$\cdot \bar{p}_{09}$ = **1.40**$\cdot$ (0.40,0.50,1.40) = (**1.40**$\cdot$0.40,**1.40**$\cdot$0.50,**1.40**$\cdot$1.40)

= (0.56,0.70, 1.96)

Siis vektori **kerrotaan vakiolla komponenteittain**.

Jos samalla muunnetaan euroina tai dollareina esitetyt hinnat senteiksi kertomalla ne 100:lla, saadaan sama tulos kolmella tavalla:

- 100$\cdot$(1.40$\cdot$ (0.40,0.50,1.40)) = 100$\cdot$(0.56,0.70, 1.96) = (56,70,196)

tai

- ensin muunnetaan eurot eurosenteiksi ja sitten dollareiksi

tai

- ensin lasketaan muunnosvakio suoraan euroista dollarisenteiksi $1.40 \cdot 100 = 140$ ja sitten muunnos.

Siis

(5) $100 \cdot (1.40 \cdot \bar{p}_{09}) = 1.40 \cdot (100 \cdot \bar{p}_{09}) = (100 \cdot 1.40) \cdot \bar{p}_{09}$.

Yhteenlasku

Vuosina 2009 ja 2010 kulutetut määrät voidaan ”pakata” vektoreiksi

$\bar{q}_{09} = (35,60,30)$ ja $\bar{q}_{10} = (50,70,25)$

Kun halutaan tietää, paljonko Kuntojuomaa, Terveysuutetta ja Ihmepillereitä käytettiin keskimäärin vuosina 2009 ja 2010, kaikkien kolmen hyödykkeen

- määrät **lasketaan** erikseen yhteen

- ja summat jaetaan kahdella eli **kerrotaan vakiolla** ½.

Jos

- vektoreihin $\bar{q}_{09}$ ja $\bar{q}_{10}$ kootut määrät lasketaan **yhtä aikaa yhteen** ja

- kootaan tulokset vektoriksi,

vektorien $\bar{q}_{09}$ ja $\bar{q}_{10}$ **yhteenlasku** on määriteltävä

$$\bar{q}_{09} + \bar{q}_{10} = (35+50,\ 60+70,\ 30+25) = (85,130,55)$$

Siis vektorit **lasketaan yhteen komponenteittain**.

Selvästi on samantekevää, kummassa järjestyksessä vektorit lasketaan yhteen:

$$\bar{q}_{09} + \bar{q}_{10} = (35+50,\ 60+70,\ 30+25) = (85,130,55)$$

(1) $$= (\ldots+\ldots\ ,\ \ldots+\ldots\ ,\ldots+\ldots) = \bar{q}_{10} + \bar{q}_{09},$$

joten näin määriteltävä vektorien yhteenlasku on **vaihdannainen**.

Vuosien 2009 ja 2010 havainnointiviikkoina keskimäärin kulutettuja määriä kuvaava ”keskikori” on

$\bar{q}_{\bar{x}} = ½(\bar{q}_{09} + \bar{q}_{10}) = ½\cdot (85,130,55) = (½\cdot 85, ½\cdot 130, ½\cdot 55)$

$= (42.5,65,27.5)$

Samaan tulokseen päästään (, jos niin halutaan) laskemalla

ensin $½ \bar{q}_{09} = (½\cdot 35, ½\cdot 60, ½\cdot 30) = (17.5, 30, 15)$

ja $½ \bar{q}_{10} = \quad = (25, 35, 12.5)$

_____

ja sitten nämä yhteen. (42.5,65,27.5)

Siis

(7) $½(\bar{q}_{09} + \bar{q}_{10}) = ½ \bar{q}_{09} + ½ \bar{q}_{10}$

eli vakiolla kertomisen ja yhteenlaskun järjestystä voi vaihtaa.

Kaikkien kolmen vuoden vektoreina esitettyjen ”hyödykekorien”

$\bar{q}_{09}$ = (35,60,30), $\bar{q}_{10}$ = (50,70,25) ja $\bar{q}_{11}$ = (120,90,50)

”summakori"		KJ		TU		IP	
$\bar{q}_{09}$	=	(35	,	…	,	…	)
$\bar{q}_{10}$	=	(50	,	…	,	…	)
$\bar{q}_{11}$	=	(120	,	…	,	…	)
		———		———		———	
on		205		220		105	

siis vektori $\bar{q}_s$ = (205,220,105).

Selvästi (tarkista) samaan tulokseen päästään yhtä hyvin

- laskemalla ensin yhteen vuosien 2009 ja 2010 määrät ja lisäämällä sitten summaan vuoden 2011 määrät tai

- lisäämällä vuoden 2009 määriin vuosien 2010 ja 2011 yhteenlasketut määrät tai

- laskemalla suoraan yhteen kaikkien kolmen vuoden määrät.

Siis

(2) $(\bar{q}_{09} + \bar{q}_{10}) + \bar{q}_{11} = \bar{q}_{09} + (\bar{q}_{10} + \bar{q}_{11}) = \bar{q}_{09} + \bar{q}_{10} + \bar{q}_{11}$

ja vektorien yhteenlasku on myös **liitännäinen**.

Vuosina 2009 ja 2010 määrien $\bar{q}_{09} = (35,60,30)$ ja $\bar{q}_{10} = (50,70,25)$

eron suuruus on

KJ	TU	IP
35-50 = -15	… - … = -10	= 5

eli vektorina $\bar{d}_{09\text{-}10} = (-15,-10,5)$.

Näin **vektorien vähennyslasku**

$\bar{q}_{09} - \bar{q}_{10} = \bar{q}_{09} + (-1)\cdot\bar{q}_{10}$

tarkoittaa, että **vastinkomponentit vähennetään toisistaan**.

Jos kulutuksen ero lasketaan toisin päin, saadaan

$\bar{d}_{10\text{-}09} = \bar{q}_{10} - \bar{q}_{09} = (50,70,25) - (35,60,30)$

$= (15,10,-5)$

$= (-1)(-15,-10,5) = (-1)\,\bar{d}_{09\text{-}10}$.

(4) Näitä vektoreita sanotaan toistensa **vastavektoreiksi**,

ja merkintä on vastaavanlainen kuin reaaliluvun vastaluvulla

$\mathbf{\bar{d}_{10\text{-}09} = -\,\bar{d}_{09\text{-}10}}$.

↑

Jos kulutetut määrät olisivat olleet vuonna 2008 samat kuin vuonna 2009, niin kulutusten erojen suuruus on nolla kaikilla hyödykkeillä.

Silloin vektoreina

$\bar{q}_{09} - \bar{q}_{08} = (35,60,30) - (35,60,30) =$ **(0,0,0)**,

ja tarvitaan käsite

(3) **nollavektori**, joka on vektori, jonka kaikki komponentit ovat nollia.

Edellä nähtyjen ”luonnollisten ominaisuuksien” (, joista edellisessä puuttuvat tässä ilmeiset (6) ja (8), ks. myöhemmin) perusteella $\mathbf{R^3}$:n vektorit muodostavat **lineaariavaruuden**, johon liittyvä yleinen teoria saadaan näin käyttöön.

Esimerkistä nähdyn mukaan **määritellään** yleisesti $\mathbf{R^n}$:n vektoreille:

Nollavektorin $\bar{0} = (0,0,\ldots,0) \in \mathbf{R^n}$ kaikki komponentit ovat nollia.

Yksikkövektorissa $\bar{e}_i = (0,\ldots,0,\mathbf{1},0,\ldots,0) \in \mathbf{R^n}$ on i:s komponentti 1 ja muut nollia.

Vektorin $\bar{x} = (x_1,\ldots, x_n) \in \mathbf{R^n}$ ***vastavektori*** on

$$\mathbf{-\bar{x} = (-x_1,\ldots,-x_n) \in R^n}.$$

Siis komponentit ovat vastalukuja.

Vakiolla kertominen

Jos $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R^n}$ ja a on vakio, niin

$$\mathbf{a}\bar{x} = a(x_1,\ldots,x_n) = (\mathbf{a}x_1,\ldots,\mathbf{a}x_n) \in \mathbf{R^n}.$$

Komponentit a-kertaistetaan.

Yhteenlasku

Jos $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R^n}$, niin

$\bar{x} + \bar{y} = (x_1+y_1,\ldots, x_n+y_n)$.

Vastinkomponentit lasketaan yhteen.

Vähennyslasku seuraa yhteenlaskusta ja vakiolla kertomisesta:

$\bar{x} - \bar{y} = \bar{x} + (-1)\,\bar{y} = (x_1-y_1 ,\ldots, x_n-y_n)$.

Siis vastinkomponentit vähennetään toisistaan.

Kun vektori $\bar{x} = (x_1,x_2) \in \mathbf{R^2}$ tai $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R^3}$, sillä on (monissa sovelluksissa tärkeä)

geometrinen tulkinta:

Vektoria $\bar{x}$ vastaa koordinaatistossa **suunnattu jana**,

- joka lähtee pisteestä (0,0) (tai (0,0,0)) ja

- päättyy pisteeseen (x_1,x_2) (tai (x_1,x_2,x_3)).

- Lisäksi **tulkitaan**, että vektori voidaan siirtää suuntansa ja pituutensa säilyttäen mihin tahansa koordinaatistossa, ja se on edelleen sama vektori.

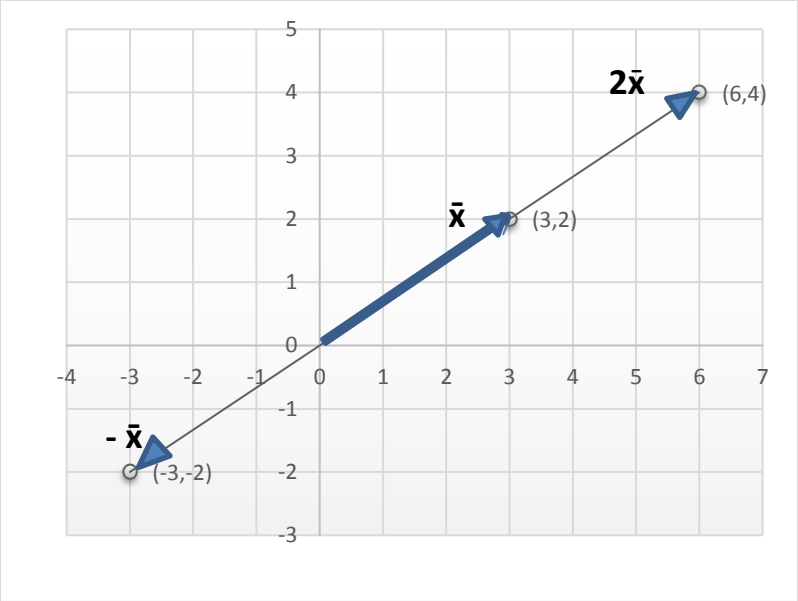
Tulkinta on tärkeä käsiteltäessä suureita, joilla on **suuruus** ja **suunta**, kuten esimerkiksi nopeus esim. 50 km/h koilliseen päin.

Esim. $\bar{x} = (3,2) \in \mathbf{R^2}$

Vastavektori: $-\bar{x} = \ldots = (-3,-2)$

Vakiolla kertominen: Esim. $2\bar{x} = \ldots = (6,4)$

Vektorit suunnattuina janoina:



- $\bar{x}$ on saman pituinen mutta vastakkaissuuntainen kuin $\bar{x}$.

Vakiolla 2 kertominen ”venyttää” $\bar{x}$:n 2-kertaiseksi.

Yhteenlasku: Esim. $\bar{x} = (3,1)$ ja $\bar{y} = (1,2) \in \mathbf{R^2}$

$\bar{x} + \bar{y} = (\ldots + \ldots , \ldots + \ldots) = (4,3)$.

Geometrisesti:

Vektorin $\bar{x} + \bar{y}$ ”kärkipisteeseen” päädytään ”etenemällä koordinaatistossa

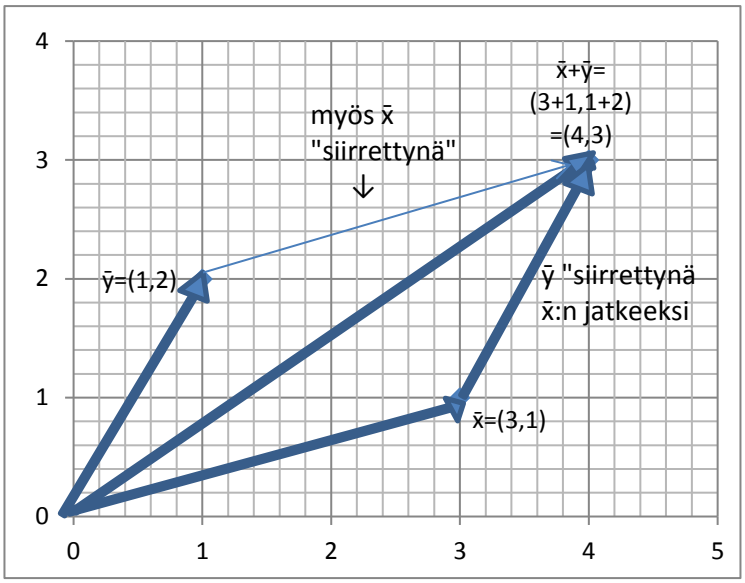
- 1. koordinaattiakselin suunnassa ensin 3 yksikköä ja sitten 1 yksikkö
- 2. koordinaattiakselin suunnassa ensin ? yksikköä ja sitten ? yksikköä

(- ja jos vektorit olisivat $\mathbf{R^3}$:ssa vielä samoin 3. koordinaattiakselin suunnassa)

Geometrisesti tämä tarkoittaa, että vektorin $\bar{x} + \bar{y}$ kärkipiste saadaan

siirtämällä vektori $\bar{y}$ vektorin $\bar{x}$:n jatkeeksi.

Vektoria $\bar{x} + \bar{y}$ vastaa suunnattu jana, joka alkaa origosta ja päättyy ”siirretyn” $\bar{y}$:n kärkipisteeseen:



Vähennyslasku palautuu yhteenlaskuun $\bar{x} - \bar{y} = \bar{x} + (-\bar{y})$.

Edellinen tulkinta on äärimmäisen tärkeä fysiikan ilmiöiden käsittelyssä.

Aivan muissa (esim. taloustieteellisissä) sovelluksissa samaan ”visuaaliseen mielikuvaan” perustuu kvantitatiivisten empiiristen muuttujien **tilastollisen riippuvuuden** tutkiminen. Riippuvuuden astetta ja suuntaa kuvaa muuttujien arvoista ”sopivalla tavalla pakattujen” n-ulotteisten **vektoreiden välisen kulman** cosini $\mathbf{R}^n$:ssä. Tätä käsitellään myöhemmin.

Esimerkissä (KJ, TU ja IP) nähdyn mukaan $\mathbf{R}^n$:n vektoreilla on ominaisuudet, joiden perusteella $\mathbf{R}^n$ on **lineaariavaruus**:

(1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (**vaihdannaisuus**)

(2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (**liitännäisyys**)

(3) On olemassa **nollavektori** $\bar{o} = (0, 0, \ldots, 0)$

(4) Vektorilla $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ on **vastavektori** $-\bar{x} = (-x_1,\ldots,-x_n)$

(5) $a(b\bar{x}) = b(a\bar{x}) = ab\cdot\bar{x}$

(6) $1\cdot \bar{x} = \bar{x}$

(7) $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$

(a ja b $\in$**R** ovat vakioita.)

(8) $(a+b)\,\bar{x} = a\bar{x} + b\bar{x}$

Vakioilla kertomalla ja yhteen laskemalla (lineaarisen yhdistelyn avulla) voidaan vektoreista $\bar{x}$, $\bar{y}$, … tehdä uusia vektoreita.

Esim. $\bar{x} = (2,1,0)$ ja $\bar{y} = (1,-3,-4) \in \mathbf{R^3}$.

$\bar{z} = 4\,\bar{x} - 2\,\bar{y} =$ …

$= (6,10,8)$

Tällaista vektoria

$$\mathbf{\bar{y} = a_1\,\bar{x}_1 + a_2\,\bar{x}_2 + \ldots + a_n\,\bar{x}_n}$$

sanotaan vektorien $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, … , $\bar{x}_n$ **lineaariyhdistelyksi** (**-kombinaatioksi**).

Toisaalta

Esim. Jos vektori $\bar{x} = (3,-2)$, $\bar{y} = (-1,4)$ ja $\bar{z} = (5,4) \in \mathbf{R^2}$,

voidaanko $\bar{z}$ esittää vektorien $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ lineaarikombinaationa?

Siis onko olemassa vakiot a ja b niin, että $\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$?

Ehdosta (5,4) = a(3,-2) + b(-1,4)

saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3a + (-1)b = 5 \\ -2a + 4b = 4 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on … a=2.4 ja b=2.2.

Tällaisia vektoreita sanotaan **lineaarisesti riippuviksi**.

Tämän mukaan **määritellään** yleisesti:

Vektoreita $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ sanotaan ***lineaarisesti riippumattomiksi***,

jos $a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \ldots a_n\bar{x}_n = \bar{o}$ vain silloin,

kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Muuten vektorit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ ovat **lineaarisesti riippuvia** ja ainakin jokin niistä voidaan esittää muiden vektoreiden lineaarikombinaationa.

Esim. Vektorit $\bar{x} = (3,-2)$ ja $\bar{y} = (-1,4) \in \mathbf{R^2}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, sillä:

$a\bar{x} + b\bar{y} = \bar{o} \quad \Leftrightarrow \quad a(3,-2) + b(-1,4) = (0,0)$

Tästä ehdosta saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3a - b = 0 \\ -2a + 4b = 0 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on … a=0 ja b=0.

Edellä esitettiin vektori $\bar{z} = (5,4)$ vektorien $\bar{x} = (3,-2)$ ja $\bar{y} = (-1,4)$ lineaarikombinaationa

$\bar{z} = 2.4\,\bar{x} + 2.2\,\bar{y}$.

Onko tämä vain erikoistapaus, vai voidaanko mikä tahansa vektori

$\bar{z} \in \mathbf{R^2}$ esittää vektorien $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ lineaarikombinaationa?

Siis onko olemassa vakiot a ja b niin, että

$a\bar{x} + b\bar{y} = \bar{z}\ ? \Leftrightarrow a(3,-2) + b(-1,4) = (z_1,z_2)$

Tästä ehdosta saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3a - b = z_1 \\ -2a + 4b = z_2 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on(?) … …

$a = 0.4z_1 + 0.1z_2$ ja $b = 0.2z_1 + 0.3z_2$.

Edellä erikoistapauksessa $z_1=5$ ja $z_2=4$ saatiin a=2.4 ja b=2.2.

Siis vektorit $\bar{x} = (3,-2)$ ja $\bar{y} = (-1,4) \in \mathbf{R^2}$

- ovat lineaarisesti riippumattomia ja

- mikä tahansa vektori $\bar{z} \in \mathbf{R^2}$ esittää vektorien $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ lineaariyhdistelynä.

Silloin sanotaan, että vektorit $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat $\mathbf{R^2}$:n (eräs) **vektorikanta**.

Yleisesti **määriteltynä**:

Jos vektorit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in \boldsymbol{R^n}$

- ovat ***lineaarisesti riippumattomia*** *ja*

- ***jokainen*** *vektori* $\bar{z} \in \boldsymbol{R^n}$ *voidaan esittää* ***yksikäsitteisesti*** *vektoreiden* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ ***lineaarikombinaationa,***

niin vektorit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ *ovat* $\boldsymbol{R^n}$*:n* ***kanta****.*

Erityisesti (koordinaattiakselien suuntaiset) yksikkövektorit

$\mathbf{\bar{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)} \in \mathbf{R^n}$, i = 1,2,…,n,

ovat tärkeä $\mathbf{R^n}$:n kanta:

<u>Esim.</u> $\bar{x} = (2,-3,4) \in \mathbf{R^3}$.

$2\,\bar{e}_1 - 3\,\bar{e}_2 + 4\,\bar{e}_3 = 2\cdot(1,0,0) + (-3)\cdot(0,1,0) + 4\cdot(0,0,1)$

= (2,-3,4) = $\bar{x}$.

Siis vektori $\bar{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ voidaan esittää

yksikkövektorien $\bar{e}_i = (0, \ldots, \mathbf{1}, \ldots, 0)$ lineaarikombinaationa,

i:s ↑ komponentti

jossa kertoimina ovat $\bar{x}$:n komponentit $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Kun vektoreihin $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ on ”pakattu” havaintoaineistosta saatuja muuttujien arvoja, voidaan tätä informaatiota muokata vektorien lineaarikombinaatioiden avulla ja saada tietoa muuttujien kuvaaman ilmiön ominaisuuksista. Teknisenä apuneuvona tässä on analogia alun perin aivan eri tarkoitukseen käytettyjen suunnattujen janojen kanssa.

Tällaisten vektorien välisen **”kulman” suuruudella** on tärkeä yhteys muuttujien välisen **”riippuvuuden”** suuruuteen ja luonteeseen.

Tätä varten on voitava yhdistää vektorien sisältämää informaatiota **kertolaskun**(?) avulla.

Kuitenkaan Intuitiivisesti luonnollinen vektorien kertolaskun määrittelyn mahdollisuus ei tuota hyvin toimivaa käsitettä! Vaan

Esim.(jatkoa) (**Laspeyres'n hintaindeksi**)

Ekonomisti E:n käyttämät luonnontuotteiden hinnat ja seurantaviikon aikana kulutetut määrät vuosina 2009, 2010 ja 2011 ovat:

	Hinnat			Määrät		
Vuosi	KJ (€/dl)	TU (€/g)	IP (€/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)
2009	0,40	0,50	1,40	**35**	**60**	**30**
2010	0,80	0,60	2,00	50	70	25
2011	0,30	0,80	4,00	120	90	50

Kuinka suuri on näiden hyödykkeiden "**hintatason**" suhteellisen muutos (**perus-**)vuodesta 2009 (**vertailu-**)vuoteen 2010?

Perusvuonna kulutettujen määrien ”kori” vektorina esitettynä on

$\bar{q}_0 = (\mathbf{35,60,30})$.

Jos tämä kori ostetaan perusvuoden 2009 hinnoin, jotka ovat

vektorina merkittynä

$\bar{p}_0 = (0.40,0.50,1.40)$,

hinnat ja määrät eli vektorien $\bar{p}_0$ ja $\bar{q}_0$

vastinkomponentit kerrotaan keskenään ja **lasketaan yhteen**.

Tätä vektoreille tehtävää operaatiota sanotaan **skalaarituloksi** (sisätuloksi) ja merkintänä käytetään

↓

$\bar{p}_0 \bullet \bar{q}_0 = 0.40 \cdot \mathbf{35} + 0.50 \cdot \mathbf{60} + 1.40 \cdot \mathbf{30} = 86$ €.

Jos sama perusvuoden määräkori $\bar{q}_0 = (\mathbf{35,60,30})$ ostettaisiin tarkasteluvuoden t=2010 hinnoin $\bar{p}_{2010} = (0.80,0.60,2.00)$,

sen arvo saadaan skalaaritulona

$\bar{p}_{2010} \bullet \bar{q}_0 =$ **...** $\cdot$ **...** $+$ **...** $\cdot$ **...** $+$ **...** $\cdot$ **...** $= 124$ €.

Koska ostettava määrä**kori pysyy samana**, niin sen ostamiseen tarvittavan rahasumman muutos aiheutuu **”hintatason” muuttumisesta.**

Perusvuoden 2009 **korin arvon suhteellinen muutos** tarkasteluvuoteen 2010 verrattuna on

$$\frac{124}{86} \sim 1.442$$

ja tämä arvo tulkitaan (**määritellään**) **hintatason suhteelliseksi muutokseksi** näiden vuosien välillä.

Tulos on hintojen suhteellisten muutosten eli **hintasuhteiden** välissä ja on siten ”järkevä” yhteenveto niistä.

Edellä esimerkissä kuvailtu hintatason suhteellisen muutoksen

mittari on **Laspeyres´n hintaindeksi**.

Siis Laspeyres’n hintaindeksi voidaan esittää (, jos niin halutaan(?))

hinta- ja määrävektoreiden skalaaritulojen avulla

$$P_{t_0}^{t}(La) = \frac{\bar{p}_t \bullet \bar{q}_0}{\bar{p}_0 \bullet \bar{q}_0} = \frac{\sum p_{it} q_{i0}}{\sum p_{i0} q_{i0}} = \frac{124}{86} \sim 1.442,$$

missä

$q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$ ovat perusajanjakson t_0 määrät,

$p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0}$ perusajanjakson t_0 hinnat ja

$p_{1t}, p_{2t}, \ldots, p_{nt}$ tarkasteluajanjakson t hinnat.

Laspeyres´n hintaindeksi siis

- **mittaa** perusajanjakson korin arvon suhteellista muutosta tarkasteluajanjaksoon mennessä

- ja sen arvo **tulkitaan** hintatason suhteelliseksi muutokseksi.

Samalla tavalla esimerkissä voidaan laskea hintatason suhteellinen muutos vuodesta 2009 vuoteen 2011 $P_{2009}^{2011}(La)$.

Huom. Vektorien mukaan ottaminen ei tuo mitään merkittävää lisää indeksien teorian tutkimiseen. Vektorit ovat tässä ”pakkauksia”, joihin voidaan säilöä hyvään järjestykseen hinta- ja määrätietoja. Esimerkiksi **kuluttajahintaindeksi** lasketaan kuukausittain tämän 200 vuotta vanhan menetelmän mukaan ja siinä tarvitaan tiedot noin 400 hyödykkeestä.

Myöskään tässä varsin yksinkertaisessa (deskriptiiviseen tilastotieteeseen kuuluvassa) kysymyksessä tällaisten vektorien välisen ”kulman” suuruudesta(?) ei seuraa mitään tärkeää.

Edellisen esimerkin mukaisesti **määritellään**

vektorien $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ *ja* $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in R^n$ ***skalaaritulo***

$\bar{x}\bullet\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 +\ldots+ x_ny_n$ ($\in$ **R**, huom!)

Siis **vastinkomponentit kerrotaan keskenään ja lasketaan yhteen**.

Tuloksena saadaan reaaliluku, ei $\mathbf{R}^n$:n vektoria.

Esim. (jatkoa edelliseen) Kun lasketaan vuoden 2009 korin arvo vuoden 2009 hinnoin, on samantekevää, kummin päin hinnat ja määrät kerrotaan keskenään:

$\bar{p}_{09} \bullet \bar{q}_{09} = (0.40,0.50,1.40) \bullet (35,60,30)$

$= 0.40 \cdot 35 + 0.50 \cdot 60 + 1.40 \cdot 30$

$= 35 \cdot 0.40 + 60 \cdot 0.50 + 30 \cdot 1.40$ (**vaihdannaisuus**)

$= \bar{q}_{09} \bullet \bar{p}_{09}$.

Jos ”ostetaan” vuoden 2009 hinnoilla sekä vuoden 2009 että 2010 määrät, voidaan

- ensin laskea määrät yhteen ja sitten ”ostaa” yhteenlaskettu kori

$\bar{p}_{09} \bullet (\bar{q}_{09} + \bar{q}_{10}) = (0.40,0.50,1.40) \bullet (\mathbf{(35,60,30) + (50,70,25)})$

2) ↑ 1) ↑

$= (0.40,0.50,1.40) \bullet \mathbf{(85,130,55)} = 176$ €,

tai

- ”ostaa” erikseen vuosien 2009 ja 2010 korit ja laskea niiden arvot yhteen

2) ↓

$\bar{p}_{09} \bullet \bar{q}_{09} + \bar{p}_{09} \bullet \bar{q}_{10} = 86\ € + 90\ € = 176\ €.$

1) ↑ 1) ↑

Siis

$$\bar{\mathbf{p}}_{09} \bullet (\bar{\mathbf{q}}_{09} + \bar{\mathbf{q}}_{10}) = \bar{\mathbf{p}}_{09} \bullet \bar{\mathbf{q}}_{09} + \bar{\mathbf{p}}_{09} \bullet \bar{\mathbf{q}}_{10}$$ (**osittelulaki**)

Jos ”ostetaan” vuoden 2009 kori vuoden 2009 hinnoin ja samalla muutetaan sen arvo dollareiksi kurssilla 1.40 USD/€,

- voidaan ensin laskea korin arvo euroina ja sitten muuttaa se dollareiksi

1.40 $\bar{\mathbf{p}}_{09} \bullet \bar{\mathbf{q}}_{09}$ = 1.40·86 = 120.40 USD,

- tai muuttaa yksikköhinnat ensin dollareiksi ja ”ostaa” niillä kori

(**1.40** $\bar{\mathbf{p}}_{09}$) • $\bar{q}_{09}$ = **(0.56,0.70,1.96)** •(35,60,30) = … = 120.40 USD.

Vastaavalla tavalla kuin esimerkissä voidaan osoittaa yleisesti, että skalaaritulolla on ominaisuudet:

Jos vektorit

$\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ ja $\bar{z} = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbf{R}^n$ ja $a \in \mathbf{R}$ on vakio, niin

1. $\bar{x}\bullet\bar{y} = \bar{y}\bullet\bar{x}$ *(**vaihdannaisuus**)*

2. $\bar{x}\bullet\bar{o} = 0$

3. $(a\bar{x})\bullet\bar{y} = a(\bar{x}\bullet\bar{y}) = \bar{x}\bullet(a\bar{y})$

4. $(\bar{x} + \bar{y})\bullet\bar{z} = \bar{x}\bullet\bar{z} + \bar{y}\bullet\bar{z}$ *ja* *(**osittelulait**)*

$\bar{x}\bullet(\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x}\bullet\bar{y} + \bar{x}\bullet\bar{z}$

Näiden ominaisuuksien avulla vektorilausekkeita voidaan muokata hyvin samalla tavalla kuin reaalilukulausekkeita.

Skalaaritulo yhdistää minkä tahansa vektorien

$\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R}^n$ ”sisältämän informaation”

yksikäsitteisellä tavalla reaaliluvuksi,

$$\boxed{\begin{matrix}\bar{y}\\ \downarrow\end{matrix}}$$

jolloin se **määrittelee funktion** $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}\bullet\bar{y}$

$$\boxed{\begin{matrix}\uparrow\\ \bar{x}\end{matrix}}$$

Esim. (jatkoa indeksiaineistoon) **Jokaista** KJ-TU-IP

määräkoria $\bar{q} = (q_1,q_2,q_3) \in Q = \mathbf{R}^+ x \mathbf{R}^+ x \mathbf{R}^+$ (”määräavaruus”) ja

hintojen yhdistelmää $\bar{p} = (p_1,p_2,p_3) \in P = \mathbf{R}^+ x \mathbf{R}^+ x \mathbf{R}^+$ (”hinta-avaruus”)

vastaa yksikäsitteinen korin arvo

$v = \bar{p}\bullet\bar{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$,

joten määritellyksi tulee funktio

hinnat määrät korien arvot

$\boxed{\bar{p}}\ \boxed{\bar{q}}$ ↙

V: P x Q → R^+, V($\bar{p}$,$\bar{q}$) = $\bar{p}$•$\bar{q}$

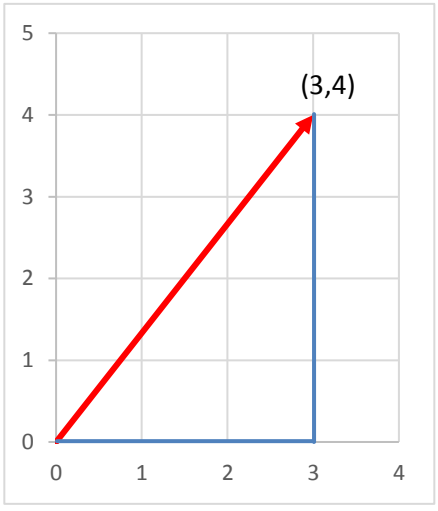
Esimerkiksi edellä laskettiin

V((0.40,0.50,1.40),(35,60,30)) = (0.40,0.50,1.40) • (35,60,30) = 86 €

eli vuoden 2009 korin arvo vuoden 2009 hinnoin.

Esim. Kun vektori $\bar{x}$ = (3,4) tulkitaan suunnattuna janana, sen **pituus** saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5



Toisaalta on $\bar{x} \bullet \bar{x} = (3,4) \bullet (3,4) = 3^2 + 4^2 = 25$

ja myös $\sqrt{\bar{x} \bullet \bar{x}} = 5$.

Sama geometrinen yhteys on olemassa myös $\mathbf{R^3}$:ssa, ja antaa mallin

vektorin $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R^n}$ **pituuden** (**normin**) **määrittelylle**

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \bullet \bar{x}} = \sqrt{(x_1, \ldots, x_n) \bullet (x_1, \ldots, x_n)} = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

↑

(Huom. Tämä normille sovittu merkintä ei tarkoita itseisarvoa.)

Esim. Vektorin $\bar{x} = (2,3,4) \in \mathbf{R^3}$ pituus

$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \bullet \bar{x}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} \sim 5.9$

kertoo, kuinka kaukana ”kärkipiste” (2,3,4) on origosta.

Vektorin $\bar{x} = (2,3,4,5) \in \mathbf{R^4}$ pituudella

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \bullet \bar{x}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{54} \sim 7.4$$

ei ole enää visuaalista geometrista tulkintaa. Kuitenkin se on vastaavalla tavalla **"yhteenveto" siitä, kuinka kaukana "kärkipisteen"** (2,3,4,5) **koordinaatit ovat origosta.**

Tilastotieteen käsitteissä tällä on tärkeä yhteys **vaihtelun suuruuden** mittaamiseen.

Vektorien $\bar{x} = (x_1,x_2)$ ja $\bar{y} = (y_1,y_2) \in \mathbf{R^2}$ **välisen kulman α suuruus**

saadaan geometrian **cosinilauseen**

$\cos\alpha = \frac{\bar{x} \bullet \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$ avulla.

Esim. Vektorit $\bar{x} = (3,0)$ ja $\bar{y} = (2,4)$

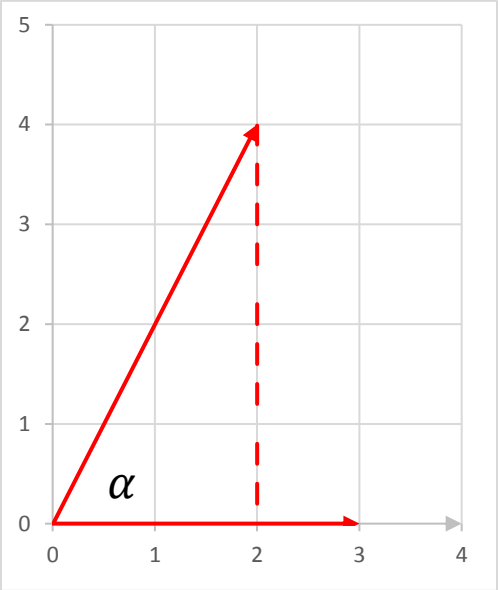
$$\cos\alpha = \frac{(3,0) \bullet (2,4)}{\sqrt{(3,0) \bullet (3,0)}\sqrt{(2,4) \bullet (2,4)}} = \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot 4}{\sqrt{3^2+0^2}\sqrt{2^2+4^2}} = 0.447$$

ja $\alpha = 63.4^\circ$.

Sama näkyy tässä

erikoistapauksessa

suorakulmaisesta kolmiosta.



Tässä $\alpha = 63.4^\circ$ on melko suuri ja vektorit $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat **melko erisuuntaiset.**

Vektoreiden $\bar{x} = (3,-2)$ ja $\bar{y} = (-6,4)$ välinen kulma saadaan samalla tavalla (Piirrä myös kuva.):

$$\cos\alpha = \frac{(3,-2)\bullet(-6,4)}{\sqrt{(3,-2)\bullet(3,-2)}\sqrt{(-6,4)\bullet(-6,4)}}$$

$= \ldots$

$= -1$

ja $\alpha = 180^\circ$

ja vektorit ovat **täysin vastakkaissuuntaiset**, jolloin vastinkomponentit $x_1=3$ ja $y_1= -2$ sekä $x_2= -6$ ja $y_2=4$ ”menevät aivan eri suuntaan”.

$\mathbf{R^3}$:ssa vektorien välinen kulma lasketaan samalla tavalla ja sillä on sama (”astelevyllä mitattavissa oleva”) geometrinen tulkinta.

Vaikka tavallista geometrista tulkintaa ei enää ole $\mathbf{R^4}$:ssä jne., vektorien välisen **kulman käsite** yleistetään myös tällaisille vektoreille, jolloin se **mittaa vastinkomponenttien ”samaan/erisuuntaan suuntautumisen astetta”:**

Vektorien $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ *ja* $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \boldsymbol{R^n}$

välisen kulman α ***määrittelee***

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{\bar{x}\bullet\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}}\ .$$

Esim. Vektorien $\bar{x} = (2,-3,4,-1)$ ja $\bar{y} = (3,-4,5,-2) \in \mathbf{R^4}$ välinen ”kulma”:

$$\cos\alpha = \frac{(2,-3,4,-1)\bullet(3,-4,5,-2)}{\sqrt{(2,-3,4,-1)\bullet(2,-3,4,-1)}\,\sqrt{(3,-4,5,-2)\bullet(3,-4,5,-2)}}$$

$= \ldots$

$\sim 0.994,$

jolloin $\alpha \sim 6.4^{\circ}$.

$\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat **lähes samansuuntaiset**,

mikä näkyy **vastinkomponenttien samankaltaisuudesta**:

+ merkkisiä ja melko saman suuruisia

↓ ↓ ↓ ↓

$\bar{x}$ = (2,-3,4,-1) ja $\bar{y}$ = (3,-4,5,-2)

↑ ↑ ↑ ↑

- merkkisiä ja melko saman suuruisia

$\bar{x}$:n komponenttien suuruudet ja merkit ”ennustavat” tässä hyvin $\bar{y}$:n vastinkomponenttien merkin ja suuruuden.

Tärkeä erikoistapaus on tilanne, jossa $\bar{x} \bullet \bar{y} = 0$, jolloin

$\cos\alpha = \frac{\bar{x} \bullet \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = 0$ ja $\alpha = 90^\circ$.

Tällaiset vektorit $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat keskenään kohtisuoria (**ortogonaalisia**).

Silloin vektorit ovat ”**kaikkein erisuuntaisimpia**” siinä mielessä, että

vektorin $\bar{x}$ komponenttien merkki ja suuruus ei ennusta $\bar{y}$:n vastinkomponenttien merkkiä ja suuruutta.

Tilastotieteen sovelluksissa tämä tilanne vastaa muuttujien välistä **riippumattomuutta**:

Jos vektoreihin $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, … on ”pakattu” empiirisistä muuttujista mitattua informaatiota

(esim. x = hyödykkeen yksikköhinta ja y = kysynnän määrä),

tällaisten vektorien välisen **”kulman” suuruudella** on erittäin tärkeä yhteys muuttujien välisen **riippuvuuden** tutkimiseen:

Esim. Taulukossa ovat viiden opiskelijan

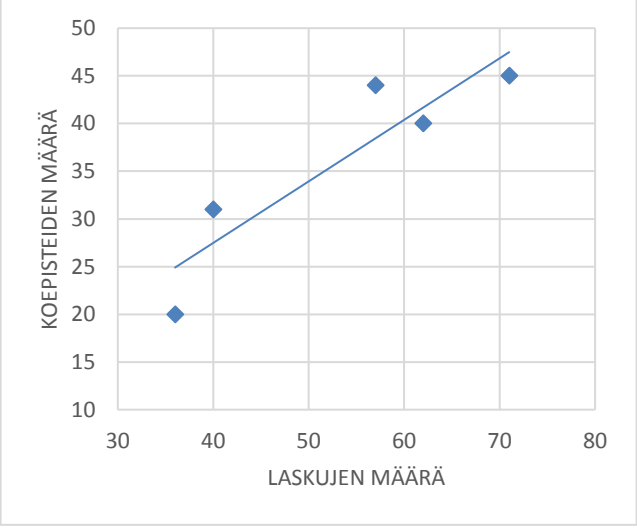
x = laskettujen harjoitustehtävien ja y = koepisteiden määrät

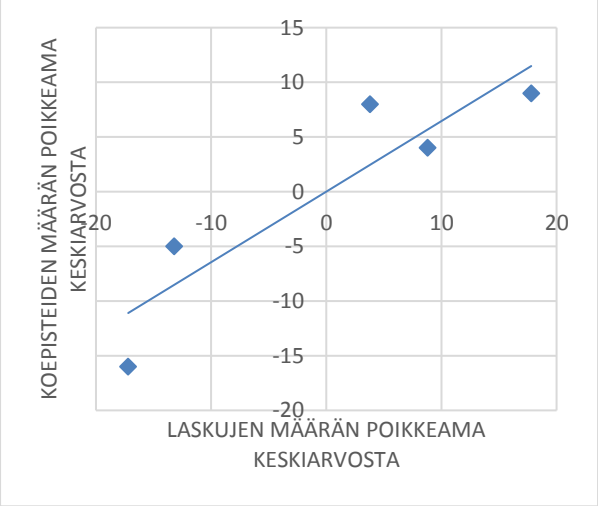
sekä näiden arvojen poikkeamat keskiarvosta eli **keskistetyt arvot**

$u_i = x_i - \bar{x}$ ja $v_i = y_i - \bar{y}$. (Huom. Tässä $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ tarkoittavat keskiarvoja.)

x_i	y_i	u_i	v_i
71	45	17,8	9
62	40	8,8	4
57	44	3,8	8
40	31	-13,2	-5
36	20	-17,2	-16

Alkuperäisistä ja keskistetyistä arvoista piirretyt hajontakuviot ovat:





Kuvioihin on myös piirretty ”niihin parhaiten sopivat” (pienimmän neliösumman) suorat. Pisteet keskittyvät molemmissa kuvioissa yhtä tiiviisti suoran ympärille.

Tällainen selvä keskittyminen kuvaa muuttujien x ja y välistä voimakasta

lineaarista riippuvuutta:

- Kun x on **pieni**, myös y on **pieni**, ja kun x on **suuri**, myös y on **suuri**.

Silloin myös keskistetyillä arvoilla on:

- Kun $u_i = x_i - \bar{x}$ on **pieni**, myös $v_i = y_i - \bar{y}$ on **pieni**, ja päinvastoin.

- Siis

koepisteiden määrät poikkeavat keskiarvosta **samaan suuntaan** kuin harjoituspisteiden määrät.

Muuttujien x ja y välisen **lineaarisen riippuvuuden voimakkuuden** ja **suunnan** mittaaminen perustuu keskistettyjen arvojen ”saman suuntaisuuden asteen” tarkasteluun:

Kun keskistetyt arvot ”pakataan” vektoreiksi

$\bar{u}$ = (+17.8,+8.8,+3.8,-13.2,-17.2) ja $\bar{v}$ = (+9,+4,+8,-5,-16)

↖ ↗

vastinkomponentit ”**samaan suuntaan**”,

nämä **vektorit** ovat hyvin ”**samansuuntaiset**”.

- Vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ välinen **”kulma”** on silloin **pieni**.

Sen cosini saadaan $\bar{u}$:n ja $\bar{v}$:n sklaaritulon ja normien avulla

$$\cos\alpha = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{17.8\cdot 9+\cdots+(-17.2)\cdot(-16)}{\sqrt{17.8^2+\cdots+(-17.2)^2}\sqrt{9^2+\cdots+(-16)^2}} \sim 0.910$$

ja ”kulma” (5-ulotteisessa avaruudessa!) $\alpha \sim 24.2°$ on melko pieni.

Keskistettyjen jakaumavektoreiden välisen kulman cosinia käytetään muuttujien välisen lineaarisen riippuvuuden mittarina ja sitä sanotaan

korrelaatiokertoimeksi.

Siis kvantitatiivisten muuttujien x ja y yhteisjakaumassa

(x_1,y_1), (x_2,y_2), …, (x_n,y_n) havaittavaa **lineaarista riippuvuutta**

mittaa **(Pearsonin) korrelaatiokerroin** r (tai r_{xy}), joka on

keskistettyjen vektorien

$\bar{u} = (x_1-\bar{x}, x_2-\bar{x}, \ldots, x_n-\bar{x})$ jā **$\bar{v} = (y_1-\bar{y}, y_2-\bar{y}, \ldots, y_n-\bar{y})$** ($\bar{x}$ ja $\bar{y}$ tässä keskiarvot)

välisen **kulman cosini**

$$\swarrow \bar{u} \cdot \bar{v}$$

$$\mathbf{r} = \frac{\sum(\mathbf{x_i}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y_i}-\bar{\mathbf{y}})}{\sqrt{\sum(\mathbf{x_i}-\bar{\mathbf{x}})^2 \sum(\mathbf{y_i}-\bar{\mathbf{y}})^2}}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

$$|\bar{u}| \qquad |\bar{v}|$$

Tästä voidaan muokata varsin helposti myös muita sääntöjä korrelaatiokertoimen laskemiseksi.

Muuttujan x arvojen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **vaihtelun suuruutta** voidaan mitata keskistettyjen muuttujan arvojen $u_i = x_i - \bar{x}$, i=1, …, n, **normin avulla**:

Esim. (jatkoa)

x_i	y_i	u_i	v_i
71	45	17,8	9
62	40	8,8	4
57	44	3,8	8
40	31	-13,2	-5
36	20	-17,2	-16

Keskiarvot ovat $\bar{x} = 53.2$ ja $\bar{y} = 36.0$.

Laskettujen laskujen määrää x_i vastaava keskistetty arvo $u_i = x_i - \bar{x}$ mittaa poikkeamaa keskiarvosta.

Näistä arvoista kootun R^5:n

vektorin $\bar{u} = (17.8, 8.8, 3.8, -13.2, -17.2)$ ”pituus” on

$$|\bar{u}| = (\sqrt{u_1{}^2 + \cdots + u_n{}^2}) = \sqrt{17.8^2 + \cdots + (-17.2)^2}$$

$$= \sqrt{878.8} \sim 29.6.$$

Laskujen määrän x (otos)keskihajonta on

$$s_x = \left(\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2} \right) = \sqrt{\frac{17.8^2 + \cdots + (-17.2)^2}{5-1}}$$

$\uparrow$

u_i

$$= \sqrt{\frac{1}{5-1}} \cdot \sqrt{17.8^2 + \cdots + (-17.2)^2}$$

$\uparrow$

$|\bar{u}|$

$$= \sqrt{\frac{1}{5-1}} \cdot \sqrt{878.8} \sim 14.8.$$

$$\left(= \sqrt{\frac{1}{n-1}}\,|\bar{u}|\right)$$

Näitä vektoriavaruuden käsitteiden ja tilastotieteen käsitteiden tärkeitä yhteyksiä ei tässä voida tutkia tarkemmin tällä kurssilla.

4.2 Matriisilaskentaa

Matriisin käsite

- Sovelluksissa vektorit ajatellaan olioiksi, joihin voidaan ”pakata” empiiristä informaatiota.

- Matemaattisesti $\mathbf{R}^n$:n vektorit muodostavat lineaariavaruuden, jonka ominaisuudet saadaan mukaan muokkaamaan tällaista tietoa.

Esim.(jatkoa) Ekonomisti E:n käyttämien luonnontuotteiden hinnat ja seurantaviikon aikana kulutetut määrät vuosina 2009, 2010 ja 2011:

	Hinnat			Määrät		
Vuosi	KJ (€/dl)	TU (€/g)	IP (€/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)
2009	0,40	0,50	1,40	35	60	30
2010	0,80	0,60	2,00	50	70	25
2011	0,30	0,80	4,00	120	90	50

Eri vuosien riveittäin esitetyt määrätiedot koottiin vaakavektoreiksi

$\bar{q}_{09}$ = [35 60 30], $\bar{q}_{10}$ = [50 70 25] ja $\bar{q}_{11}$ = [120 90 50].

Määriä voidaan myös tarkastella hyödykkeittäin eri vuosina ja koota tiedot pystyvektoreiksi

$\bar{q}_{KJ} = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \\ 120 \end{bmatrix}$, $\bar{q}_{TU} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ $\bar{q}_{IP} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$,

jotka kuvaavat kunkin hyödykkeen kulutetun määrän muuttumista ajan suhteen.

Näistä (pysty/vaaka-) vektoreista voidaan koota kokonaisuus, jossa

molemmat suunnat, sekä aika että hyödykkeen laji,

ovat mukana ”pinoamalla” pystyvektorit rinnakkain tai vaakavektorit päällekkäin (vektorien yleistyksiksi) **matriiseiksi**:

KJ	TU	IP
↓	↓	↓

$$Q = \begin{bmatrix} 35 & 60 & 30 \\ 50 & 70 & 25 \\ 120 & 90 & 50 \end{bmatrix}$$

← 2009
← 2010
← 2011

Hintatiedot voidaan pakata samalla tavalla vuosittain ja hyödykkeittäin matriisiksi P.

(Esitä P.)

m x n- matriisiksi sanotaan suorakulmion muotoon järjestettyä reaalilukukaaviota

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

← m vaakariviä eli **riviä**

↑

n pystyriviä eli **saraketta**

Myös merkintää $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$ käytetään.

Luvut a_{ij} ovat matriisin A **alkioita**.

Alkioista käytetään myös merkintää $\mathbf{a_{ij}} = [\mathbf{A}]_{\mathbf{ij}}$.

1 x 1 – matriisit samastetaan reaalilukujen kanssa.

Esimerkiksi [5] = 5 ∈ **R**.

Kun matriisissa A on m riviä ja n saraketta

sanotaan, että A on **tyyppiä m x n** tai A on m x n-matriisi.

Jos m = n, niin A on tyyppiä n oleva **neliömatriisi**.

Esim. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ on tyyppiä 3x2 ja esim. $a_{32} = [A]_{32} = 1$.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ on tyyppiä ? ja esim. $b_{13} = [B]_{13} = ?$

$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ on tyyppiä 2 oleva neliömatriisi.

Esim. Yritys tuottaa kolmea tuotetta, joiden arvo (M€) kahtena kuukautena on koottu matriisiin A ja vastaavat tuotantokustannukset (M€) matriisiin B:

1. kk 2.kk 1. kk 2. kk

↓ ↓ ↓ ↓

$$A = \begin{bmatrix} 2.6 & 4.3 \\ 1.4 & 0.7 \\ 3.8 & 2.8 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} \leftarrow 1.\,\text{tuote} \rightarrow \\ \leftarrow 2.\,\text{tuote} \rightarrow \\ \leftarrow 3.\,\text{tuote} \rightarrow \end{matrix}} \quad \begin{bmatrix} 2.1 & 4.3 \\ 0.9 & 0.6 \\ 3.9 & 2.2 \end{bmatrix} = B$$

A ja B ovat 3 x 2 – matriiseja.

Esim.(jatkoa) KJ TU IP

$$Q = \begin{bmatrix} 35 & 60 & 30 \\ 50 & 70 & 25 \\ 120 & 90 & 50 \end{bmatrix}$$ ← vuodet 2009, 2010 ja 2011

on tyyppiä 3 oleva neliömatriisi.

*Matriiseja A ja B sanotaan **yhtä suuriksi***

*ja siitä käytetään merkintää **A = B**,*

jos ne ovat samaa tyyppiä m x n ja $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i,j$ eli vastinalkiot ovat samat.

Neliömatriisin

$$A = [\, a_{ij} \,] = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

päälävistäjällä

tarkoitetaan vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan kulkevaa lävistäjää.

Jos neliömatriisin

$$A = [\, a_{ij} \,] = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & \dots & 0 \\ . & & & . \\ . & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

muut kuin lävistäjäalkiot ovat nollia, niin A on **lävistäjämatriisi**.

Jos lisäksi $\mathbf{a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1}$, niin

A on tyyppiä n oleva **yksikkömatriisi**, josta käytetään merkintää $\mathbf{I_n}$ tai **I**.

Esim.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$ on tyyppiä 3 oleva lävistäjämatriisi.

I_3 = ?

Jos neliömatriisin päälävistäjän ylä- tai alapuoliset alkiot ovat nollia, sitä sanotaan **kolmiomatriisiksi**.

Esim. Matriisit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 2 & 3 & ? & ? \\ 4 & 5 & 6 & ? \\ 7 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ ovat kolmiomatriiseja.

m x n – matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia, on **nollamatriisi**.

Matriisioperaatioita

Esim. (jatkoa) Jos terveysvalmisteiden kulutusta eri vuosina kuvaava matriisi

valmisteet

$$Q = \begin{bmatrix} 35 & 60 & 30 \\ 50 & 70 & 25 \\ 120 & 90 & 50 \end{bmatrix}$$ vuodet

muunnetaan vaihtamalla rivit ja sarakkeet keskenään

$$\text{matriisiksi } Q^T = \begin{matrix} \\ \text{valmisteet,} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2009 & 2010 & 2011 \\ \left[\begin{matrix} 35 & 50 & 120 \\ 60 & 70 & 90 \\ 30 & 25 & 50 \end{matrix}\right] & & \end{matrix}$$

on tämän **matriisin Q transpoosin Q^T** sisältämä informaatio sama kuin alunperin.

Matriisin A transpoosi A^T *saadaan vaihtamalla rivit ja sarakkeet keskenään*.

Siis $\boxed{\begin{matrix} A^T\text{: n} \\ \text{i: s rivi} \\ \text{j: s sarake} \end{matrix}} \rightarrow [A^T]_{ij} = [A]_{ji} \leftarrow \boxed{\begin{matrix} A\text{: n} \\ \text{j: s rivi} \\ \text{i: s sarake} \end{matrix}}$

Transpoosista käytetään myös merkintää **A'**.

<u>Esim.</u>(jatkoa) valmisteet

Hintamatriisin $P = \begin{matrix} \\ \text{vuodet} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 0.40 & 0.50 & 1.40 \\ 0.80 & 0.60 & 2.00 \\ 0.30 & 0.80 & 4.00 \end{matrix}\right] \end{matrix}$

transpoosi $P^T = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$

Esim. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & -6 \end{bmatrix}$ ja $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

↑ ↑

2 x 4 – matriisi 4 x 2 – matriisi

Esim. $[A^T]_{32} = 6 = [A]_{23}$

Jos tämä matriisi A^T transponoidaan vielä uudelleen, saadaan

$(A^T)^T =$ … $= A$

ja selvästi aina on $\mathbf{(A^T)^T = A}$.

Esim. Kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, on A^T = ?

Tällaista neliömatriisia, jolle $A^T = A$, sanotaan **symmetriseksi.**

Silloin siis on $\mathbf{[A]_{ij} = [A]_{ji}}$.

Esimerkiksi edellä $[A]_{23}$ = ? = $[A]_{32}$.

Kaikki yksikkömatriisit I_n ovat symmetrisiä.

Transponointi ei muuta matriisiin säilötyn informaation sisältöä eikä määrää, mutta se lisää sen muokkaamisen mahdollisuuksia.

Vektorit ovat matriisien erikoistapauksia, joten matriiseille määriteltävien operaatioiden on oltava **yhteensopivia** vektoreille määriteltyjen operaatioiden kanssa.

Esim.(jatkoa)

Edellä määriteltiin (empiirisesti järkevällä tavalla) (hinta)**vektorin** ($\bar{p}_{09}$) **kertominen** (muunnos)**vakiolla** (1.40 USD/€) niin, että

kaikki komponentit kerrotaan vakiolla.

Esimerkkinä oli

$1.40 \cdot \bar{p}_{09} = \mathbf{1.40} \cdot (0.40, 0.50, 1.40) = (\mathbf{1.40} \cdot 0.40, \mathbf{1.40} \cdot 0.50, \mathbf{1.40} \cdot 1.40)$

$= (0.56, 0.70, 1.96)$.

Jos sama muunnos halutaan tehdä samanaikaisesti kaikkien vuosien hinnoille eli kertoa hintamatriisi P vakiolla 1.40 on määriteltävä

$$1.40P = \mathbf{1.40}\begin{bmatrix} 0.40 & 0.50 & 1.40 \\ 0.80 & 0.60 & 2.00 \\ 0.30 & 0.80 & 4.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \bar{p}_{09} \\ \leftarrow \bar{p}_{10} \\ \leftarrow \bar{p}_{11} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1.40} \cdot 0.40 & \mathbf{1.40} \cdot 0.50 & \mathbf{1.40} \cdot 1.40 \\ \mathbf{1.40} \cdot 0.80 & \mathbf{1.40} \cdot 0.60 & \mathbf{1.40} \cdot 2.00 \\ \mathbf{1.40} \cdot 0.30 & \mathbf{1.40} \cdot 0.80 & \mathbf{1.40} \cdot 4.00 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.56 & 0.70 & 1.96 \\ 1.12 & 0.84 & 2.80 \\ 0.42 & 1.12 & 5.60 \end{bmatrix}.$$

Vakiolla kertominen: Jos A on matriisi ja k on vakio, niin

$$\boldsymbol{kA = k[\, a_{ij}\,] = [\, ka_{ij}\,],}$$

siis kaikki alkiot kerrotaan k:lla.

Esim. $3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \qquad = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$

Myös vektoreille määritelty **yhteenlasku yleistyy** vastaavalla tavalla kaikille matriiseille:

Yhteenlasku*:** Jos matriisit A ja B ovat tyyppiä m x n, on niiden ***summa

$$\boldsymbol{A + B = [\, a_{ij}\,] + [\, b_{ij}\,] = [\, a_{ij} + b_{ij}\,],}$$

siis vastinalkiot lasketaan yhteen.

Esim. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 7 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Vähennyslasku seuraa vakiolla kertomisesta ja yhteenlaskusta:

A – B = A + (-1)B = $[a_{ij}] + (-1)[b_{ij}] = [a_{ij}] + [-b_{ij}] =$ ***$[a_{ij}-b_{ij}]$,***

siis vastinalkiot vähennetään toisistaan.

Esim. Yritys tuottaa kolmea tuotetta joiden arvo (M€) kahtena kuukautena on koottu matriisiin A ja vastaavat tuotantokustannukset matriisiin B:

1. kk 2 .kk 1. kk 2. kk

↓ ↓ ↓ ↓

$$A = \begin{bmatrix} 2.6 & 4.3 \\ 1.4 & 0.7 \\ 3.8 & 2.8 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} \leftarrow 1.\,\text{tuote} \rightarrow \\ \leftarrow 2.\,\text{tuote} \rightarrow \\ \leftarrow 3.\,\text{tuote} \rightarrow \end{matrix}} \quad \begin{bmatrix} 2.1 & 4.3 \\ 0.9 & 0.6 \\ 3.9 & 2.2 \end{bmatrix} = B$$

Matriisi

$$A - B = \begin{bmatrix} 2.6 & 4.3 \\ 1.4 & 0.7 \\ 3.8 & 2.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.1 & 4.3 \\ 0.9 & 0.6 \\ 3.9 & 2.2 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

kuvaa eri tuotteista saatavaa voittoa 1. ja 2. kuukautena.

Yhteenlasku ja vakiolla kertomien voidaan ajatella tehtäväksi vaaka- (tai yhtä hyvin pysty-)vektori kerrallaan. Silloin kaikki edellä todetut vakiolla kertomisen ja yhteenlaskun ominaisuudet siirtyvät samanlaisina kaikille matriiseille ja

matriisit samoin kuin niiden erikoistapaukset vektorit muodostavat **lineaariavaruuden**:

Olkoot A, B ja C m x n – matriiseja sekä a ja b vakioita.

(Ks. edeltä (1) – (8) vektoreille.)

(1) $\boldsymbol{A + B = B + A}$ (vaihdannaisuus)

(2) $\boldsymbol{(A + B) + C = A + (B + C)}$ (liitännäisyys)

(3) On olemassa ***nollamatriisi*** $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 \\ . & & . \\ . & & . \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix}$, jolle A + O = A.

(4) Matriisilla A on vastamatriisi $\boldsymbol{-A = -[a_{ij}] = [-a_{ij}]}$,

jolle A + (-A) = A – A = O.

(5) $\boldsymbol{a(bA) = b(aA) = (ab)A}$

(6) $\boldsymbol{1 \cdot A = A}$

(7) $\boldsymbol{a(A + B) = aA + aB}$

(8) $\boldsymbol{(a+b)A = aA + bA}$

Kertolasku

Alun johdannossa asetettiin tavoitteeksi, että yhtälöryhmä (moniulotteinen tilanne) voidaan ratkaista ”vastaavalla tavalla” kuin tavallinen 1. asteen yhtälö.

Jäätiin tilanteeseen:

Esim. Yritys tekee norsun ruoka-annoksia, joissa käytetään raaka-aineita A, B ja C. Niillä ovat ominaisuudet:

	A	B	C
Valmistettava määrä (kg)	x_1	x_2	x_3
N-vitamiinin määrä (mg/kg)	40	340	60
Hinta (€/kg)	10	60	20

On selvitettävä, kuinka paljon raaka-aineita A, B ja C on käytettävä, kun tehdään 100 kg:n erä, N:ää on oltava 8000 mg ja annos maksaa 2000 €?

Ehdoista saatiin yhtälöryhmä:

(1) määrä $x_1 + x_2 + x_3 = 100$

(2) N:n määrä $40x_1 + 340x_2 + 60x_3 = 8000$

(3) hinta $10x_1 + 60x_2 + 20x_3 = 2000$

Yhtälöryhmästä ”irrotettiin” omiksi kokonaisuuksikseen:

kertoimet, joilla x_1 , x_2 ja x_3 on kerrottu

tuntemattomat

side − ehdot

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} = A \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{x} \qquad \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \bar{b}$$

↑ kerroinmatriisi

↖ ↗ muuttujien ja side − ehtojen vektorit

Yhtälöryhmän ratkaisu $\bar{x}$ riippuu kerroinmatriisista A, ja side-ehtona olevasta vektorista $\bar{b}$.

Matriiseille ja (vektoreille) on määriteltävä niiden käsittelyssä tarvittavat operaatiot niin, että

- yhtälöryhmä voidaan **esittää** vastaavalla tavalla kuin tavallinen lineaarinen yhden muuttujan yhtälö

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (?)$$

- ja myös **ratkaista** se käänteisluvulla kertomista ”vastaavalla tavalla” (käänteismatriisin(?) avulla).

Jotta tämä onnistuu, myöskään (vektorien yleistyksen) matriisien kertolaskua ei ole tarkoituksenmukaista määritellä ”intuitiivisesti luonnollisimmalla tavalla” vaan

määrittely on analoginen vektorien kertolaskun kanssa:

Jos kerroinmatriisista $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix}$ ”irrotetaan” ensimmäinen

vaakavektori ja lasketaan sen skalaaritulo muuttujavektorin kanssa

$(\mathbf{1,1,1})\cdot(x_1,x_2,x_3) = \mathbf{1}x_1 + \mathbf{1}x_2 + \mathbf{1}x_3 = x_1 + x_2 + x_3,$

saadaan yhtälön (1) vasen puoli.

Samalla tavalla

$(40,340,60)\cdot(x_1,x_2,x_3) = \ldots$

ja

$(10,60,20)\cdot(x_1,x_2,x_3) = \ldots$

Tämän mukaan sovitaan, että merkintä $A\bar{x}$ tarkoittaa edellä laskettujen skalaaritulojen muodostamaa pystyvektoria

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 40x_1 + 340x_2 + 60x_3 \\ 10x_1 + 60x_2 + 20x_3 \end{bmatrix}$$

Nyt merkinnällä

$$A\bar{x} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

on sama sisältö kuin yhtälöryhmällä.

Tämän mukaan **määritellään**:

Matriisit A ja B ovat **yhteensopivia**, jos

A on m x **n**-matriisi ja B on **n** x p-matriisi

↑ huom. ↑

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathbf{n}} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2p} \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ b_{\mathbf{n}1} & \dots & \mathbf{b_{nj}} & \dots & b_{\mathbf{n}p} \end{bmatrix} \text{ n riviä}$$

n saraketta

Matriisitulo A x B määritellään A:n rivien ja B:n sarakkeiden määrittelemien (n-komponenttisten) vektoreiden **skalaaritulojen** avulla:

A x B = C = [c_{ij}], missä alkio

c_{ij} = $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$

Siis

- matriisista A otetaan **i:s rivi**

- matriisista B otetaan **j:s sarake**

- ja lasketaan **niiden skalaaritulo**.

- Rivi voidaan valita A:sta m kertaa ja sarake B:stä p kertaa.

Silloin C = A x B on **tyyppiä m x p**.

Myös lyhyenpää merkintää AB = A x B käytetään.

Esim. $A \times B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 \\ \mathbf{4} & 1 \end{bmatrix}$

$2 \times \mathbf{3} \qquad \mathbf{3} \times 2$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4} & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$$

2×2

Esim. $I_3 \times D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

$= \ldots$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix} = D$$

Samoin on

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix} = D.$$

Matriisikertolaskun säännöt seuraavat vektorien skalaaritulon ominaisuuksista:

(1) $(AB)C = A(BC)$ (liitännäisyys)

kun A on m×**n**, B on **n**×**p**- ja C on **p**×r-matriisi.

(2) $A(B + C) = AB + AC$,

kun A on m×**n**-, B ja C **n**×p-matriiseja.

(3) $(A + B)C = AC + BC$, (osittelulait)

kun A ja B ovat m×**n**-matriiseja ja C on **n**×p-matriisi.

(4) $A(aB) = (aA)B = aAB$

kun A on m×**n**- ja B on **n**×p-matriisi ja a∈**R** on vakio.

(5) $(AB)^T = B^T A^T$, kun A on m×**n**- ja B on **n**×p-matriisi.

Esim. (sääntö (5))

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB =$ … $= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$(AB)^T =$ …

$B^TA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$ …

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} = (AB)^T$

Vaihdannaisuus ei yleisesti ole voimassa, vaan yleensä on

$A \times B \neq B \times A$.

- Voi olla, että A ja B eivät edes ole yhteensopivia molemmin päin. Esimerkiksi, jos A on 2 x 5 - matriisi ja B on 5 x 4 – matriisi, A x B on määritelty, mutta B x A ei.

- Vaikka A ja B olisivatkin molemmin päin yhteensopivia, A x B ja B x A eivät välttämättä ole edes saman tyyppisiä:

Esim. A = $[2 \;\; 1]$ ja B = $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

AB = … = [2] ja

BA = … = $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

Esim.(jatkoa) Jos yhtälöryhmässä $A\bar{x} = \bar{b}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

ei kiinnitetä side-ehtoa $\bar{b}$, vaan

- annetaan ainemäärien x_1, x_2 ja x_3 määrätä

- annoksen painon y_1,N:n määrän y_2 ja hinnan y_3

- matriisin A sisältämien sääntöjen mukaan,

niin **matriisi A määrittelee (lineaarisen) funktion**,

joka kuvaa

kaikki mahdolliset ainemääräyhdistelmät $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in D = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ niitä vastaaviksi

paino- N:n määrä-hinta-yhdistelmiksi $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3) \in V = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.

Tämän funktion symbolina käytetään samaa merkintää, kuin sen määrittelevästä matriisista:

$$A:D \rightarrow V,\ \bar{y} = A\bar{x}$$

Tarkemmin

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 40x_1 + 340x_2 + 60x_3 \\ 10x_1 + 60x_2 + 20x_3 \end{bmatrix}.$$

Jos raaka-aineita on esimerkiksi A=5kg, B=10 kg ja C=20 kg eli

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$, niin vastaava paino, N:n määrä ja hinta-yhdistelmä on

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \quad \ldots. \quad = \begin{bmatrix} 35 \\ 4800 \\ 1050 \end{bmatrix}.$$

Samalla tavalla **jokainen m x n-matriisi A määrittelee funktion**

A: $R^n \rightarrow R^m$, $\bar{y} = A\bar{x}$

$$\bar{y} = A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \mathbf{\ldots} & \mathbf{a_{in}} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ \mathbf{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n} \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

m x n n x 1 m x 1

Tällaista funktiota sanotaan (matriisin A määrittelemäksi) **lineaarikuvaukseksi**.

Esim.(jatkoa) Yhtälöryhmää

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

ratkaistaessa halutaan vastaus kysymykseen:

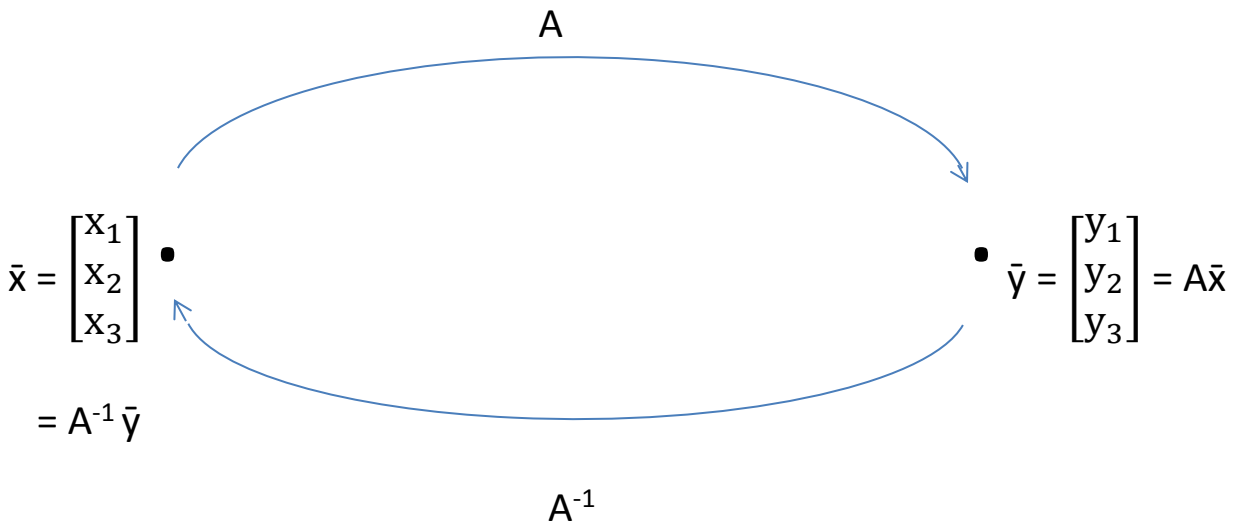
Mikä on $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, jos $A\bar{x} = \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$?

Vastaavasti voidaan kysyä neliömatriisin A määrittelemään **lineaarikuvaukseen liittyen yleisemmin**:

Mikä on $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, jos $A\bar{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \bar{y}$?

Siis voidaanko matriisista A lähtien selvittää käänteinen sääntö, joka ”palauttaa” $\bar{y}$:n $\bar{x}$:ksi, jos ensin on $\bar{y} = A\bar{x}$.

Jos tällaisen säännön määrittelevä matriisi on olemassa, se määrittelee A:ta vastaavan lineaarikuvauksen **käänteisfunktion**. Tällaista matriisia sanotaan A:n **käänteismatriisiksi** ja merkintänä käytetään $\mathbf{A^{-1}}$.



Käänteismatriisi A^{-1} voidaan johtaa A:n sisällöstä monella tavalla, mutta ensin tarvitaan lisää tietoa matriiseista (, josta vain osaa tarvitaan edellisen pienen ongelman ratkaisemiseen).

Tätä varten tarvitaan determinantin käsite:

Neliömatriisin determinantti

Esim. (jatkoa) Loitsujen tuottoa käsittelevässä lineaarisessa optimointitehtävässä edellä olivat rajoitteita vastaavat suorat

1. 30x + 60y = 24000 (1. vaiheessa käytetty maksimiaika)

60y = -30x + 24000

$$y = \frac{-30}{60} \cdot x + \frac{24000}{60}$$

y = -0.5x + 400

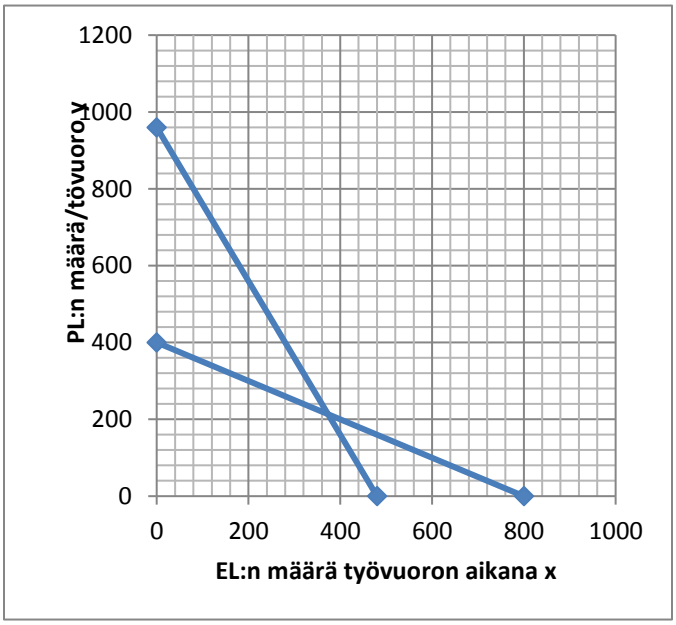
2. 10x + 5y = 4800 (2. vaiheessa käytetty maksimiaika)

5y = -10x + 4800

$$y = \frac{-10}{5} \cdot x + \frac{4800}{5}$$

y = -2x + 960

Rajoitteita 1. ja 2. vastaavat **tasa-arvosuorat**, joissa tuotantokapasiteetit (24 000 min ja 4800 min) olisivat kokonaan käytössä:



Suorien kulmakertoimet ovat erisuuruisia.

Tämän vuoksi ne leikkaavat toisensa täsmälleen yhdessä pisteessä ja yhtälöparilla on 1-käsitteinen ratkaisu (373.3,213.3).

Silloin yhtälöparin kertoimista edellä näkyy, että

$$-0.5 \neq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-30}{60} \neq \frac{-10}{5}$$

$$\Leftrightarrow 30 \cdot 5 \neq 60 \cdot 10$$

$$30 \cdot 5 - 60 \cdot 10 \neq 0$$

Yhtälöparia vastaava matriisiesitys on

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 30 & 60 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}} \underset{\bar{x}}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 24000 \\ 4800 \end{bmatrix}$$

Siis yhtälöparilla on 1-käsitteinen ratkaisu, kun kerroinmatriisin

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 60 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

alkioilla on ominaisuus **ad – bc** = $30 \cdot 5 - 60 \cdot 10$ (= -450) ≠ **0**.

Tätä (neliö-)matriisia A vastaavaa lukua sanotaan matriisin A **determinantiksi** ja siitä käytetään merkintää **det** A tai $|\mathbf{A}|$.

Siis 2x2-matrisilla $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ on **det A = ad - bc**.

Yleinen nxn – matriisin determinantin määrittely, laskeminen ja geometrinen tulkinta ei ole yhtä yksinkertainen, mutta laskeminen palautuu edelliseen erikoistapaukseen.

Matriisin A **alimatriisiksi** sanotaan matriisia, joka saadaan A:sta jättämällä siitä pois joitain rivejä ja/tai sarakkeita.

Esim.(jatkoa) Terveysvalmisteiden hintamatriisin

$$P = \begin{matrix} \\ \text{vuodet} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0.40 & 0.50 & 1.40 \\ \mathbf{0.80} & 0.60 & \mathbf{2.00} \\ \mathbf{0.30} & 0.80 & \mathbf{4.00} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

KJ TU IP

eräs alimatriisi on (1. rivi ja 2. sarake pois) on

$P_1 =$

Neliömatriisin A ***determinantti***, josta käytetään merkintöjä

$$\boldsymbol{detA = |A| =} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ ***määritellään rekursiivisesti*** :

1. Kun n=1 ja $\boldsymbol{A = [a_{11}]}$, niin $\boldsymbol{detA = a_{11}}$.

2. ***Determinantin kehittäminen*** i:nnen rivin mukaan:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \mathbf{a_{ij}} A_{ij},$$

missä A_{ij} on A:n sen alimatriisin determinantti, josta on jätetty **pois i:s rivi ja j:s sarake**.

Siis 1) 2) 3)

↘ ↓ ↙

$$\boldsymbol{detA} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{(-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}}$$

1) **$(-1)^{i+j}$** määrää **merkin**

$$\begin{bmatrix} + & - & + \cdots \\ - & + & - \cdots \\ + & - & + \cdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}$$

2) Jokaista i:nnen rivin alkiota a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in} kohti summaan tulee yhteenlaskettava, jossa ***a_{ij}:lla kerrotaan***

3) a_{ij}:tä vastaavan ***alimatriisin determinantti***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

jossa on jätetty pois i:s rivi ja j:s sarake.

4) Alideterminanttien A_{ij} laskemiseen ***toistetaan samaa menettelyä***, kunnes alimatriiseissa on vain yksi alkio.

<u>Esim.</u> 2x2-matriisi $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ (merkit $\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$)

a) 1. rivin mukaan:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = \underset{1)}{(-1)^{1+1}} \cdot \underset{2)}{4} \cdot \underset{3)}{\det[-7]} + \underset{1)}{(-1)^{1+2}} \cdot \underset{2)}{5} \cdot \underset{3)}{\det[3]} = +4 \cdot (-7) - 5 \cdot 3$$

$$= 4 \cdot (-7) - 5 \cdot 3 = -43.$$

b) 2. rivin mukaan:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = \ldots \ldots = -43.$$

a)-kohdasta näkyy hyödyllinen sääntö 2x2-matriisin determinantin laskemiseksi: (Vrt. aikaisempaan johdattelevaan esimerkkiin.)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{ad - bc}$$

c) $\det A^T = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) - 3 \cdot 5 = -43$

Voidaan osoittaa, että kaikille neliömatriiseille on **det A^T = det A**.

Siitä seuraa, että determinantti voidaan laskea myös **kehittämällä** se samalla tavalla **j:nnen sarakkeen mukaan**.

Esim. 3x3-matriisi $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (merkit $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$)

1. rivin mukaan:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +\mathbf{2}\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} (-1)\cdot\mathbf{1}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} +\mathbf{3}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - (4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7)$$

$$= -9$$

2. sarakkeen mukaan:

$$\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & \mathbf{8} & 9 \end{vmatrix} = \quad \ldots \quad = -9$$

Neliömatriisien determinanttien ominaisuuksia:

Voidaan osoittaa (todistukset sivuutetaan):

1. Jos matriisin A jonkin rivin tai sarakkeen kaikki alkiot ovat nollia, niin det A = 0.

2. Jos matriisi B saadaan kertomalla matriisin A jonkin rivin tai sarakkeen kaikki alkiot vakiolla c, niin det B = c·det A .

3. Jos matriisin A kaksi riviä (saraketta) vaihdetaan keskenään, determinantin merkki muuttuu.

4. Jos matriisissa A on kaksi (tai useampia) samaa riviä, niin det A = 0.

5. Jos matriisin A k:s rivi (sarake) kerrotaan vakiolla c ja lisätään i:nteen riviin, determinantin arvo ei muutu.

6. det AB = det A · det B

7. det A^T = det A

Erityisesti 5. ominaisuus voi helpottaa paljon laskutyötä:

Esim. (jatkoa edelliseen) _A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

- 1. rivi kerrotaan -2:lla ja lisätään 2. riviin:

→ B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4+(-2)\cdot 2 & 5+(-2)\cdot 1 & 6+(-2)\cdot 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

- B:n determinantti kehitetään 2. rivin mukaan: (merkit $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$)

$|B| = \ldots \ldots$

$= -9 = |A|.$

Matriisia voidaan muokata säännön 5. avulla, kunnes jollakin rivillä (sarakkeella) on vain yksi ykkösestä poikkeava alkio.

Käänteismatriisi

Esim. Matriiseilla

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

”sattuu olemaan” ominaisuus

$BA = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \quad \ldots \quad = I_2$

ja samoin $AB = I_2$.

Silloin sanotaan, että B on A:n **käänteismatriisi**, josta käytetään merkintää $\mathbf{A^{-1}}$ (ja samoin $B^{-1} = A$).

Siis

Jos tyyppiä n olevilla neliömatriiseilla A ja B on ominaisuus

$\boldsymbol{BA = I_n = AB}$,

ne ovat toistensa ***käänteismatriiseja***.

A:n käänteismatriisista käytetään merkintää A^{-1}.

Jos neliömatriisilla A on käänteismatriisi, sitä sanotaan **epäsingulaariseksi**.

Voidaan osoittaa, että **A on epäsingulaarinen** täsmälleen silloin, kun **det A** $\neq$ **0**.

Käänteismatriisi A^{-1} voidaan johtaa A:sta monella tavalla. Seuraava **Cramer`in menetelmä** perustuu matriisin A kofaktorien laskemiseen:

1) 3)

Matriisin A **alkiota a_{ij} vastaava kofaktori** on **$(-1)^{i+j}A_{ij}$** , missä

A_{ij} on sen A:n alimatriisin determinantti,

josta on jätetty pois i:s rivi ja j:s sarake.

Siis

1) $(-1)^{i+j}$ määrää **merkin** $\begin{bmatrix} + & - & + \cdots \\ - & + & - \cdots \\ + & - & + \cdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}$

(<u>Huom</u>. 2) Alkio a_{ij} **ei ole mukana**.)

3) a_{ij}:tä vastaava alideterminantti $A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & \cdots & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

i:s rivi ja j:s sarake pois

Voidaan osoittaa, että

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA},$$

missä ***adjungoitu matriisi adjA*** saadaan A:sta

- ***korvaamalla alkiot*** a_{ij} ***kofaktoreillaan*** $(-1)^{i+j}A_{ij}$ ja
- ***transponoimalla*** näin saatu matriisi.

Todistukset sivuutetaan. Tuloksen voi aina tarkistaa matriisikertolaskun avulla.

Esim. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

1) A:n determinantti voidaan kehittää varsin helposti minkä tahansa rivin tai sarakkeen mukaan.

Seuraavassa (harjoituksen vuoksi) ensin muokataan A:ta niin, että 1. rivillä kaikki muut alkiot paitsi ensimmäinen alkio ovat nollia.

Sen jälkeen muokatun matriisin determinantti kehitetään 1. rivin mukaan.

1. sarake kerrotaan
−3: lla ja lisätään
✓ 3. sarakkeeseen

1) $\det A = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & 5 & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \ldots \ldots = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

↑
1. sarake kerrotaan
−2: lla ja lisätään
2. sarakkeeseen

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \cancel{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} + \cancel{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$

$= 1 \cdot (-1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3)$

$= 2 \neq 0$, joten A on **epäsingulaarinen**.

2) A:n **alkiot korvataan kofaktoreillaan**:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (merkit $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$)

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 \quad -(2 \cdot 7 - 4 \cdot 1) \quad 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1]$$

$$= \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$[\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Tämän **transpoosina** saadaan

adj A = ja

4) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Tuloksen voi tarkistaa kertolaskulla.

Määritelmän mukaan on oltava $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$:

$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/2} \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{2} & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 & \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Samalla tavalla saadaan $AA^{-1} = I_3$.

Voidaan osoittaa, että seuraavat **säännöt** ovat voimassa käänteismatriisille:

Jos A ja B ovat epäsingulaarisia ja k on vakio, niin

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Erikoistapaus: Matriisia A sanotaan **ortogonaaliseks**i, jos $\mathbf{A^{-1} = A}$.

Esim. (jatkoa) Yhtälöryhmä

(1) paino $x_1 + x_2 + x_3 = 100$

(2) N:n määrä $40x_1 + 340x_2 + 60x_3 = 8000$

(3) hinta $10x_1 + 60x_2 + 20x_3 = 2000$

esitettiin matriisimerkinnöin

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisua varten tarvitaan A^{-1}:

1) Determinantin kehittäminen

(esim.) 1. rivin mukaan: (merkit $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$)

$$|A| = +1\cdot\begin{vmatrix} 340 & 60 \\ 60 & 20 \end{vmatrix} -1\cdot\begin{vmatrix} 40 & 60 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} +1\cdot\begin{vmatrix} 40 & 340 \\ 10 & 60 \end{vmatrix}$$

$= (340\cdot 20 - 60\cdot 60) -$ … + …

$=2000 \neq 0,$

joten A on epäsingulaarinen ja A:lla on käänteismatriisi A^{-1}, jonka avulla yhtälöryhmä voidaan ratkaista.

2) Kofaktorit

$$\begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 340 & 60 \\ 60 & 20 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 40 & 60 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 40 & 340 \\ 10 & 60 \end{vmatrix} \\ \\ \dots & \dots & \dots \\ \\ \dots & \dots & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 40 & 340 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \lceil & 340\cdot 20 - 60\cdot 60 & -(40\cdot 20 - 60\cdot 10) & 40\cdot 60 - 340\cdot 10 \\ = & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & 1\cdot 340 - 1\cdot 40 \end{matrix} \rfloor$$

$$= \begin{bmatrix} 3200 & -200 & -1000 \\ 40 & 10 & -50 \\ -280 & -20 & 300 \end{bmatrix}$$

3) Transponoimalla saadaan tästä

adj A = …

$$4)\ A^{-1} = \frac{1}{2000}\begin{bmatrix} 3200 & 40 & -280 \\ -200 & 10 & -20 \\ -1000 & -50 & 300 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6 & 0.020 & -0.14 \\ -0.1 & 0.005 & -0.01 \\ -0.5 & -0.025 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu saadaan käänteismatriisin avulla:

$A\bar{x} = \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A^{-1}}(A\bar{x}) = \mathbf{A^{-1}}\,\bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A^{-1}A})\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b} \Leftrightarrow \mathbf{I_3}\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b}$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b}}$$

Tässä saadaan

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0.020 & -0.14 \\ -0.1 & 0.005 & -0.01 \\ -0.5 & -0.025 & 0.15 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6 \cdot 100 + 0.02 \cdot 8000 - 0.14 \cdot 2000 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Siis annetut ehdot toteutuvat, kun A:ta on 40, B:tä 10 ja C:tä 50 kg.

Matriisi A määrittelee

lineaarikuvauksen A:D → V, missä

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 40x_1 + 340x_2 + 60x_3 \\ 10x_1 + 60x_2 + 20x_3 \end{bmatrix}.$$

joka kuvaa

kaikki mahdolliset ainemääräyhdistelmät $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in D = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ niitä vastaaviksi

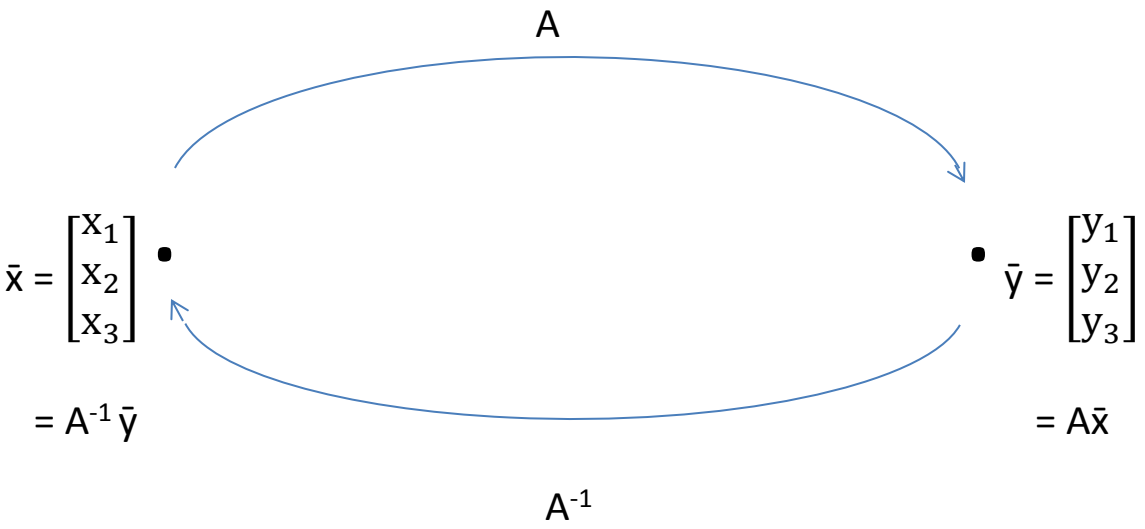
paino- N:n määrä-hinta-yhdistelmiksi $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3) \in V = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.

Käänteismatriisi A^{-1} määrittelee tämän lineaarikuvauksen

käänteisfunktion A^{-1}:V → D, missä

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\bar{y} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0.02 & -0.14 \\ -0.1 & 0.005 & -0.01 \\ -0.5 & -0.025 & 0.15 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6y_1 + 0.02y_2 - 0.14y_3 \\ -0.1y_1 + 0.005y_2 - 0.01y_3 \\ -0.5y_1 - 0.025y_2 + 0.15y_3 \end{bmatrix}.$$



Yhtälöryhmän ratkaisussa tarkasteltiin tässä erikoistapausta, jossa

matriisi A kuvaa vektorin $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}$ vektoriksi $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}$

ja käänteismatriisi A^{-1} ”kuvaa ȳ:n takaisin” vektoriksi x̄.

Kun käsitteet on opittu, matriisioperaatioiden vaivalloinen käsityönä laskeminen voidaan hoitaa helpommin (esim.) Excelin avulla.

Tässä muutamia ohjeita tarvittavista ”taikasanoista”:

Yhteenlasku ja vakiolla kertominen käy hyvin samalla tavalla kuin yksittäisissä soluissakin:

Edellä oli esimerkki, jossa matriisissa A olivat rivien suunnassa saatu tuotto kolmesta tuotteesta ja sarakkeiden suunnassa kuukaudet 1 ja 2 ja matriisissa B vastaavasti tuotantokustannukset. Voittoa kuvaa matriisi A-B, joka saadaan laskemalla (tässä taulukossa)

(esim.) soluun B8 **=B3+E3 + Enter** ja kuljettamalla B8:n kulmasta hiirtä yli kahden sarakkeen ja kolmen rivin.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		2,6	4,3		2,1	4,3		
4	A =	1,4	0,7	B=	0,9	0,6		
5		3,8	2,8		3,9	2,2		
6								
7								
8		0,5	0					
9	A-B =	0,5	0,1		A^T =	2,6	1,4	3,8
10		-0,1	0,6			4,3	0,7	2,8
11								

Matriisin A transpoosi A^T saadaan, kun

- **varjostetaan oikean kokoinen** (tässä 2x3) **alue** tässä esim. sarakkeisen E,F ja G ja rivien 9 ja 10 kohdalle ja **”lukitaan” alue painamalla f2**,

- kirjoitetaan (tässä) soluun F9

=TRANSPOSE(B3:C5) ja painetaan **Shift+Ctrl+Enter**

Matriisien kertolaskuun, determinantin laskemiseen ja käänteismatriisin määräämiseen tarvittavat toiminnot MMULT, MDETERM ja MINVERSE saa polulta

INSERT → FORMULAS → Math&Trig

tai ne voi kirjoittaa suoraan Excel-taulukon soluihin.

Tehdas vie maasta elintarvikkeita A, B ja C, joiden keskihinnat ($/t) ja määrät (tonnia) ja keskihinnat ($/t) olivat:

	Määrät			Hinnat		
Vuosi	A	B	C	A	B	C
2010	11.3	21.5	25.7	4058	5990	1909
2017	26.2	32.2	27.9	10286	12402	3009

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		4058	5990	1909				
2	P =	10286	12402	3009				
3								
4								
5	Q =	11,3	21,5	25,7				
6		26,2	32,2	27,9				
7						$PxQ^T=$	223701,7	352458,7
8		11,3	26,2				460206,1	752788,7
9	$Q^T=$	21,5	32,2					
10		25,7	27,9					
11								

Tulomatriisi PxQ^T saadaan, kun

- **varjostetaan oikean kokoinen alue** (tässä) sarakkeiden G ja F ja rivien 7 ja 8 kohdalle ja ”lukitaan” alue **painamalla f2**,

- kirjoitetaan (tässä) solun G7 kohdalle

=MMULT(B1:D2;B8:C10) ja painetaan **Shift+Ctrl+Enter**

Hintamatriisin P ja määrämatriisin Q^T tulo PxQ^T kuvaa vuosien 2010 ja 2017 vietyjen ”määräkorien” arvoa vuosien 2010 ja 2017 hinnoin, mistä voidaan mm. laskea Laspeyres´n ja Paaschen hinta-ja volyymi-indeksit.

Yhtälöryhmä

(1) paino $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 100$

(2) N:n määrä $\quad 40x_1 + 340\,x_2 + 60x_3 = 8000$

(3) hinta $\quad 10x_1 + 60\,x_2 + 20x_3 = 2000$

esitettiin matriisimerkinnöin

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 8000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Epäsingulaarisuuden varmistamiseksi tarvitaan **detA**, joka saadaan

- kirjoittamalla esim. solun F3 kohdalle (tässä)

=MDETERM(B2:D4) ja painamalla **Shift+Ctrl+Enter**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		1	1	1				
3	A =	40	340	60		2000		
4		10	60	20				
5								
6		1,600	0,020	-0,140				
7		-0,100	0,005	-0,010				
8		-0,500	-0,025	0,150				
9								
10								
11								

A:n käänteismatriisi A^{-1} saadaan, kun

- **varjostetaan oikean kokoinen** (tässä 3x3) **alue** tässä esim. sarakkeisen B,C ja D ja rivien 6,7 ja 8 kohdalle ja ”lukitaan” alue painamalla **f2**,

- kirjoitetaan (tässä) soluun B6

=MINVERSE(B2:D4) ja painetaan **Shift+Ctrl+Enter**