

Ville Turunen: (6.7.2016)  
MS-C1420 Fourier-analyysi (5 opintopistettä)

**Esitiedot:** Lineaarialgebra 1, Differentiaali- ja integraalilaskenta 1.

## 1 Johdanto

**Mitä Fourier-analyysi on?** Fourier-analyysi on läsnä kaikkialla, missä esiintyy säännöllisyyttä tai symmetrioita. Fourier-analyysin avulla tutkitaan ilmiöitä esittämällä tarkasteltava funktio eli signaali yksinkertaisten värähtelyiden yhdistelmänä. Signaalia voidaan tarkastella esimerkiksi *ajassa* (kun halutaan tietää **milloin** jotakin tapahtuu) tai *taajuudessa* (kun halutaan tietää **kuinka usein** jotakin tapahtuu), tai yhtä aikaa *aika-taajuudessa!* Näin voidaan kuvailla erityisesti aaltoliikettä kuten ääntä tai sähkömagneettista säteilyä niin, että esimerkiksi puhesignaaleista ja kuvista voidaan poistaa ei-toivottua kohinaa. Fourier-menetelmiä käytetään niin klassisessa fysiikassa kuin kvanttimekaniikassakin, todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteissä ja yleensä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden sovelluksissa, sekä nopeassa numeerisessa laskennassa tietokoneilla. Fourier-analyysia tarvitaan myös hyvin abstrakteilla matematiikan aloilla kuten lukuteoriassa sekä funktioiden ominaisuuksien tutkimuksessa.

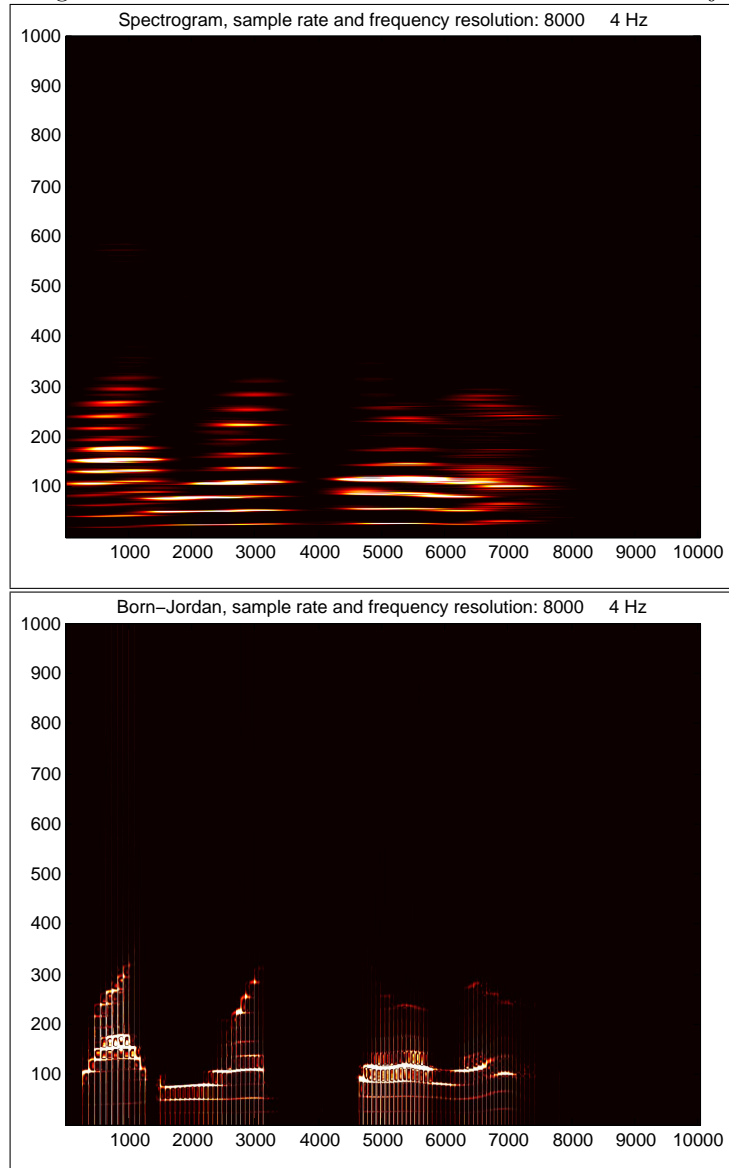
**Historiaa:** Fourier-analyysin idean esitteli vuonna 1807 Jean-Baptiste Fourier (1768–1830) tarkastellessaan lämmönjohtumista. Diskreettiä Fourier-muunnosta oli kuitenkin pohtinut jo Carl Friedrich Gauss (1777-1855) vuosina 1805–1806 trigonometrisen interpolaation laskelmissaan, missä hän jopa kuvaili FFT-algoritmin kauan ennen kuin Cooley ja Tukey sen lopulta vuonna 1965 julkaisivat: Gauss sovelsi menetelmäänsä asteroidi Junon radan ennustamiseen. Fourier-analyysia ennakoivat 1700-luvulla Leonhard Euler, Alexis-Claude Clairaut, Joseph Louis Lagrange ja Daniel Bernoulli tutkiessaan värähteleviä kappaleita ja kiertoratoja.

**Esimerkkejä Fourier-analyysin sukulaiskursseista Aalto-yliopistolla:** MS-C1350 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, MS-E1421 Harmonic analysis, MS-E1220 Symmetries, MS-C1110 Lukuteoria.

**Merkinnät.** Fourier-analyysia käytetään laajalti tieteissä ja insinöörialoilla, ja kukin ala käyttää omia perinteisiä merkintöjään: esimerkiksi  $f$  voi olla signaali tai taajuus,  $x$  voi olla paikka tai signaali, imaginaariyksikkö voi olla  $i$  tai  $j$ . Sekaannusten välttämiseksi sovimme nyt tällä kurssilla seuraavat merkinnät: **signaali** on  $s$  (joskus myös  $q$  tai  $r$ ), **aika** on  $t$  (aikamuuttuja voidaan joskus tulkita myös paikaksi), **taajuus** on  $\nu$  (kreikkalainen “nyy”-kirjain), **imaginaariyksikkö** on  $i$  (jolle  $i^2 = -1$ ).

## 2 Fourier-esimerkkejä akustiikassa

Fourier-analyysin avulla äänisignaali voidaan esittää eräänlaisena matemaattisena nuottikirjoituksena: Seuraavat kuvat esittävät samaa ihmisääntä niin, että vaaka-akselilla on aika, pystyakselilla taajuus, ja signaalin energiatiheys on verrannollinen kirkkauteen. Ylemmässä kuvassa on ikkunoidun Fourier-muunnoksen spektrogrammi. Alemmassa kuvassa on vastaava Born–Jordan -jakauma.



Tällaisten `Matlab`-kuvien avulla voidaan esimerkiksi parantaa signaalin laatua ja poimia siitä yksityiskohtia hyödynnettäväksi.

### 3 Signaalit ja niiden luokittelu

Tällä kurssilla jaamme signaalit kahteen luokkaan:

- (A) **Analogiset**  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (jatkuva aika  $\mathbb{R}$ ),
- (D) **Digitaaliset**  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  (diskreetti aika  $\mathbb{Z}$ ).

Jaamme nämä luokat vielä kahtia: signaali voi olla

- joko* (0) **jaksoton**
- tai* (1) **jaksollinen** (*eli periodinen*).

Sanomme, että signaalilla  $s$  on jakso (eli periodi)  $p$ , jos

$$s(t - p) = s(t)$$

jokaisella  $t$ . Siten meillä on neljä luokkaa signaaleja: (A0), (A1), (D0), (D1). Jokaisessa näistä neljästä tapauksesta on oma Fourier-analyysinsä, jotka ovat keskenään hyvin samankaltaisia, kuten tullaan näkemään:

Tapaus :     Fourier – muunnoksen nimi :

- (A0)     *Fourier (integral) transform / Fourier – (integraali)muunnos,*
- (A1)     *Fourier coefficient transform / Fourier – kerroinmuunnos,*
- (D0)     *(DTFT) Discrete Time Fourier Transform / Diskreetin ajan Fourier – muunnos,*
- (D1)     *(DFT) Discrete Fourier Transform / Diskreetti Fourier – muunnos.*

Opimme näiden käsitteiden väliset yhteydet tutustumalla niiden perusominaisuuksiin ja sovelluksiin. Laskemme kynällä ja paperilla sekä **MatLab**-ohjelmalla.

Yleisemmin: kun  $d \in \mathbb{Z}^+$ , ovat  $d$ -dimensioiset signaalit funktioita

$$s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tai} \quad s : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C},$$

mutta näiden käsittely palautuu 1-dimensioiseen tapaukseen.  $d$ -dimensioinen muuttuja voi sovelluksissa sisältää koordinaatteinaan aikaa, paikkaa tai muuta sellaista. Signaalin arvoina voidaan tarkastella muutakin kuin kompleksilukuja (esimerkiksi vektoreita tai matriiseja), mutta tällaista meidän ei tarvitse pohtia tällä kurssilla. Digitaalisessa signaalissa on arvojen joukko vielä yleensä “kvantisoitu”, mutta emme myöskään käsittele kvantisoinnin ongelmia.

**Esim.** Ääni:  $s(t)$  on ilmanpaine hetkellä  $t \in \mathbb{R}$ . Digitaalinen monofoninen äänite: mitataan ilmanpaineesta tasaisin väliajoin näytteitä (esim. 16000 tai 44100 näytettä sekunnissa), jolloin saadaan digitaalinen signaali.

**Esim.** Mustavalkoinen kuva: 2-dimensioinen analoginen signaali  $s$ , nyt  $s(x, y) \in [0, 1]$  on harmaasävyn aste tason pisteessä  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  (esim. 0 täysin valkoinen, 1 täysin musta, 1/2 keskiharmaa...). Vastaava digitaalinen kuva: tässä digitaalisessa signaalissa  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  on pikselin sijainti. Tällainen kuvien Fourier-analyysi on olennaisesti samankaltainen kuin 1-dimensioisten signaalien.

**Esim.** Ihmisen silmässä on kolmea erityyppistä tappisolua — värivalokuva on monidimensioinen signaali, joka koostuu kolmesta analogisesta signaalista  $s_{red}, s_{blue}, s_{green} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , missä  $s_{red}(x, y)$  on tason pisteen  $(x, y)$  punasävyn aste jne. Digitaalinen värikuva:  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  kuten harmaasävyn digitaalisen kuvan tapauksessa.

**Esim.** Analogisessa videosignaalisessa mukana sekä ääni (mono, stereo tms.) että liikkuva (3-värinen) kuva, ja muuttujina aika  $t \in \mathbb{R}$  sekä kuvapiste  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Mitä on odotettavissa?** Erilaisten Fourier-muunnosten idea on pohjimmiltaan samankaltainen: *Signaali* on “mukava” funktio  $s : G \rightarrow \mathbb{C}$ , missä muuttuja  $t \in G$  on “aika” (tai “paikka”). Signaalin *Fourier-muunnos* on funktio  $\hat{s} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ , jonka arvo “*taajuudella*”  $\nu \in \hat{G}$  on

$$\hat{s}(\nu) := \int_G s(t) e^{-i \text{vakio } t \cdot \nu} dt.$$

Alkuperäinen signaali saadaan takaisin käänteismuunnoksen kaavalla

$$s(t) = \int_{\hat{G}} \hat{s}(\nu) e^{+i \text{vakio } t \cdot \nu} d\nu.$$

Näissä kaavoissa integraali voi olla diskreetin muuttujan tapauksessa myös summaus, ja usein (mutta ei aina)

$$\text{vakio} = 2\pi.$$

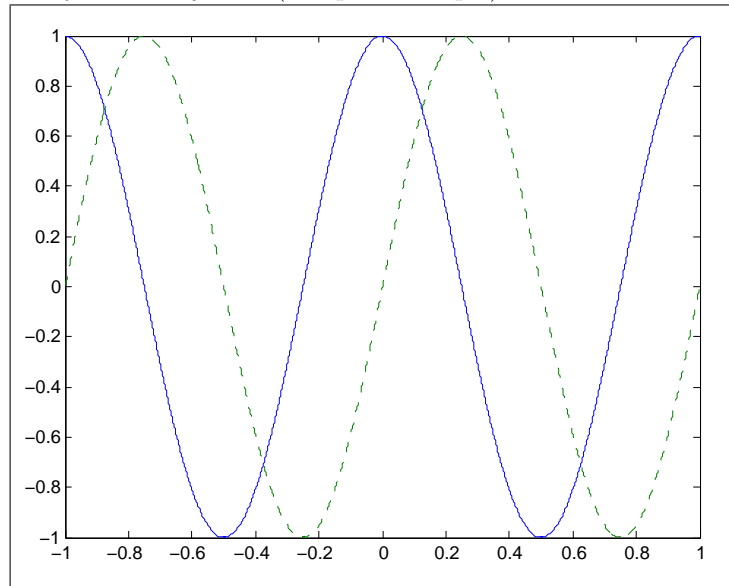
Signaalien käsittelyssä joitakin asioita kannattaa tehdä aikamuuttujan puolella, joitakin puolestaan taajuusmuuttujan puolella! Signaalin  $s : G \rightarrow \mathbb{C}$  *energiatiheys hetkellä*  $t \in G$  on  $|s(t)|^2$  ja *energiatiheys taajuudella*  $\nu \in \hat{G}$  on  $|\hat{s}(\nu)|^2$ , ja Fourier-muunnos säilyttää kokonaisenergian siinä mielessä, että

$$\int_G |s(t)|^2 dt = \int_{\hat{G}} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu.$$

Kurssin myötä hyvin tutuksi käy Eulerin kaava

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \tag{1}$$

jonka voi ymmärtää kompleksitason yksikköympyrän geometriana. Muistin virkistykseksi tässä vielä funktioiden  $t \mapsto \cos(2\pi t)$  ja  $t \mapsto \sin(2\pi t)$  kuvaajat yli värähtelyn kahden jakson (kumpi on kumpi?):



**Mielikuvia pohdittavaksi:** Jatkossa esiintyy usein funktio  $e_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $\nu \in \mathbb{R}$  on vakio ja

$$\begin{aligned} e_\nu(t) &:= e^{i2\pi t \cdot \nu} \\ &= \cos(2\pi t \cdot \nu) + i \sin(2\pi t \cdot \nu). \end{aligned}$$

Kannattaa ajatella, että tämä on (kompleksiarvoinen) alkeisvärähtely taajuudella  $\nu \in \mathbb{R}$  ajan  $t \in \mathbb{R}$  suhteen. Tämän voi havainnollistaa käytännössä: Matlab-ohjelmalla on helppo tehdä äänitiedosto funktion  $e_\nu$  reaali- ja imaginaariosista, ja nämä kuulostavat määrätyn taajuisilta tasaisilta vihellyksiltä. Karkeasti ottaen signaali  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  muotoa

$$s(t) = e^{a(t)} \sin(2\pi\psi(t))$$

kuulostaa vihellykseltä, jonka “volyyymi” on  $a(t)$  ja taajuus  $|\psi'(t)|$  hetkellä  $t$  (jos  $a, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ovat “hitaasti muuttuvia”).

**Tehtävä.** Miten osittaisintegrointi liittyy tulon derivaatan kaavaan

$$\frac{d}{dt} [r(t) s(t)] = r'(t) s(t) + r(t) s'(t) \quad ?$$

**Tehtävä.** Miten integraalin muuttujanvaihto liittyy derivaatan ketjusääntöön

$$\frac{d}{dt} s(\varphi(t)) = s'(\varphi(t)) \varphi'(t) \quad ?$$

**Tehtävä.** Perustele tasointegraalin muuttujanvaihtokaava

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \, d\theta \, dr$$

kartesisten koordinaattien  $(x, y)$  ja napakoordinaattien  $(r, \theta)$  välillä.

**Tehtävä.** Pätee  $e^{w+z} = e^w e^z$ , kun  $w, z \in \mathbb{C}$ , ja tunnetaan myös *Eulerin kaava*

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t),$$

missä  $t \in \mathbb{R}$  ja  $i$  on imaginaariyksikkö. Todista tämän avulla kaavat

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{i2},$$

$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 \quad \text{ja} \quad \sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t).$$

**Tehtävä.** Tarkista, että  $t \mapsto \exp(-t^2)$  ratkaisee differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} s'(t) = -2t s(t), \\ s(0) = 1. \end{cases}$$

Miksi tällä ongelmalla ei ole muita ratkaisuja  $s$ ?

Vihje: Laske derivaatta  $r'(t)$ , kun  $r(t) = \exp(t^2) s(t)$ . Sovella *Integraalilaskennan peruslausetta*: “Jos derivaatta katoaa, niin funktio on vakio.”

## 4 Analoginen jaksoton maailma: ei-periodiset signaalit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Tällä kurssilla *analogisella signaalilla* tarkoitetaan funktiota

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

missä reaalilukujen suora  $\mathbb{R}$  on *jatkuva aika-avaruus*. Jaksottomien analogisten signaalien tapauksessa Fourier-muunnosta kutsutaan *Fourier-integraalimuunnokseksi* (FT, Fourier (integral) Transform). Jaksollisten (eli periodisten) analogisten signaalien tapauksessa kutsutaan *Fourier-kerroinmuunnokseksi* (Fourier Coefficient Transform), jolle duaalinen on *Fourier-sarjajamuunnos* (FST, Fourier Series Transform), joka on olennaisesti sama kuin digitaalisten signaalien diskreetin ajan Fourier-muunnos (DTFT, Discrete Time Fourier Transform).

**Moniulotteiset signaalit?** Sovelluksissa järkevä paikka-avaruus olisi usein  $\mathbb{R}^d$  (erityisesti tapauksen  $d = 2$  ja  $d = 3$ ) ja silloin tarkasteltaisiin vastaavia signaaleja  $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ . Näiden moniulotteisten signaalien analyysi on kuitenkin vain helppo laajennus tapauksesta  $d = 1$ .

**Tulkintoja signaalille** — miten signaali  $s$  voitaisiin mieltää?

**Akustiikka:**  $s$  äänisignaali, siis  $s(t) \in \mathbb{R}$  olisi ilmanpaine hetkellä  $t \in \mathbb{R}$ .

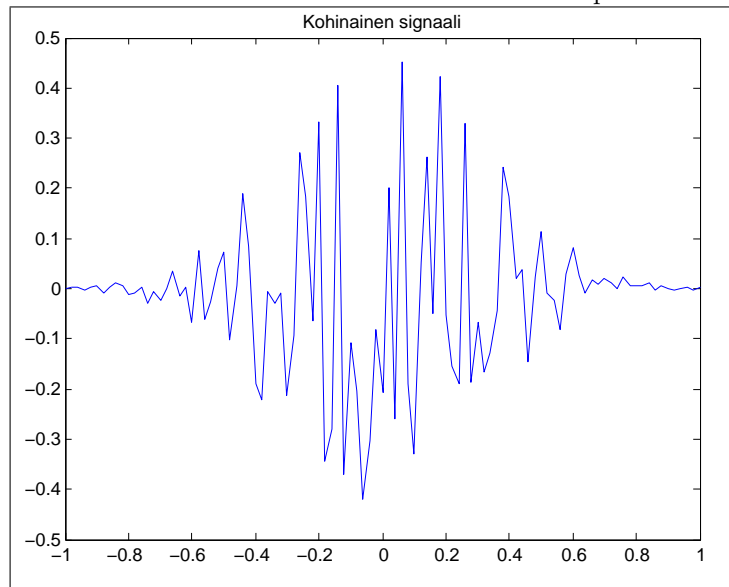
**Meteorologia:** Paitsi ilmanpaine, myös lämpötila ajan funktiona.

**Kuvankäsittely:**  $s$  valovoima ajan tai paikan funktiona.

**Klassinen mekaniikka:**  $s(t) \in \mathbb{R}$  kappaleen paikkakoordinaatti hetkellä  $t \in \mathbb{R}$ .

**Lämmönjohtuminen:**  $s(t) \in \mathbb{R}$  lämpötila paikassa  $t \in \mathbb{R}$ .

**Kvanttimekaniikka:**  $s$  alkeishiukkasen aaltofunktio paikan funktiona.



## 4.1 Integraalien tulkinta

Käytetään seuraavassa integraalille merkintää

$$\int_{\mathbb{R}} s(t) dt := \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 s(t) dt + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b s(t) dt. \quad (2)$$

Tällä kurssilla emme aio keskittyä siihen, missä mielessä kyseiset integraalit ovat olemassa tai laskettavissa — tällaisiin kysymyksiin tutustutaan opintojaksoilla **MS-C1280 Mitta ja integraali** sekä **MS-E1421 Harmonic analysis**, joissa työkaluna käytössä on Lebesgue-integraali. Joissakin tilanteissa Lebesgue-integraalikaan ei riitä, vaan tarvitaan esimerkiksi tulkintaa distribuutioiden avulla. Nyt meille riittää peruskurssitasoinen käsitys integroinnista. Huomaa, että

$$\left| \int_{\mathbb{R}} s(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt.$$

Sanontoja: signaali  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on

- *itseisesti integroituva*, jos  $\|s\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty$ .
- *neliöintegroituva* eli *energialtaan äärellinen*, jos  $\|s\|^2 := \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty$ .
- *olennaisesti rajoitettu*, jos  $|s(t)| \leq \text{vakio}$  melkein kaikilla  $t$ .

Tässä “ $r(t) = s(t)$  melkein kaikilla  $t$ ”, jos  $\|r - s\|_{L^1} = 0$  (eli silloin  $r = s$  integraalin näkökulmasta katsoen ;)

Merkintöjä:

$L^1(\mathbb{R})$  on itseisesti integroituvien signaalien avaruus,

$L^2(\mathbb{R})$  on neliöintegroituvien (eli äärellisen energian) signaalien avaruus,

$L^\infty(\mathbb{R})$  on olennaisesti rajoitettujen signaalien avaruus.

**Esim.** Olkoon  $e_\alpha(t) := e^{i2\pi t \cdot \alpha}$  jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ , missä  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Silloin  $|e_\alpha(t)| = 1$  jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ , joten  $e_\alpha \notin L^1(\mathbb{R})$ ,  $e_\alpha \notin L^2(\mathbb{R})$ , mutta  $e_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Esim.** *Kardinaalisini*  $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  määritellään seuraavasti:

$$\text{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & \text{jos } t \neq 0, \\ 1, & \text{jos } t = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Tässä  $\text{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$ , mutta  $\text{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$  ja  $\text{sinc} \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Esim.** Olkoon

$$s(t) := \begin{cases} |t|^{-1/2}, & \text{jos } 0 < |t| < 1, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tässä  $s \in L^1(\mathbb{R})$ , mutta  $s \notin L^2(\mathbb{R})$  ja  $s \notin L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Esim.**  $s \in L^p(\mathbb{R})$  kaikilla  $p$ , kun vaikkapa  $s(t) = e^{-|t|}$  tai  $s(t) = 1/(1+t^2)$ .



**Signaalin mittauksen ongelmia:** Arkielämässä emme voi käsitellä tarkasti signaalia  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Tähän on useita käytännöllisiä syitä. Voimme havainnoida vain lyhyitä menneisyyden aikavälejä, ja toki  $\mathbb{R}$  on tiukasti tulkituttuna epäfysikaalinen malli ajalle tai paikalle. Myös taustakohina rajoittaa signaalin havaitsemisen tarkkuutta — meidän on kehitettävä keinoja poistaa hälyä signaalista. On joka tapauksessa epärealistista kuvitella, että voisimme mitata signaalin  $s$  täsmällisen arvon  $s(t) \in \mathbb{R}$  täsmällisellä hetkellä  $t \in \mathbb{R}$ . Vähän realistisempaa olisi ajatella, että kenties voisimme mitata jonkinlaisia painotettuja hetkellisiä keskiarvoja signaalista, esimerkiksi tarkan arvon  $s(t)$  sijasta “keskiarvon”

$$A_\sigma s(t) := \int_{\mathbb{R}} s(u) \varphi_{0,\sigma}(u-t) du,$$

missä  $\varphi_{0,\sigma}$  on 0-keskiarvoisen  $\sigma$ -keskihajontaisen normaalijakauman tiheysfunktio. Tässä parametri  $\sigma > 0$  olisi suuruusluokaltaan mittaustapahtuman ajanhetken epätarkkuus, ja jatkuvalle signaalille päitisi

$$s(t) = \lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} A_\sigma s(t)$$

(sivumennen sanoen, käytämme tätä mittauksen  $A_\sigma s$  ideaa todistaessamme Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksen kaavaa...). Ja tosielämässä ehdimme mittaamaan vain äärellisen monta arvoa! Vaikka siis jostakin kumman syystä pääsisimme käsiksi signaalin  $s$  tarkkoihin arvoihin, ehdimme saada niistä selville vain  $n \in \mathbb{Z}^+$  kappaletta näytteitä

$$s(t_1), s(t_2), s(t_3), \dots, s(t_n).$$

Tämä johtaa diskreetin Fourier-analyysin ja tietokonelaskennan pariin, mutta sitä ennen meidän on syytä ymmärtää signaalien  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tapauksen pääpiirteet.

**Tehtävä.** Tarkastellaan  $(t, y)$ -tasossa ns. *topologin sinikäyrää*  $y = s(t)$ , missä

$$s(t) = \begin{cases} \sin(t^{-1}), & \text{jos } t > 0, \\ 0, & \text{jos } t \leq 0. \end{cases}$$

- Hahmottele “topologin sinikäyrän” kuvaa.
- Näytä, että  $\|r\| < \infty$ , kun  $r(t) := s(t)/(t+1)$  (missä  $r(-1) = 0$ ).
- Yleensä ei ole mielekästä puhua signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  “hetkellisestä taajuudesta”. Miksi topologin sinikäyrän tapauksessa “taajuus hetkellä  $t > 0$ ” voisi kuitenkin olla  $\frac{1}{2\pi}t^{-2}$ ? (Vihje: Mieti yleisempää tapausta  $s(t) = \sin(2\pi\psi(t))$ . Silloin aikavälillä  $[t, t+h]$  on signaalissa  $s$  värähdyksiä noin  $\psi(t+h) - \psi(t)$  kappaletta, ja  $\psi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \dots$ )

## 4.2 Energiatiheys ja energia; sisätulo

Signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  *energiatiheys* on funktio  $|s|^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ . Silloin

$$\int_{[a,b]} |s(t)|^2 dt = \int_a^b |s(t)|^2 dt \in [0, \infty] \quad (4)$$

on signaalin  $s$  *energia välillä*  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Signaalin  $s$  *energia* on

$$\|s\|^2 := \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt. \quad (5)$$

“Energia”  $\|s\|^2$  on usein (muttei aina) läheistä sukua ilmiöön liittyvälle fyysikaaliselle energialle. Äärellisen energian signaalien avaruutta merkitään  $L^2(\mathbb{R})$ . Signaalien  $r, s \in L^2(\mathbb{R})$  *pistetulo* eli *sisätulo* on

$$\langle r, s \rangle := \int_{\mathbb{R}} r(t) \overline{s(t)} dt \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Tässä selvästi  $0 \leq \langle s, s \rangle = \|s\|^2 < \infty$ .

**Epäyhtälöitä:** Huomaa, että epäyhtälöstä  $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  seuraa

$$\frac{\|rs\|_{L^1}}{\|r\| \|s\|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|r(t)|}{\|r\|} \frac{|s(t)|}{\|s\|} dt \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left( \frac{|r(t)|^2}{\|r\|^2} + \frac{|s(t)|^2}{\|s\|^2} \right) dt = 1,$$

mikä todistaa *Hölder-epäyhtälön*

$$\|rs\|_{L^1} \leq \|r\| \|s\|, \quad (7)$$

mistä seuraa *Cauchy-Schwarz -epäyhtälö* (huom. *Schwarz*  $\neq$  *Schwartz*)

$$|\langle r, s \rangle| \leq \|r\| \|s\|, \quad (8)$$

mistä seuraa *Minkowski-epäyhtälö*

$$\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\|. \quad (9)$$

Nämä epäyhtälöt pätevät kaikille äärellisen energian signaaleille  $r, s \in L^2(\mathbb{R})$ . Sisätuloon kätkeytyy olennainen tieto signaalien välisestä geometriasta:

$$|\langle r, s \rangle| = \|r\| \|s\| |\cos(\alpha)|,$$

kun signaalien  $r, s \in L^2(\mathbb{R})$  “välinen kulma” on  $\alpha$ . Erityisesti signaalit  $r, s \in L^2(\mathbb{R})$  ovat “toisiaan vastaan kohtisuorassa”, jos  $\langle r, s \rangle = 0$ .

**Tehtävä.** Todista äskeiset epäyhtälöt (7), (8) ja (9)!

### 4.3 Fourier-(integraali)muunnos

Funktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-muunnos on funktio  $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt, \quad (10)$$

mikäli  $s$  on *Fourier-muuntuva* eli tämä integraali on “teoriassa laskettavissa” (eli  $s$  on “riittävän mukava”). Tässä muuttuja  $t \in \mathbb{R}$  voi olla esimerkiksi *aika* tai *paikka* (yksikkö vaikkapa *sekunti* tai *metri*), ja muuttuja  $\nu \in \mathbb{R}$  voisi olla ilmiöön liittyvän värähtelyn *taajuus* (yksikkö vaikkapa *hertsi*).

Voidaan merkitä selvyyden vuoksi myös

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(s) = \widehat{s},$$

kun halutaan korostaa, että funktion  $s$  määrittelyjoukko on  $\mathbb{R}$ .

**Milloin signaali on Fourier-muuntuva?** Hieman liioitellen voidaan sanoa, että “kaikki käytännön elämän signaalit ovat Fourier-muuntuvia” — meidän on vain tulkitettava kaavan (10) integraali sopivasti! Differentiaali- ja integraalilaskennan perusopinnoista tiedetään esimerkiksi *Analyysin peruslause* seurauksineen: jos funktio  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on jatkuva ja äärelliskestoinen (eli  $s(t) = 0$ , kun  $|t|$  on “riittävän suuri”), niin se on integroitava — tässä onkin jo kiva suuri luokka Fourier-muuntuvia signaaleja! Tiedämme myös, etteivät jatkuvuus ja äärellisyyskestoisuus ole välttämättömiä integroituvuudelle. Fourier-muunnos onnistuu myös sellaiselle integroituvalla funktiolla  $s$ , joka on lisäksi *itseisesti integroitava* eli jolle

$$\|s\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty, \quad (11)$$

jolloin

$$|\widehat{s}(\nu)| \leq \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt = \|s\|_{L^1} < \infty.$$

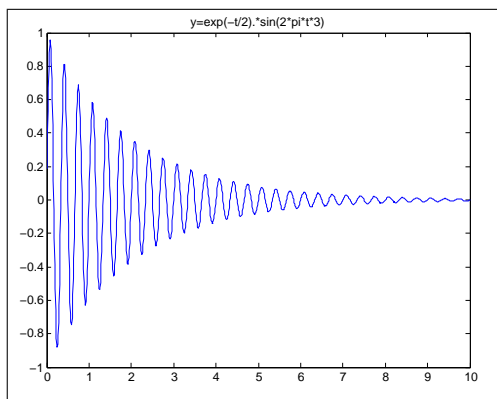
Kun integraali tulkitaan sopivasti, voidaan Fourier-muuntaa myös signaaleja  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , jotka eivät välttämättä integroidu itseisesti: tällä kurssilla meille keskeisin on *äärellisen energian* tapaus

$$\|s\|^2 := \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < \infty, \quad (12)$$

mutta on jo hyvä tietää, että hurjemminkin käyttäytyviä signaaleja voi Fourier-muuntaa: myöhemmin esitellään *temperoitujen distribuutioiden* luokka.

**Esim.** Olkoon  $c \in \mathbb{C}$ , jolle  $|c| = 1$ . Tutkitaan signaalia  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä

$$s(t) := \begin{cases} c 2\pi\varepsilon e^{-2\pi\varepsilon(t-t_0)} e^{i2\pi(t-t_0)\cdot\alpha} & \text{kun } t > t_0, \\ 0 & \text{kun } t \leq t_0. \end{cases}$$



Kyseessä on “värähtely” taajuudella  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alkaen ajanhetkellä  $t_0 \in \mathbb{R}$ , vaimentuen vauhtia  $\varepsilon > 0$  (hahmottele tästä signaalista kuvia joillakin vakioilla  $c, \alpha, t_0, \varepsilon$ : vaikkapa erikseen reaali- ja imaginaariosat; vaihtoehtoisesti 3-dimensioinen kuva, jossa aika-akselin kera reaali- ja imaginaariakselit). Silloin

$$\begin{aligned} \widehat{s}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt \\ &= c \int_{t_0}^{\infty} e^{-i2\pi t \cdot \nu} 2\pi\varepsilon e^{-2\pi\varepsilon(t-t_0)} e^{i2\pi(t-t_0)\cdot\alpha} dt = \dots \\ &= c \frac{e^{-i2\pi t_0 \cdot \nu}}{1 + i(\nu - \alpha)/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Energiatiheydet  $|s|^2$  ajassa ja  $|\widehat{s}|^2$  taajuudessa ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} |s(t)|^2 &= \begin{cases} (2\pi\varepsilon)^2 e^{-4\pi\varepsilon(t-t_0)}, & \text{kun } t > t_0, \\ 0, & \text{kun } t \leq t_0, \end{cases} \\ |\widehat{s}(\nu)|^2 &= \frac{1}{1 + (\nu - \alpha)^2/\varepsilon^2} \quad \text{kaikilla } \nu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hahmottele energiatiheyksien kuvaajat — miten parametrit  $t_0, \alpha, \varepsilon$  vaikuttavat niihin? Huomaa, että  $|s|^2$  ja  $|\widehat{s}|^2$  eivät sisällä kaikkea informaatiota signaalista  $s$ . Tulemme kuitenkin näkemään, että  $s$  voidaan olennaisesti palauttaa Fourier-muunnoksestaan  $\widehat{s}$ : tämä mahdollistaa hyödylliset signaalinkäsittelyoperaatiot. Lisäksi opimme, että energia säilyy Fourier-muunnoksessa, toisin sanoen

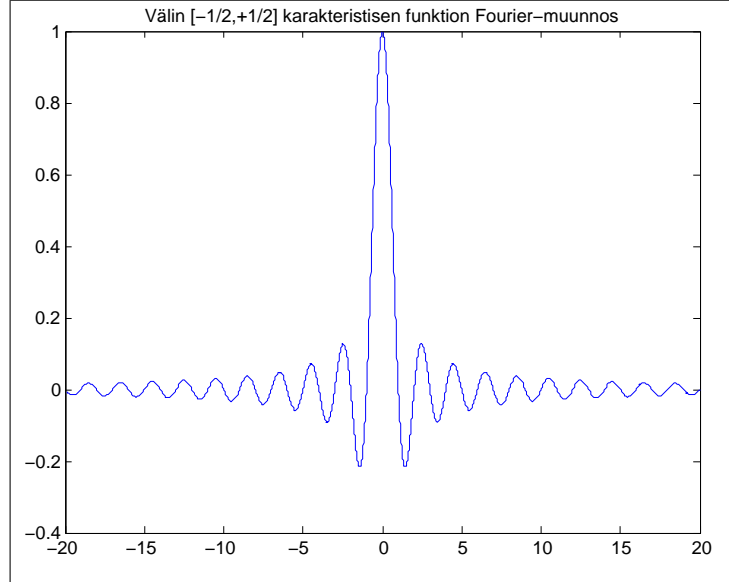
$$\|\widehat{s}\|^2 = \|s\|^2.$$

On suositeltavaa palata tähän esimerkkiin Fourier-teorian edistyessä!

**Tehtävä.** Laske funktion  $s$  Fourier-muunnos  $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $s$  on joukon  $[-1/2, +1/2] \subset \mathbb{R}$  karakteristinen funktio eli

$$s(t) := \mathbf{1}_{[-1/2, +1/2]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [-1/2, +1/2], \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

(Lopputulos:  $\widehat{s}(\nu) = \text{sinc}(\nu) := \sin(\pi\nu)/(\pi\nu)$ , kun  $\nu \neq 0$ . Entä  $\widehat{s}(0)$ ?)



**Tehtävä.** Laske Fourier-muunnos joukon  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  karakteristiselle funktiolle  $s = \mathbf{1}_{[a,b]}$ , missä

$$s(t) := \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [a, b], \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases} \quad (13)$$

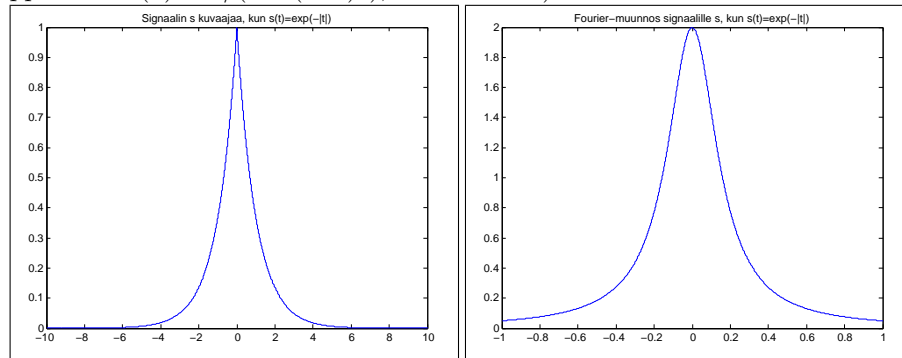
Näytä, että taajuuden energiajakauma  $|\widehat{s}(\nu)|^2$  on rajoitettu ja että

$$|\widehat{s}(\nu)|^2 \leq c|\nu|^{-2},$$

missä  $c > 0$  on vakio. (Itse asiassa  $|\widehat{s}(\nu)|^2$  on mahdollista kirjoittaa lyhyenä selkeänä kaavana...)

**Tehtävä.** Laske signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-muunnos, kun  $s(t) = e^{-|t|}$ . Sievennä vastauksesi reaaliseksi!

(Lopputulos:  $\widehat{s}(\nu) = 2/(1 + (2\pi\nu)^2)$ , missä  $\nu \in \mathbb{R}$ .)



**Tehtävä.** Oletetaan, että analoginen signaali  $s$  on reaaliarvoinen. Miten tämä näkyy Fourier-muunnoksessa  $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ? Entä jos myös  $\widehat{s}$  on reaaliarvoinen — mitä voidaan silloin sanoa alkuperäisestä signaalista  $s$ ?

**Tehtävä.** Olkoon  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , joka on derivoituva kohdassa  $t = 0$  ja jolle  $\psi(0) = 1$  ja  $\psi(t+u) = \psi(t)\psi(u)$  jokaisella  $t, u \in \mathbb{R}$ . Näytä, että kaikilla  $t \in \mathbb{R}$  pätee

$$\psi(t) = e^{\psi'(0)t}.$$

(Erityisesti: jos  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on sileä,  $\psi(0) = 1$  ja  $|\psi(t)| = 1$  jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ , niin  $\psi(t) = e^{i2\pi t \cdot \nu}$  eräällä  $\nu \in \mathbb{R}$ .)

**Fourier-muunnoksen lineaarisuus:** Kun  $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ovat Fourier-muuntuvia ja  $c \in \mathbb{C}$  vakio, niin

$$\widehat{cs}(\nu) = c\widehat{s}(\nu), \quad (14)$$

$$\widehat{r+s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) + \widehat{s}(\nu), \quad (15)$$

missä  $(cs)(t) := cs(t)$  ja  $(r+s)(t) := r(t) + s(t)$ . Tarkista tämä Fourier-muunnoksen lineaarisuus suoralla laskulla!

**Tehtävä (Fourier-muunnoksen symmetrioita).** Olkoot  $q, r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sellaisia, että

$$q(t) = s(t-a) \quad \text{ja} \quad r(t) = s(bt), \quad (16)$$

missä  $a, b \in \mathbb{R}$  vakioita ja  $b \neq 0$ . Tarkista laskemalla, että

$$\widehat{q}(\nu) = e^{-i2\pi a \cdot \nu} \widehat{s}(\nu), \quad (17)$$

$$\widehat{r}(\nu) = \frac{1}{b} \widehat{s}(\nu/b). \quad (18)$$

Samoin tarkista kaava

$$\widehat{k}(\nu) = \widehat{s}(\nu - \alpha), \quad (19)$$

missä  $k(t) = e^{+i2\pi t \cdot \alpha} s(t)$ .

**Tehtävä.** Kun  $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ , määritellään *Hermiten funktiot*  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siten, että

$$h_n(t) := e^{\pi t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2\pi t^2}.$$

Todista, että  $\widehat{h_n} = (-i)^n h_n$ .

#### 4.4 Schwartz-testisignaalien perhe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Laurent Schwartzin (1915–2002; huom. *Schwartz*  $\neq$  *Schwarz*) esittelemät testifunktiot  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ovat “sileitä ja nopeasti katoavia” — tarkemmin sanoen:

**Määritelmä.** Funktio  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on *Schwartz-testisignaali*, jos  $s \in C^\infty(\mathbb{R})$  (eli  $s$  äärettömän sileä eli äärettömän monta kertaa derivoituva) niin, että

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^n s^{(m)}(t) = 0 \quad (20)$$

kaikilla  $m, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ . Merkitään silloin  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Miksi testifunktioita?** Osoittautuu, että ne käyttäytyvät erinomaisen hyvin Fourier-muunnoksen suhteen. Lisäksi testisignaaleja on runsaasti, ja niillä voi mielivaltaisen tarkasti lähestyä pahanlaatuisia signaaleja!

**Esim.** Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , missä  $\operatorname{Re}(a) < 0$ . Silloin Gauss-signaali

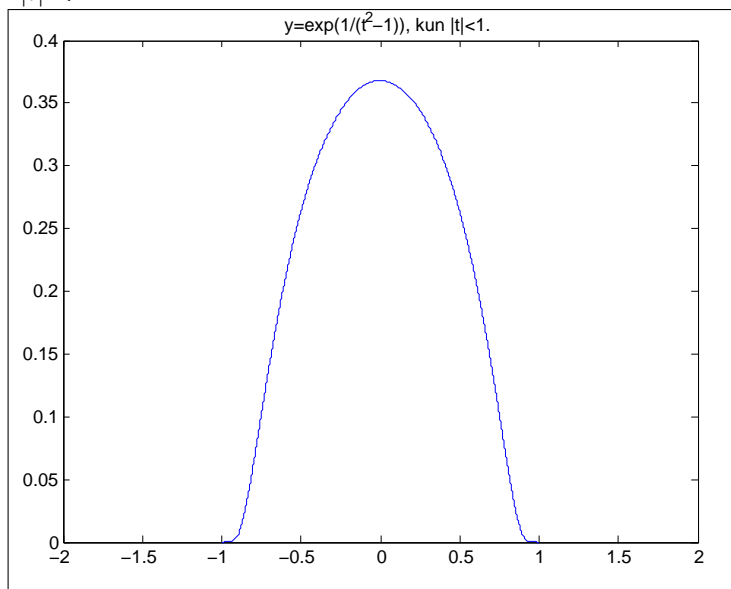
$$t \mapsto e^{at^2+bt+c}$$

on Schwartz-testifunktio.

**Esim.** Jos  $s \in C^\infty(\mathbb{R})$  ja  $s(t) = 0$  kun  $|t| \geq 1$ , niin  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ : esimerkiksi

$$s(t) := \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right),$$

kun  $|t| < 1$ .



**Esim.** Olkoot  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $r, s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , ja olkoon  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  polynomi. Silloin  $\lambda s, r + s, s^{(k)}, qs, rs \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Derivaatta–polynomi -dualiteetti:** Fourier-muunnos muuntaa derivoinnin polynomilla kertomiseksi ja polynomilla kertomisen derivoinniksi, sillä jos  $r(t) = t s(t)$  ja  $\widehat{r} = \widehat{t s}$ , niin

$$\widehat{s}'(\nu) = -i2\pi \widehat{t s}(\nu), \quad (21)$$

$$\widehat{s}'(\nu) = +i2\pi\nu \widehat{s}(\nu). \quad (22)$$

Todetaan nämä suorilla laskuilla (suppenemisistä sekä derivoimisen ja integroimisen järjestyksestä välittämättä): ensiksi

$$\begin{aligned} \widehat{s}'(\nu) &= \frac{d}{d\nu} \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t) \frac{d}{d\nu} e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} (-i2\pi t) dt \\ &= -i2\pi \widehat{r}(\nu), \end{aligned}$$

toiseksi saadaan osittaisintegroimalla (olettaen, että  $s(t) \rightarrow 0$ , kun  $|t| \rightarrow \infty$ )

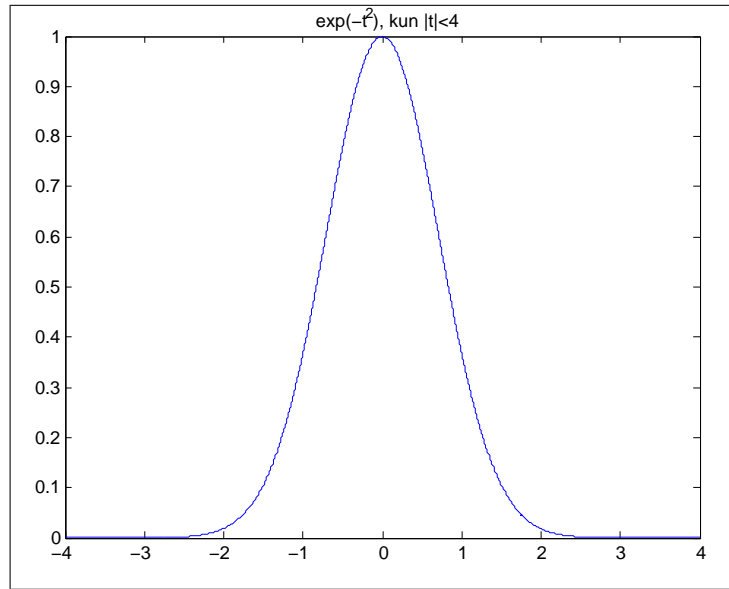
$$\begin{aligned} \widehat{s}'(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} s'(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} s(t) \frac{d}{dt} e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} (-i2\pi\nu) dt \\ &= +i2\pi\nu \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$

**Seuraus:** Kaavoista (21) ja (22) johtuen  $\widehat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , jos  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Siten Fourier-muunnosta voidaan ajatella lineaarikuvauksena

$$(s \mapsto \widehat{s}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (23)$$

Seuraavaksi näytämme, että tämä kuvaus on bijektio, jonka käänteiskuvaus läheisesti muistuttaa Fourier-muunnosta!





**Esim.** Kun normaalijakauman keskiarvo on  $\mu \in \mathbb{R}$  ja keskihajonta  $\sigma > 0$ , sen tiheysfunktio  $\varphi_{\mu, \sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa

$$\varphi_{\mu, \sigma}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Olkoon nyt  $s(t) := \varphi_{0, \sigma}(t)$  eli

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t/\sigma)^2/2}.$$

Tämän Fourier-muunnoksesta meillä on paljon iloa jatkossa! Aluksi tärkeä havainto ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden maailmasta: vakiolla  $a, b \in \mathbb{R}$  alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} g'(t) = -at g(t), \\ g(0) = b \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on

$$g(t) = b e^{-at^2/2}$$

— kertaa tämä differentiaaliyhtälöiden ominaisuus, jos ei tunnu tutulta! Tässä laskussa

$$s'(t) = \frac{-t}{\sigma^2} s(t),$$

mikä on Fourier-muunnettuna

$$i2\pi\nu \widehat{s}(\nu) = \frac{1}{i2\pi\sigma^2} \widehat{s}'(\nu)$$

derivaatta–polynomi -dualiteetin nojalla! Saatiin differentiaaliyhtälö

$$\widehat{s}'(\nu) = -(2\pi\sigma)^2\nu\widehat{s}(\nu),$$

jonka ratkaisu siis on

$$\widehat{s}(\nu) = \widehat{s}(0) e^{-2(\pi\sigma\nu)^2}.$$

Tässä

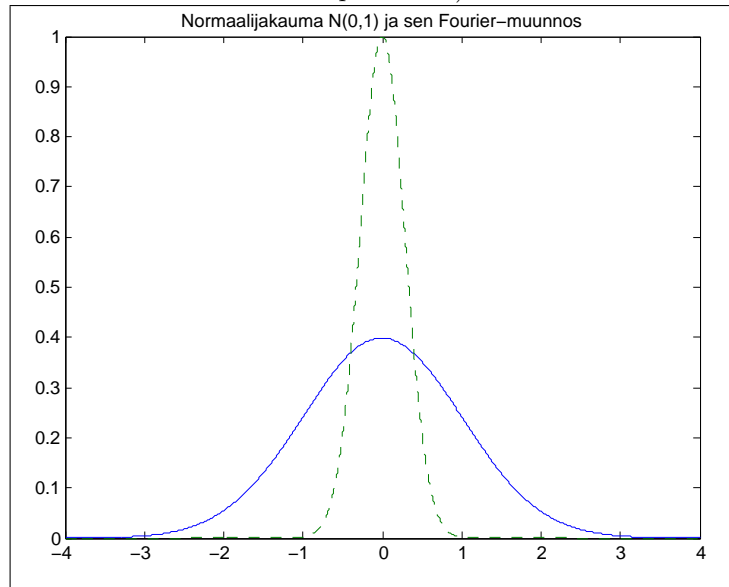
$$\begin{aligned} \widehat{s}(0) &= \int_{\mathbb{R}} s(t) dt \\ &= \left[ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s(t) s(u) dt du \right]^{1/2} \\ &= \left[ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(t^2+u^2)/(2\sigma^2)} dt du \right]^{1/2} \\ &= \left[ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} r d\theta dr \right]^{1/2} \\ &= \left[ \int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr \right]^{1/2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

missä siirryttiin tason napakoordinaatteihin  $(r, \theta)$ , joille pätee  $(t, u) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

Näin on saatu laskettua

$$\widehat{\varphi}_{0,\sigma}(\nu) = e^{-2(\pi\sigma\nu)^2}. \quad (24)$$

Huomaa, että yllä  $\int_{\mathbb{R}} s(t) dt = 1$ , koska  $s$  on todennäköisyysjakauma (tulipahan kuitenkin laskettua tämä seikkaperäisesti!).



**Tehtävä.** Tarkista, että edellisen esimerkin seuraava mielenkiintoinen erikoistapaus on voimassa: kun  $\sigma = 1/\sqrt{2\pi}$  ja  $s = \varphi_{0,\sigma}$  eli kun

$$s(t) = e^{-\pi t^2}, \quad (25)$$

niin silloin

$$\widehat{s}(\nu) = e^{-\pi \nu^2}. \quad (26)$$

Toisin sanoen tässä tapauksessa  $\widehat{\widehat{s}} = s$  pätee!

**Tehtävä.** Laske normaalijakauman tiheysfunktion  $s = \varphi_{\mu,\sigma}$  Fourier-muunnos, missä

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-((t-\mu)/\sigma)^2/2}.$$

Voit palauttaa integraalin sopivilla muuttujanvaihdolla tunnettuun tilanteeseen  $\widehat{r} = r$ , kun  $r(t) = e^{-\pi t^2}$ .

**Fourier-käänteismuunnos!** Olkoon  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Silloin

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} s(u) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\pi(u-t)^2/\varepsilon} du \\ &\stackrel{\text{Edellinen esim.}}{=} \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} s(u) \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(u-t)\cdot\nu} e^{-\varepsilon\pi\nu^2} d\nu du \\ &= \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\pi\nu^2} e^{+i2\pi t\cdot\nu} \int_{\mathbb{R}} s(u) e^{-i2\pi u\cdot\nu} du d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t\cdot\nu} \widehat{s}(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Huomaa, että tämä lasku todisti **Fourier-käänteiskaavan**

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t\cdot\nu} \widehat{s}(\nu) d\nu, \quad (27)$$

joka on voimassa jokaisella  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ja  $t \in \mathbb{R}$ . Siten Fourier-muunnos

$$(s \mapsto \widehat{s}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (28)$$

on bijektio! Huomaa myös, että  $\widehat{\widehat{s}}(t) = s(-t)$ , ja että

$$\widehat{\widehat{\widehat{s}}} = s.$$

**Seuraavaksi tärkeä tiedote:** Energia säilyy Fourier-muunnoksessa! Tämä liittyy unitaarisuuteen...

**Fourier-muunnos on unitaarinen:** toisin sanoen se säilyttää signaalien normit ja niiden väliset kulmat! Tämä tarkoittaa täsmällisesti sitä, että sisätulot säilyvät eli

$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle r, s \rangle \quad (29)$$

— tätä kutsutaan myös Parseval-yhtälöksi (tai Parseval–Rayleigh–Plancherel-yhtälöksi tms.). Tästä toki seuraa välittömästi *isometrisyys* eli normin (ja siten energian) säilyminen:

$$\|\widehat{s}\| = \|s\|. \quad (30)$$

Tarkistetaan Fourier-muunnoksen unitaarisuus käyttämällä Fourier-käänteismuunnosta:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{r}(\nu) \overline{\widehat{s}(\nu)} \, d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{r}(\nu) \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) \, dt} \, d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{r}(\nu) \, d\nu \overline{s(t)} \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} r(t) \overline{s(t)} \, dt = \langle r, s \rangle. \end{aligned}$$

**Fourier-muunnoksen tulkintaa.** Voidaan ajatella, että Fourier-käänteiskaava

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{s}(\nu) e^{i2\pi t \cdot \nu} \, d\nu$$

kuvailee signaalin  $s$  “äärettömänä lineaarikombinaationa” yksinkertaisista aalloista

$$t \mapsto e^{i2\pi t \cdot \nu} = \cos(2\pi t \cdot \nu) + i \sin(2\pi t \cdot \nu).$$

Tällaisen aallon taajuus on  $\nu \in \mathbb{R}$  (joka voi myös olla negatiivinen!), ja silloin aallolla on “paino”  $\widehat{s}(\nu) \in \mathbb{C}$ . Aikavälillä  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  signaalilla  $s$  on energia

$$\int_a^b |s(t)|^2 \, dt,$$

ja taajuuskaistalla  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  sen energia on

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\widehat{s}(\nu)|^2 \, d\nu.$$

## 4.5 Konvoluutio

Signaalien  $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  *konvoluutio* on signaali  $r * s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , jolle

$$r * s(t) := \int_{\mathbb{R}} r(t-u) s(u) du, \quad (31)$$

mikäli tämä integraali voidaan laskea; tämä on ok ainakin, jos  $r, s$  integroituvat itseisesti, jolloin myös  $r * s$  integroituu itseisesti, ja pätee jopa

$$\|r * s\|_{L^1} \leq \|r\|_{L^1} \|s\|_{L^1},$$

missä  $\|q\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}} |q(t)| dt$ . tämän väitteen todistaminen onkin hyvä pieni harjoitustehtävä! (Myöhemmin nähdään, että konvoluutio-operaatiot  $s \mapsto r * s$  ovat täsmälleen samoja kuin signaalien aikainvariantit operaatiot.)

**Konvoluutio Fourier-muuntuu tuloksi ja päinvastoin!** Näytä laskemalla, että

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu), \quad (32)$$

$$\widehat{r s}(\nu) = \widehat{r} * \widehat{s}(\nu), \quad (33)$$

missä  $(r s)(t) := r(t) s(t)$ . Tämä on Fourier-analyysin eräs tärkeimpiä ominaisuuksia: “konvoluutio ajassa” on “kertolasku taajuudessa”.

**Tehtävä.** Sanotaan, että signaali  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on *rajoitettu*, jos  $|r(t)| \leq M$  kaikilla  $t$ , missä  $M < \infty$  on vakio. Näytä, että silloin

$$|r * s(t)| \leq M \int_{\mathbb{R}} |s(u)| du.$$

**Tehtävä.** Näytä, että

$$\|r * s\| \leq \|r\| \|s\| \quad \text{ja}$$

$$\|r * s\| \leq \|r\|_{L^1} \|s\|.$$

**Tehtävä.** Laske  $s * s$  ja  $\widehat{s * s}$ , kun

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } |t| \leq 1/2, \\ 0, & \text{jos } |t| > 1/2. \end{cases}$$

**Tehtävä.** Olkoon  $\psi_\sigma(t) := 2\sigma/(\sigma^2 + (2\pi t)^2)$ , kun  $\sigma > 0$ . Näytä, että  $\psi_\rho * \psi_\sigma = \psi_{\rho+\sigma}$ . (Vihje: laske  $\widehat{s}(\nu)$ , missä  $s(t) = e^{-a|t|}$ , kun  $a > 0$ .)

**Esimerkki.** Kun  $s := \mathbf{1}_{[-1,+1]}$  ja  $r_\sigma := \varphi_{0,\sigma}$  eli

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [-1, +1], \\ 0 & \text{muutoin,} \end{cases} \quad r_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t/\sigma)^2/2},$$

niin

$$\widehat{s}(\nu) = \begin{cases} 2, & \text{kun } \nu = 0, \\ \frac{\sin(2\pi\nu)}{\pi\nu} & \text{muutoin,} \end{cases} \quad \widehat{r}_\sigma(\nu) = e^{-2(\pi\sigma\nu)^2},$$

joten lukija voi helposti näyttää, että tässä

$$\lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \|s - s * r_\sigma\| = 0.$$

Tämä sinänsä vaatimattoman oloinen tulos on tärkeä, sillä se yleistyy helposti koskemaan mitä tahansa signaalia  $s \in L^2(\mathbb{R})$ .

**Signaalin mittaamisesta:** Mikään fyysikaalinen mittalaite ei kykene mittaamaan signaalin arvoa täsmällisesti annetulla tarkalla ajanhetkellä. Usein kohutuullisen realistinen oletus on, että tarkkojen signaalin  $s$  arvojen  $s(t)$  sijasta mitataan arvoja  $r * s(t)$ , missä “mittaria mallintavalle” funktiolle  $r : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  pätee ainakin

$$r(t) \geq 0, \tag{34}$$

$$\int_{\mathbb{R}} r(t) dt = 1. \tag{35}$$

Osaatko sanoa, miksi nämä ehdot ovat järkeviä? Esimerkkinä tällaisesta funktiosta  $r$  voisi olla edellisen esimerkin  $r_\sigma = \varphi_{0,\sigma}$ .

**Tehtävä.** Oletetaan, että  $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  toteuttaa ehdot (34) ja (35). Olkoon  $r_\varepsilon(t) := \varepsilon^{-1} r(t/\varepsilon)$ . Näytä, että

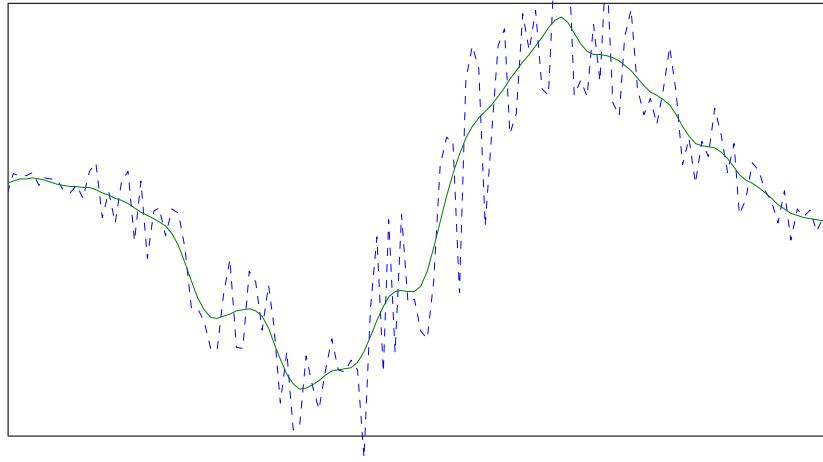
$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \|\chi_{[a,b]} - r_\varepsilon * \chi_{[a,b]}\| = 0.$$

**Silotus konvoluution avulla.** Oletetaan, että signaali  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on sileä (eli sitä voidaan derivoida mahdollisesti montakin kertaa). Osoittautuu, että myös  $r * s = s * r$  on silloin sileä:

$$(r * s)' = r' * s, \tag{36}$$

koska

$$(r * s)'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} r(t-u) s(u) du = \int_{\mathbb{R}} r'(t-u) s(u) du = r' * s(t).$$



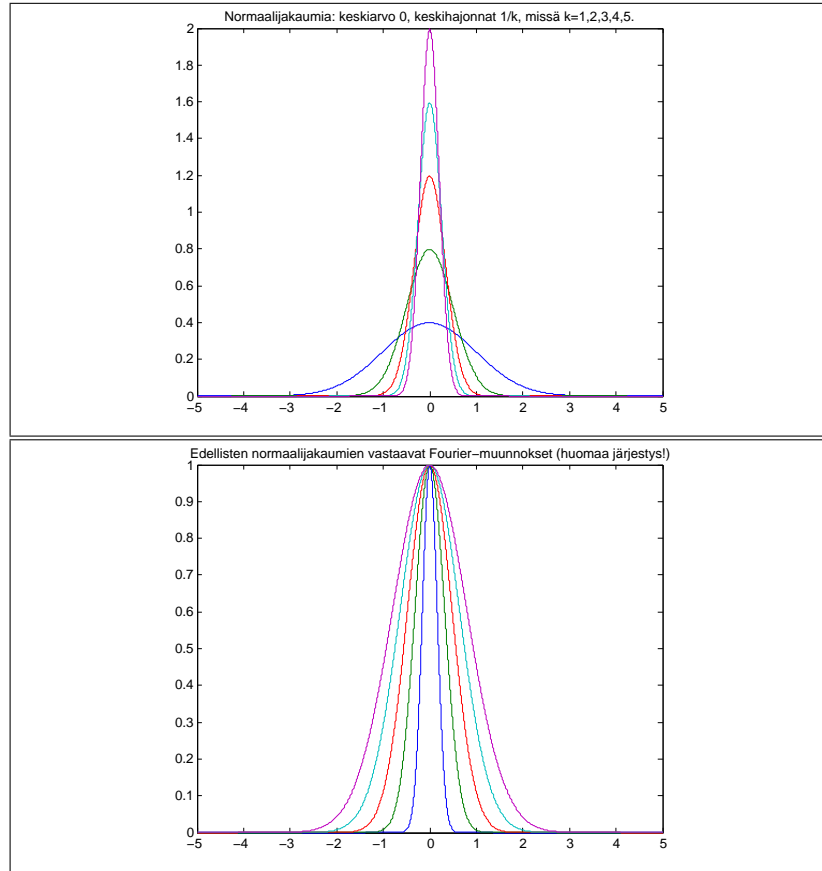
Mihin tätä havaintoa voi käyttää? Yritetään vaikkapa sisääntulevasta signaalista  $s$  suodattaa ulostuleva signaali  $r*s$  sopivalla konvoluutioytimeillä  $r$ . Jos esimerkiksi halutaan säilyttää matalat taajuuudet, mutta poistaa korkeataajuisen taustahäly, niin voidaan valita sellainen  $r$ , jolle

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\nu) &\approx 1, & \text{kun } |\nu| &\approx 0, \\ \widehat{r}(\nu) &\rightarrow 0 & \text{nopeasti, kun } |\nu| &\rightarrow \infty, \\ r(t) &\rightarrow 0 & \text{nopeasti, kun } |t| &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Muista, että  $\widehat{r^{(k)}}(\nu) = (i2\pi\nu)^k \widehat{r}(\nu)$ : siis pätee  $\widehat{r}(\nu) \rightarrow 0$  nopeasti, kun  $|\nu| \rightarrow \infty$ . Esimerkki: olkoon  $r(t) = \varphi_\sigma(t)$  Gaussin normaalijakauma, missä

$$\varphi_\sigma(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t/\sigma)^2/2} \implies \widehat{\varphi}_\sigma(\nu) = e^{-2(\pi\sigma\nu)^2}$$

$$\begin{aligned} \implies \widehat{\varphi_\sigma * s}(t) &= \widehat{\varphi}_\sigma(\nu) \widehat{s}(\nu) \\ &= e^{-2(\pi\sigma\nu)^2} \widehat{s}(\nu) \\ &\xrightarrow{0 < \sigma \rightarrow 0} \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$



**Aikasiirrot ja taajuusmodulaatiot.** Signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  siirto ajan  $b \in \mathbb{R}$  verran on signaali  $T_b s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä

$$T_b s(t) := s(t - b). \quad (37)$$

Signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  modulointi taajuuden  $\alpha \in \mathbb{R}$  verran on signaali  $M_\alpha s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä

$$M_\alpha s(t) := e^{+i2\pi t \cdot \alpha} s(t). \quad (38)$$

Fourier-muunnos kohtelee näitä kaavoja niin, että  $\widehat{M_\alpha s} = T_\alpha \widehat{s}$  ja  $\widehat{T_b s} = M_{-b} \widehat{s}$ , toisin sanoen

$$\begin{aligned} \widehat{M_\alpha s}(\nu) &= T_\alpha \widehat{s}(\nu), \\ \widehat{T_b s}(\nu) &= M_{-b} \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$

Voidaan ajatella, että “aikapuolen modulaatio Fourier-muuttuu taajuuspuolen siirroksi”.



**Integraalioperaattorit:** havaitusta sisääntulevasta signaalista  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  muokkaamme ulostulevan signaalin  $As = A(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Muunnos  $A$  on *lineaarinen*, jos

$$\begin{aligned} A(r + s) &= A(r) + A(s) \quad \text{ja} \\ A(\lambda s) &= \lambda A(s) \end{aligned}$$

kaikille signaaleille  $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ja vakioille  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Lineaarinen muunnos  $A$  voidaan esittää integraalioperaattorina:

$$As(t) = \int_{\mathbb{R}} K_A(t, u) s(u) du, \quad (39)$$

missä  $K_A$  on muunnoksen ns. *ydin*. Tässä ydin  $K_A$  toki määrää integraalioperaattorin  $A$ , mutta myös käänteinen pätee:  $A$  määrää ytimen  $K_A$  “yksikäsitteisesti distribuutioiden mielessä” (hyvin väljin ehdoin; tarkempi tulos on ns. *Schwartz-ydinlause*).

**Esim.** Fourier-muunnos itsessään on tällainen integraalioperaattori: kun  $K_A(t, u) = e^{-i2\pi t \cdot u}$ , saadaan

$$As(t) = \int_{\mathbb{R}} K_A(t, u) s(u) du = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot u} s(u) du = \widehat{s}(t).$$

Tässä siis  $As = \widehat{s}$  eli  $A = (s \mapsto \widehat{s})$  on Fourier-muunnos!

**Aikainvariantit operaattorit:** Olkoon integraalioperaattori  $A$  ajan siirroissa säilyvä eli *aikainvariantti*. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$T_b A = A T_b \quad (40)$$

kaikilla  $b \in \mathbb{R}$  eli

$$T_b As(t) = A T_b s(t)$$

kaikille signaaleille  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ja kaikille ajoille  $t, b \in \mathbb{R}$ . Silloin  $A = T_{-b} A T_b$ , mistä saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K_A(t, u) s(u) du &= As(t) = T_{-b} A T_b s(t) = A T_b s(t+b) \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_A(t+b, u) T_b s(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_A(t+b, u) s(u-b) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} K_A(t+b, u+b) s(u) du. \end{aligned}$$

Siten  $K_A(t, u) = K_A(t+b, u+b)$  kaikilla  $b, t, u \in \mathbb{R}$ , erityisesti  $K_A(t, u) = K_A(t-u, 0) = r(t-u)$  jollekin signaalille  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Siis  $As = r * s$  tässä — toisin sanoen aikainvariantit operaattorit  $A$  ovatkin aina konvoluutiomuotoa  $s \mapsto r * s$ .

## 4.6 Signaalien normit

Signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  "suuruutta" voidaan mitata Henri Lebesguen (1875–1941)  $L^p$ -normeilla, jotka määritellään seuraavasti:

$$\|s\|_{L^p} \stackrel{1 \leq p < \infty}{:=} \left[ \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad (41)$$

$$\|s\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |s(t)| \stackrel{\text{Jos } s \text{ jatkuva}}{=} \sup_{t \in \mathbb{R}} |s(t)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|s\|_{L^p}. \quad (42)$$

Merkitään  $s \in L^p(\mathbb{R})$ , jos  $\|s\|_{L^p} < \infty$ . Tässä  $L^p(\mathbb{R})$  on ns. *Lebesgue- $p$ -avaruus*. Samaistetaan signaalit  $r, s \in L^p(\mathbb{R})$ , jos  $\|r - s\|_{L^p} = 0$  eli kun  $r(t) = s(t)$  "melkein kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ ", ja merkitään silloin yksinkertaisesti  $r = s$  (tämä "melkein kaikilla" -käsite esitellään täsmällisesti kurssilla **MS-C1280 Mitta ja integraali**). Erityisesti sanotaan:

- Signaali  $s \in L^1(\mathbb{R})$  on *itseisesti integroitava*:  $\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt = \|s\|_{L^1} < \infty$ .
- Signaalilla  $s \in L^2(\mathbb{R})$  on *äärellinen energia*  $\|s\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = [\|s\|_{L^2}]^2$ .
- Signaali  $s \in L^\infty(\mathbb{R})$  on *olennaisesti rajoitettu*:  $|s(t)| \leq \|s\|_{L^\infty}$  melkein kaikilla  $t$ .

**Signaalien vektoriavaruudet:** Kun  $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $c \in \mathbb{C}$ , määritellään funktiot  $cs, r + s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  luonnollisesti kaavoilla

$$\begin{aligned} (cs)(t) &:= cs(t), \\ (r + s)(t) &:= r(t) + s(t) \end{aligned}$$

jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ . Voidaan todistaa, että  $cs, r + s \in L^p(\mathbb{R})$ , jos  $r, s \in L^p(\mathbb{R})$ . Toisin sanoen signaalien avaruus  $L^p(\mathbb{R})$  voidaan tulkita vektoriavaruudeksi. Tässä vektoriavaruudessa voidaan ajatella signaalien  $r, s \in L^p(\mathbb{R})$  väliseksi *etäisyydeksi* lukua

$$\|r - s\|_{L^p},$$

joka siis riippuu parametrilla  $p \in [1, \infty]$ .

**Esim.** Schwartz-funktio kuuluu kaikkiin  $L^p$ -avaruuksiin kaikilla  $p \in [1, \infty]$ :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}).$$

**Esim.** Olkoon  $e_\alpha(t) := e^{i2\pi t \cdot \alpha}$  jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ , missä  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Silloin  $|e_\alpha(t)| = 1$  jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ , joten  $\|e_\alpha\|_{L^\infty} = 1$ : siten  $e_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Toisaalta  $e_\alpha \notin L^p(\mathbb{R})$  kaikilla  $p < \infty$ .

**Esim.** *Kardinaalisini sinc* :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  määritellään seuraavasti:

$$\operatorname{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & \text{jos } t \neq 0, \\ 1, & \text{jos } t = 0. \end{cases}$$

Tässä  $\operatorname{sinc} \in L^p(\mathbb{R})$  kaikilla  $p > 1$ , mutta  $\operatorname{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$ .

**Esim.** Olkoon

$$s(t) := \begin{cases} \ln(|t|), & \text{jos } 0 < |t| < 1, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tässä  $s \in L^p(\mathbb{R})$  kaikilla  $p < \infty$ , mutta  $s \notin L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Esim.** Olkoon  $s(t) := t^{-\varepsilon}$ , kun  $0 < t < 1$  (ja  $s(t) = 0$  muutoin), missä  $0 < \varepsilon < 1$ . Silloin

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^p dt = \int_0^1 t^{-\varepsilon p} dt = \begin{cases} 1/(1 - \varepsilon p) < \infty, & \text{kun } \varepsilon p < 1, \\ \infty, & \text{kun } \varepsilon p \geq 1. \end{cases}$$

Tästä nähdään, että  $s \in L^p(\mathbb{R})$  täsmälleen silloin, kun  $p < \varepsilon^{-1}$ .

**Esim.** Olkoon  $s(t) := t^{-\varepsilon}$ , kun  $1 < t$  (ja  $s(t) = 0$  muutoin), missä  $0 < \varepsilon < 1$ . Silloin

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^p dt = \int_1^\infty t^{-\varepsilon p} dt = \begin{cases} 1/(\varepsilon p - 1) < \infty, & \text{kun } \varepsilon p > 1, \\ \infty, & \text{kun } \varepsilon p \leq 1. \end{cases}$$

Tästä nähdään, että  $s \in L^p(\mathbb{R})$  täsmälleen silloin, kun  $p > \varepsilon^{-1}$ .

**Lebesgue-avaruuksien leikkaus:**  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$  eli toisin sanoen: jos  $s \in L^1(\mathbb{R})$  ja  $s \in L^\infty(\mathbb{R})$ , niin  $s \in L^p(\mathbb{R})$ , koska (kun  $s \neq 0$  ja  $1 < p < \infty$ )

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^p dt = \|s\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{|s(t)|}{\|s\|_{L^\infty}} \right)^p dt \leq \|s\|_{L^\infty}^p \int_{\mathbb{R}} \frac{|s(t)|}{\|s\|_{L^\infty}} dt = \|s\|_{L^\infty}^{p-1} \|s\|_{L^1} < \infty.$$

**Lebesgue-avaruuksien summa:**  $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$  eli toisin sanoen: Jos  $s \in L^p(\mathbb{R})$ , niin  $s = s_1 + s_\infty$ , missä  $s_1 \in L^1(\mathbb{R})$  ja  $s_\infty \in L^\infty(\mathbb{R})$  — miksi? Riittää tarkastella tapausta  $1 < p < \infty$  (miksi?), jolloin määritellään

$$s_\infty(t) := \begin{cases} s(t) & \text{kun } |s(t)| \leq 1, \\ 0 & \text{muutoin,} \end{cases}$$

jolloin selvästi  $\|s_\infty\|_{L^\infty} \leq 1$  ja

$$s_1(t) = \begin{cases} s(t) & \text{kun } |s(t)| > 1, \\ 0 & \text{muutoin,} \end{cases}$$

joten

$$\|s_1\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |s_1(t)| dt \leq \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^p dt = \|s\|_{L^p}^p < \infty.$$

**Muistutus: Analyysin peruslause.** Jos  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on jatkuva ja

$$r(t) = \int_0^t s(u) du,$$

niin  $r' = s$  eli  $r'(t) = s(t)$  kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ .

Tälle tulokselle on seuraava yleistys:

**Lebesguen differentiointilause:** Jos  $s \in L^1(\mathbb{R})$  ja

$$r(t) := \int_0^t s(u) du$$

niin  $r' = s$  siinä mielessä, että  $r'(t) = s(t)$  melkein kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ .

Tässä selvästi  $r \in L^\infty(\mathbb{R})$ , tarkemmin sanoen  $\|r\|_{L^\infty} \leq \|s\|_{L^1}$ . Muistetaan siis: **itseisesti integroituva funktio on rajoitetun funktion derivaatta** (mutta rajoitetun funktion derivaatta ei aina ole itseisesti integroituva).

**$L^p$ -funktioiden approksimointi Schwartz-funktiolla, kun  $p < \infty$ :** Signaalia  $s \in L^p(\mathbb{R})$  voidaan approksimoida (eli lähestyä) mukavilla testisignaaleilla  $s_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  mielivaltaisen tarkasti — tästä on iloa, kun Fourier-muunnos yritetään määrittellä hankalille  $L^p$ -funktioille. Kuinka approksimoidaan? Jos  $g, r \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , niin  $g * (rs) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ : tässä on kysymys silotuksesta konvoluution avulla! Kun  $k \in \mathbb{Z}^+$ , määritellään  $r_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  siten, että

$$r_k(\nu) = \widehat{g}_k(\nu) := e^{-\pi(\nu/k)^2},$$

jolloin  $s_k := g_k * (r_k s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Kun nyt  $1 \leq p < \infty$ , niin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|s - s_k\|_{L^p} = 0$$

(sivuutetaan todistus). Siten  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$  on “tiheässä” avaruudessa  $L^p(\mathbb{R})$ , kun  $1 \leq p < \infty$ . Tapaus  $p = \infty$  osoittautuu erilaiseksi:

**Miksi Schwartz-funktiolla ei voi yleensä approksimoida  $L^\infty$ -funktioita?**

Toisin sanoen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$  “ei ole tiheässä” avaruudessa  $L^\infty(\mathbb{R})$ : Ajattele esimerkiksi vakiofunktioita  $1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , jolle  $\|1 - s_k\|_{L^\infty} \geq 1$  kaikilla  $s_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Tästä nähdään, ettei funktiota 1 voi approksimoida mielivaltaisen tarkasti Schwartz-funktiolla (ja sama approksimoinnin mahdottomuuden perustelu pätee kaikkiin  $s \in L^\infty(\mathbb{R})$ , joille  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} s(t) \neq 0$ ). Myöskään epäjatkuvia  $s \in L^\infty(\mathbb{R})$  ei voi approksimoida  $L^\infty$ -normin mielessä Schwartz-testifunktiolla (mieti, mitä funktion epäjatkuvuuskohdassa tapahtuu!).

#### 4.7 Fourier-muunnos $(s \mapsto \widehat{s}) : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$

Koska

$$|\widehat{s}(\nu)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt = \|s\|_{L^1},$$

nähdään, että

$$\|\widehat{s}\|_{L^\infty} \leq \|s\|_{L^1}. \quad (43)$$

Siten Fourier-muunnos voidaan ajatella jatkuvana lineaarikuvauksena

$$(s \mapsto \widehat{s}) : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}). \quad (44)$$

Jos  $s \in L^1(\mathbb{R})$ , niin  $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on myös jatkuva, ja lisäksi **Riemann–Lebesgue-lemman** mukaan  $\widehat{s}(\nu) \rightarrow 0$ , kun  $|\nu| \rightarrow \infty$ .

#### 4.8 Fourier-muunnos $(s \mapsto \widehat{s}) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

Aiemmin nähtiin, että Fourier-muunnos

$$(s \mapsto \widehat{s}) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

on bijektio, jolle kaikilla  $r, s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  pätee

$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle s, r \rangle, \quad (45)$$

mistä erikoistapauksena energian säilyminen  $\|\widehat{s}\|^2 = \|s\|^2$ . Tämän ansiosta Fourier-muunnos voidaan yksikäsitteisesti laajentaa jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi

$$(s \mapsto \widehat{s}) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (46)$$

sillä  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$  on tiheässä avaruudessa  $L^2(\mathbb{R})$ . Lisäksi tämä kuvaus (46) on automaattisesti bijektio, joka on *unitaarinen* eli (45) pätee kaikilla  $r, s \in L^2(\mathbb{R})$ !

**Rajoitettu lineaarinen laajennus.** Äsken laajensimme Fourier-muunnoksen lineaarisesti laajempaan vektoriavaruuteen normirajoituksen avulla. Tällainen lineaarinen laajennus on oikeastaan hyvin yleinen ilmiö matematiikassa. Mistä siinä on kysymys? Lineaarikuvaus  $B : X \rightarrow Y$  normiavaruuksien  $X, Y$  on *jatkuva* (tai *rajoitettu*) jos

$$\forall x \in X : \|B(x)\|_Y \leq \text{vakio} \|x\|_X.$$

Vektorialiavaruuksissa  $V \subset X$  on *tiheä*, jos se approksimoi avaruutta  $X$ , eli

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists v \in V : \|x - v\|_X < \varepsilon;$$

(jokaisella tarkkuudella  $\varepsilon > 0$  ja jokaisella  $x \in X$  on olemassa  $v \in V$  siten, että  $x \approx v$  tarkkuudella  $\varepsilon$  avaruudessa  $X$ ). Silloin jokaisella rajoitetulla lineaarikuvauksella  $A_0 : V \rightarrow Y$  on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen laajennus  $A : X \rightarrow Y$ : tämä tarkoittaa, että  $A(v) = A_0(v)$  kaikilla  $v \in V$ ; jos lisäksi  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - v_k\|_X = 0$ , niin  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A(x) - A_0(v_k)\|_Y = 0$ ; edelleen pätee  $\|A(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$  jokaisella  $x \in X$ , jos alunperin  $\|A_0(v)\|_Y \leq c\|v\|_X$  jokaisella  $v \in V$  (missä  $c < \infty$  on vakio).

**Esim.** Fourier-muunnoksen tapauksessa  $V = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  on tiheä vektorialiavaruus avaruudessa  $X = Y = L^2(\mathbb{R})$ , ja laajensimme lineaarikuvauksen  $A_0 = (s \mapsto \widehat{s}) : V \rightarrow Y$  normirajoituksen  $\|\widehat{s}\| = \|s\|$  turvin.

**$L^2$ -Fourier-muunnoksesta:** Integraalit

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt$$

määrittelevät Fourier-muunnoksen itseisesti integroituville signaaleille  $s \in L^1(\mathbb{R})$ . Tällaiset integraalit eivät kuitenkaan suppene itseisesti, jos  $s \notin L^1(\mathbb{R})$ . Jos  $s \in L^2(\mathbb{R})$  ja  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , niin

$$\begin{aligned} \langle \widehat{s}, \widehat{\psi} \rangle &= \langle \widehat{s}, \widehat{\psi} \rangle = \langle s, \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(t) \psi(t)^* dt = \int_{\mathbb{R}} s(t) \widehat{\psi}(-t)^* dt = \int_{\mathbb{R}} s(-t) \widehat{\psi}(t)^* dt : \end{aligned}$$

siten

$$\widehat{\widehat{s}}(t) = s(-t)$$

melkein kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , kun  $s \in L^2(\mathbb{R})$ . Tämä antaa meille mahdollisuuden ymmärtää kaavojen

$$\widehat{\widehat{s}}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt, \quad (47)$$

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{s}}(\nu) e^{+i2\pi t \cdot \nu} d\nu \quad (48)$$

olevan totta myös signaalille  $s \in L^2(\mathbb{R})$ , vaikka tiukasti tulkittuna nämä integraalit eivät perinteisessä mielessä suppene.

**Äärellisen energian tapauksen Fourier-muunnos!** Joka tapauksessa nyt voimme todeta, että Fourier-muunnos on laajennettu kaikkia äärellisen energian signaaleja koskevaksi bijektiiviseksi energian säilyttäväksi lineaarikuvaukseksi

$$(s \mapsto \widehat{s}) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}). \quad (49)$$

**Esim.** Olkoon

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } |t| < 1/2, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Silloin  $s \in L^1(\mathbb{R})$ , ja  $\widehat{s} = \text{sinc} \in L^\infty(\mathbb{R})$  on *kardinaalisini*, jolle

$$\text{sinc}(\nu) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}, & \text{kun } \nu \neq 0, \\ 1, & \text{kun } \nu = 0. \end{cases}$$

Nyt  $\text{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$ , mutta  $\text{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$ . Kuitenkin  $\widehat{\widehat{\text{sinc}}}(t) = \widehat{\widehat{s}}(t) = s(-t) = s(+t)$  melkein kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , joten  $\widehat{\widehat{\text{sinc}}} = s \in L^2(\mathbb{R})$ .

## 4.9 Schwartzin temperoidut distribuutiot $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Kohta laajennetaan Fourier-muunnos ns. *Schwartz-distribuutioiden* (eli *temperoitujen distribuutioiden*) avaruuteen  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  jatkuvaksi lineaariseksi bijektioksi

$$(s \mapsto \widehat{s}) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

missä avaruus  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  on erittäin laaja: se sisältää mm. kaikki polynomit ja  $L^p$ -funktiot kaikkien kertalukujen (distribuutio)derivaattoineen — toisin sanoen Fourier-muunnos laajenee koskemaan melkoisen hurjia äärettömän energian signaaleja. Äärettömän energian signaaleja tarvitaan äärellisen energian signaalien käsittelyssä — helppo esimerkki: signaalin  $t \mapsto e^{i2\pi t \cdot \alpha}$  energia on ääretön. Toinen esimerkki: mikä on signaalin  $\delta_b$  energia aika-siirrossa  $s \mapsto T_b s = \delta_b * s$ , missä  $T_b s(t) = s(t - b) = \delta_b * s(t)$ ? Yleisemmin: äärellisen energian operaatioiden  $A$  Schwartz-tytimet  $K_A$  ovat useimmiten ääretönenergiaisia.

**Klassinen derivaatta.** Funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on *derivoituva* pisteessä  $t \in \mathbb{R}$ , jos on olemassa raja-arvo

$$f'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \in \mathbb{C} \quad (50)$$

(eli  $f'(t)$  on käyrän  $y = f(x)$  tangentsuoran kulmakerroin pisteessä  $(x, y) = (t, f(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ ). Tällöin  $f$  on automaattisesti myös jatkuva pisteessä  $t$ . Mutta epäjatkuviakin funktioita voi usein derivoida distribuutioiden mielessä:

;) **Kuinka derivoidaan ei-derivoituva funktio?** Schwartz-testifunktioita  $s, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$  voi derivoida mielivaltaisen monta kertaa; jos silloin  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on polynomi, saadaan osittaisintegroimalla

$$\langle r s^{(m)}, \psi \rangle = (-1)^m \langle s, (r^* \psi)^{(m)} \rangle.$$

Nyt itsepäisesti määrittelemme signaaleille  $s \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle r s^{(m)}, \psi \rangle := (-1)^m \langle s, (r^* \psi)^{(m)} \rangle = (-1)^m \int_{\mathbb{R}} s(t) (r(t) \psi(t)^*)^{(m)} dt, \quad (51)$$

vaikka yleensä  $s$  ei ole edes jatkuva (saati sitten derivoituva klassisessa mielessä)! Tässä sanotaan, että Schwartz-distribuutio  $s^{(m)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  on funktion  $s \in L^\infty(\mathbb{R})$  *m:s distribuutioderivaatta* — varoitus: tällöin  $s^{(m)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ei välttämättä enää ole mikään funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , vaan jotakin hurjempaa, kuten kohta nähdään!

**Schwartzin temperoidut distribuutiot.** *Schwartz-distribuutio*  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  on muotoa

$$s = \sum_{m=1}^n r_m s_m^{(m)}, \quad (52)$$

missä  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $r_m$  on polynomi ja  $s_m^{(m)}$  on rajoitetun funktion  $s_m \in L^\infty(\mathbb{R})$   $m$ :s distribuutioderivaatta. Mitä tämä tarkoittaa? Jos tässä testifunktio  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , niin muodollisella osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned} \langle s, \psi \rangle &= \left\langle \sum_{m=1}^n r_m s_m^{(m)}, \psi \right\rangle \\ &= \sum_{m=1}^n \langle r_m s_m^{(m)}, \psi \rangle \\ &= \sum_{m=1}^n \langle s_m^{(m)}, r_m^* \psi \rangle \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^m \langle s_m, (r_m^* \psi)^{(m)} \rangle \\ &= \sum_{m=1}^n (-1)^m \int_{\mathbb{R}} s_m(t) \left( (r_m^* \psi)^{(m)}(t) \right)^* dt, \end{aligned}$$

missä viimeisin integraali on järkevä Lebesgue-mielessä — on tosin tapana lyhyesti kirjoittaa silloin *distribuutiointegraali*

$$\int_{\mathbb{R}} s(t) \psi(t)^* dt := \langle s, \psi \rangle, \quad (53)$$

vaikka tämä ei olekaan mikään klassinen integraali, kun  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ei välttämättä ole edes mikään funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (puhutaan tästä tarkemmin Dirac-deltan esimerkissä kohta!). Jos Schwartz-distribuutioille  $q, s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  pätee  $\langle q, \psi \rangle = \langle s, \psi \rangle$  eli  $\langle q - s, \psi \rangle = 0$  kaikilla testifunktioilla  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , niin  $q = s$ .

**Esim.** Olkoon  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Silloin distribuutioderivaatat  $s^{(m)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  jokaisella  $m \in \mathbb{N}$ . Samoin  $r s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , jos tässä  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on mikä tahansa polynomi. Temperoidut distribuutiot muodostavat luonnollisen vektoriavaruuden.

**Esim.**  $L^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  jokaisella  $p \in [1, \infty]$  — miksi? Tämä on Schwartz-distribuutioiden määritelmän nojalla täysin selvä tapauksessa  $p = \infty$ . Tapaus  $p = 1$  seuraa Lebesguen differentiointilauseesta! Tapaus  $1 < p < \infty$  taas seuraa näistä aiemmista tapauksista, kun muistetaan, että  $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Esim.** *Signum*-funktio  $\text{sgn} \in L^\infty(\mathbb{R})$  määritellään

$$\text{sgn}(t) := \begin{cases} +1, & \text{kun } t > 0, \\ -1, & \text{kun } t < 0, \\ 0, & \text{kun } t = 0. \end{cases} \quad (54)$$

Huomaa, että klassinen derivaatta

$$\text{sgn}'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sgn}(t+h) - \text{sgn}(t)}{h} \in \mathbb{R}$$



on olemassa täsmälleen silloin, kun  $t \neq 0$ . Kohdassa  $t = 0$  signum-funktio ei ole edes jatkuva! Lasketaan distribuutioderivaatta  $\text{sgn}' = \text{sgn}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \langle \text{sgn}', \psi \rangle &:= -\langle \text{sgn}, \psi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(t) \psi'(t)^* dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \psi'(t)^* dt - \int_0^{\infty} \psi'(t)^* dt = \psi(0)^* + \psi(0)^* = 2\psi(0)^* \end{aligned}$$

jokaisella  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Siten distribuutioderivaatta on  $\text{sgn}' = 2\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , missä

$$\langle \delta_0, \psi \rangle := \psi(0)^*$$

jokaisella testisignaali  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Dirac-delta.** *Dirac-delta-distribuutio*  $\delta_b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  hetkellä  $b \in \mathbb{R}$  määritellään

$$\langle \delta_b, \psi \rangle := \psi(b)^* \quad (55)$$

(jokaisella  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ), ja sitä voidaan ajatella yksikköpistemassana (tai yksikköimpulssina) hetkellä  $t = b$ . On tapana kirjoittaa distribuutiointegraali

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_b(t) \psi(t)^* dt := \psi(b)^* = \langle \delta_b, \psi \rangle,$$

vaikka Dirac-delta  $\delta_b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ei ole funktio (ja siten tämä integraali ei ole klassisesti tulkittavissa)! Usein väitetään, että  $\delta_b(t) = 0$ , jos  $t \neq b$  (ja jotkin tahot voivat väittää, että  $\delta_b(b) = \infty$ ) — miksi tämä on huono ajatus? Jos nimittäin  $s$  on funktio, jolle  $s(t) = 0$  melkein kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , niin klassisena integraalina

$$\int_{\mathbb{R}} s(t) \psi(t)^* dt = 0$$

jokaisella  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ : ei ole olemassa funktiota  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , jolle  $\int_{\mathbb{R}} s(t) \psi(t)^* dt = \psi(b)^* = \langle \delta_b, \psi \rangle$  kaikilla  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Tässä kuitenkin  $\delta_b$  voidaan ajatella distribuutioiden mielessä raja-arvona tavallisista funktioista: esimerkiksi

$$\delta_b = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} s_\varepsilon$$

siinä mielessä, että jokaisella  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  pätee

$$\langle \delta_b, \psi \rangle = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \langle s_\varepsilon, \psi \rangle,$$

missä esimerkiksi Gauss-normaali jakauma

$$s_\varepsilon := \varphi_{b,\varepsilon} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

tai esimerkiksi kun  $s_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R})$  määritellään

$$s_\varepsilon(t) := \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{jos } |t - b| < \varepsilon/2, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

#### 4.10 Fourier-muunnos ( $s \mapsto \widehat{s}$ ) : $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Schwartz-distribuition  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  Fourier-muunnos  $\widehat{s} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  määritellään

$$\langle \widehat{s}, \widehat{\psi} \rangle := \langle s, \psi \rangle, \quad (56)$$

missä  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Tämä luonnollisesti laajentaa aiemman äärellisen energian tapauksen, jossa  $s \in L^2(\mathbb{R})$ . Nyt saatiin määriteltyä temperoitujen distributioiden bijektiivinen Fourier-muunnos

$$(s \mapsto \widehat{s}) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (57)$$

**Esim.** Olkoon  $s(t) = e_\beta(t) := e^{i2\pi t \cdot \beta}$ . Silloin  $e_\beta \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , ja

$$\langle \widehat{e_\beta}, \widehat{\psi} \rangle := \langle e_\beta, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \beta} \psi(t)^* dt = \widehat{\psi}(\beta)^* = \langle \delta_\beta, \widehat{\psi} \rangle$$

jokaisella testifunktiolla  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Siten  $\widehat{e_\beta} = \delta_\beta \notin L^p(\mathbb{R})$  on Dirac-delta pisteessä  $\beta \in \mathbb{R}$ . Tässä esimerkissä  $s = e_\beta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  on ääretönenergiainen signaali, jossa on lopputuloksen mukaan vain taajuutta  $\beta \in \mathbb{R}$  (ja tällä taajuudella siis ääretön energiatiheys).

**Esim.** Signaali  $s := \delta_b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  on ääretönenergiainen, ja se kuvaa äkillistä napsahdusta hetkellä  $b \in \mathbb{R}$ . Nyt

$$\langle \widehat{\delta_b}, \widehat{\psi} \rangle := \langle \delta_b, \psi \rangle = \psi(b)^* = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi b \cdot \nu} \widehat{\psi}(\nu)^* d\nu = \langle e_{-b}, \widehat{\psi} \rangle$$

jokaisella testifunktiolla  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Siten  $\widehat{\delta_b} = e_{-b} \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Vaihtoehtoinen epämuodollinen laskelma tälle olisi

$$\widehat{\delta_b}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \delta_b(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt = e^{-i2\pi b \cdot \nu} = e_{-b}(\nu),$$

mutta tässä on hyvä huomata, että  $t \mapsto e^{i2\pi t \cdot \nu}$  ei ole Schwartz-testifunktio! Voidaan ajatella, että signaalin  $s = \delta_b$  energiantiheys taajuudessa on nyt vakio  $|\widehat{s}|^2 = 1$ .

**Esim.** Dirac-deltaa voi käyttää Fourier-integraalien sievennyksessä, kun integraalit ymmärretään distribuutioiden mielessä:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) \, d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) \, du \, d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} \, d\nu \right] s(u) \, du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \delta_0(t-u) s(u) \, du \\
&= \delta_0 * s(t) \\
&= s(t),
\end{aligned}$$

pyörittiin siis ympäri  $s(t) = \dots = s(t)$  — siis mikä oli idea? Laskelman ensimmäisessä yhtälössä oli työläästi todistamamme Fourier-käänteismuunnoksen tapaus, kun taas myöhemmin “fuskasimme” kirjoittamalla

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} \, d\nu = \delta_0(t-u). \quad (58)$$

Tällaisia “fuskauksia” on mukava käyttää oikopolkuina Fourier-integraalien sievennyksissä: näimme tässäkin, miten mukavasti integraalit laskun loppuvaiheessa katosivat! Yleisemmin  $\delta_b * s = T_b s$ :

$$\begin{aligned}
\delta_b * s(t) &= \int_{\mathbb{R}} \delta_b(t-u) s(u) \, du \\
&= s(t-b) = T_b s(t).
\end{aligned}$$

Toisin sanoen integraalioperaattorin  $T_b$  konvoluutioydin on  $\delta_b$  eli vastaava ydin  $K_{T_b}(t, u) = \delta_b(t-u)$ .

**Esim.** Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Määritellään  $s_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$  siten, että  $s_\varepsilon(t) := e^{-\varepsilon|t|} \operatorname{sgn}(t)$ . Silloin  $\|s_\varepsilon - \operatorname{sgn}\|_{L^\infty} \not\rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , mutta silti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} s_\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}(t),$$

ja jos  $\nu \neq 0$ , niin

$$\widehat{\operatorname{sgn}}(\nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \widehat{s_\varepsilon}(\nu) = \dots = \frac{1}{i\pi\nu}.$$

Siten jos  $r(u) := \frac{1}{\pi u}$  kun  $u \neq 0$ , niin  $\widehat{r}(\nu) = +i \operatorname{sgn}(-\nu) = -i \operatorname{sgn}(\nu)$  muodollisesti. Määritellään *Hilbert-muunnos*  $H = (s \mapsto Hs) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  siten, että

$$\widehat{Hs}(\nu) := -i \operatorname{sgn}(\nu) \widehat{s}(\nu). \quad (59)$$

Edeltävän tarkastelun mukaan Hilbert-muunnoksen tulisi toteuttaa konvoluutiotyypinen kaava singulaarisena integraalina

$$Hs(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{s(t-u)}{\pi u} du := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{s(t-u)}{\pi u} du + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{s(t-u)}{\pi u} du \right) \quad (60)$$

— ja niin se toteuttaakin (mutta todistus ei ole helppo).

**Fourier-integraalien ystävällinen tulkinta:** Jotta Fourier-integraalit

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \cdot \nu} s(u) du d\nu$$

suppenisivat itseisesti, on oltava  $s, \widehat{s} \in L^1(\mathbb{R})$ , ja silloin  $s, \widehat{s}$  ovat automaattisesti myös jatkuvia ja kuuluvat kaikkiin  $L^p$ -avaruuksiin: tämä on totta ainakin kun

$$s, s', s'' \in L^1(\mathbb{R}),$$

tai yleisemmin jos

$$s, s' \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{ja} \quad s' \in L^2(\mathbb{R}).$$

Olemme kuitenkin onnistuneet laajentamaan Fourier-muunnoksen jopa  $L^p$ -avaruuksia suurempaan Schwartz-distributioiden avaruuteen; on varsin harmitonta käyttää Fourier-integraalikaavoja näiden äärettömän energian signaalienkin tapauksessa. Jos  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , niin distributioiden mielessä

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) d\nu &= \int_{\mathbb{R}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \cdot \nu} s(u) du d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} d\nu s(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta_0(t-u) s(u) du \\ &= s(t), \end{aligned}$$

vaikka pisteittäisiä arvoja  $s(t) \in \mathbb{C}$  ei distributioille ole useinkaan olemassa! Meillä on nyt käytössä bijektiiviset “ajasta taajuuteen” -Fourier muunnokset

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \subset & L^2(\mathbb{R}) & \subset & \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \subset & L^2(\mathbb{R}) & \subset & \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{array}$$

- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sisältää kaikki “sileät nopeasti vähenevät” signaalit.
- $L^2(\mathbb{R})$  sisältää kaikki äärellisen energian signaalit.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  sisältää “olennaisesti kaikki vastaantulevat signaalit”.

Onneksi pahanlaatuisia signaaleja  $s \in L^2(\mathbb{R})$  (tai jopa ääretönenergiaisia distributioita  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ) voi approksimoida kivoilla testisignaaleilla  $s_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . (Käsittelimme Schwartz-distributioiden alkeet — lisätietoja distributioista kurssilla **MS-E1421 Harmonic analysis**.)

## 4.11 Epätarkkuusperiaate

Kvanttimekaniikassa hiukkasen aaltofunktio  $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  noudattaa ns. Schrödingerin yhtälöä. Jos  $\|s\|^2 = 1$ , niin hiukkanen on alueessa  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  todennäköisyydellä

$$\int_{\Omega} |s(x)|^2 dx.$$

Osoittautuu, että on fysikaalisesti mahdotonta mitata mielivaltaisen tarkasti yhtä aikaa hiukkasen paikkaa ja liikemäärää (tai signaalin tarkkaa aika-taajuus-sijaintia) — tätä ilmiötä kuvailee Heisenbergin epätarkkuusperiaate.

**Tehtävä.** Fourier-analyysin *Heisenbergin epätarkkuusperiaate* on epäyhtälö

$$\|s\|^2 \leq 4\pi \left( \int_{\mathbb{R}} t^2 |s(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} \nu^2 |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2}. \quad (60)$$

Todista epätarkkuusperiaate seuraavasti: Näytä ensin osittaisintegroimalla, että

$$\|s\|^2 = - \int_{\mathbb{R}} t \left( s(t) \overline{s'(t)} + \overline{s(t)} s'(t) \right) dt$$

kaikille signaaleille  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , joten

$$\|s\|^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |t s(t)| |s'(t)| dt.$$

Sovella sitten Cauchy–Schwarz -epäyhtälöä tähän integraaliin niin, että saat Heisenbergin epäyhtälön (muista, että energia säilyy Fourier-muunnoksessa).

**Huom!** On helppo todistaa yleisempi Heisenbergin epäyhtälö

$$\|s\|^2 \leq 4\pi \left( \int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 |s(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} (\nu - \nu_0)^2 |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2} \quad (61)$$

jokaisella  $t_0, \nu_0 \in \mathbb{R}$ . Miten Heisenbergin epäyhtälö voidaan tulkita? Jos  $\|s\| = 1 = \|\widehat{s}\|$ , voidaan ajatella, että  $|s|^2$  ja  $|\widehat{s}|^2$  ovat todennäköisyysjakaumia, joiden odotusarvot ovat

$$\mu_s = \int_{\mathbb{R}} t |s(t)|^2 dt \quad \text{ja} \quad \mu_{\widehat{s}} = \int_{\mathbb{R}} \nu |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu$$

ja vastaavat varianssit

$$\sigma_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_s)^2 |s(t)|^2 dt \quad \text{ja} \quad \sigma_{\widehat{s}}^2 = \int_{\mathbb{R}} (\nu - \mu_{\widehat{s}})^2 |\widehat{s}(\nu)|^2 d\nu.$$

Silloin Heisenbergin epäyhtälö on

$$\frac{1}{4\pi} \leq \sigma_s \sigma_{\widehat{s}} \quad (62)$$

eli tässä mielessä signaali ja sen Fourier-muunnos eivät voi olla lokalisoituneita mielivaltaisen tarkasti yhtä aikaa sekä ajassa että taajuudessa! Itse asiassa näissä epäyhtälöissä esiintyvä vakio  $4\pi$  on paras mahdollinen: sen voi nähdä tarkastelemalla signaalina  $s$  Gaussin normaalijakaumaa.

## 4.12 Fourier-integraali dimensiossa $d \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Olemme tähän mennessä käsitelleet 1-ulotteisten signaalien  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-analyysia. Osoittautuu kuitenkin, että  $d$ -dimensioisten signaalien tapaus on olennaisesti samankaltainen, joten tapaus  $d = 1$  on erityisen hyvä ymmärtää! Signaalin  $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-muunnos  $\widehat{s} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  lasketaan

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt, \quad (63)$$

missä  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$  (yleistetty “aika”) ja  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d$  (yleistetty “taajuus”),

$$t \cdot \nu = \sum_{k=1}^d t_k \cdot \nu_k = t_1 \nu_1 + \dots + t_d \nu_d \in \mathbb{R}$$

(“ajan” ja “taajuuden” pistetulo),

$$\int_{\mathbb{R}^d} \dots dt = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \dots dt_1 \dots dt_d.$$

Energia määritellään

$$\|s\|^2 := \int_{\mathbb{R}^d} |s(t)|^2 dt,$$

ja esimerkiksi

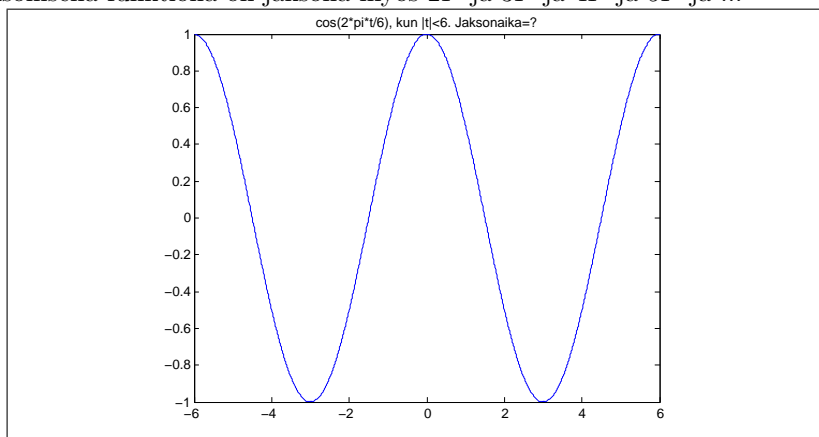
$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) d\nu, \\ \|s\|^2 &= \|\widehat{s}\|^2, \\ r * s(t) &:= \int_{\mathbb{R}^d} r(t-u) s(u) du, \\ \widehat{r * s}(\nu) &= \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$

## 5 Analoginen jaksollinen maailma: periodiset signaalit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Olkoon signaali  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nyt  $P$ -jaksollinen eli  $P$ -periodinen, siis

$$s(t - P) = s(t)$$

jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ . Esimerkiksi tutut trigonometriset funktiot  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ovat  $2\pi$ -jaksollisia, sillä  $\cos(t - 2\pi) = \cos(t)$  ja  $\sin(t - 2\pi) = \sin(t)$ .  $P$ -jaksollisesta funktiosta  $s$  riittää tietää sen arvot millä tahansa  $P$ :n mittaisella välillä, esimerkiksi janalla  $] - P/2, +P/2]$  tai janalla  $[0, P[$ . Huomaa, että jokaisella  $P$ -jaksollisella funktiolla on jaksona myös  $2P$  ja  $3P$  ja  $4P$  ja  $5P$  ja ...



**Merkintöjä:** Kun  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on  $P$ -jaksollinen eli  $s(t - P) = s(t)$  kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ , merkitään  $s : \mathbb{R}/P\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Joukkoa  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  kutsutaan nimellä “litteä torus”. (Miksi? Mieti...) Voidaan ajatella, että “aika-avaruus”  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  on ympyrä: ajanhetki  $t \in \mathbb{R}$  on sama kuin ajanhetki  $t - k \in \mathbb{R}$  kaikilla  $k \in \mathbb{Z}$ . Siten ajan  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  kokonaislukuosalla ei ole väliä, vain desimaaliosalla on merkitystä!

**Elämä helpommaksi!**  $P$ -jaksollinen signaali  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  voidaan yksinkertaisella muuttujanvaihdolla muokata 1-jaksolliseksi funktioksi  $s_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$s_1(t) := s(Pt) \tag{64}$$

eli  $s(t) = s_1(t/P)$ . Niinpä jatkossa käsittelemme VAIN yksijaksollisia signaaleja.

**Energia.** Signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  “energia” on

$$\|s\|^2 := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |s(t)|^2 dt = \int_0^1 |s(t)|^2 dt \tag{65}$$

ja meille “hyviä signaaleja” ovat ne, joilla energia  $\|s\|^2 < \infty$ , jolloin merkitään  $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . Tässä  $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  on äärellisen energian analogisten 1-jaksollisten signaalien vektoriavaruus. Huomaa, että tässä jaksollisessa tapauksessa integroidaan vain yhden ajanjakson yli, ei siis enää koko reaaliakselin  $\mathbb{R}$  yli!

## 5.1 Jaksollisten signaalien normit

**Periodiset Lebesgue-avaruudet.** Jaksollisten signaalien  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Lebesgue- $p$ -avaruuden  $L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  normi määritellään luonnollisella tavalla seuraavasti:

$$\|s\|_{L^p} \stackrel{1 \leq p < \infty}{:=} \left[ \int_0^1 |s(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad (66)$$

$$\|s\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,1]} |s(t)| \stackrel{\text{Jos } s \text{ jatkuva}}{=} \max_{t \in [0,1]} |s(t)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|s\|_{L^p} \quad (67)$$

Tällöin merkitään  $s \in L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , jos  $\|s\|_{L^p} < \infty$ . Samaistetaan signaalit  $r, s \in L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , jos  $\|r - s\|_{L^p} = 0$  eli kun  $r(t) = s(t)$  “melkein kaikilla  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ”, ja merkitään silloin yksinkertaisesti  $r = s$ . Erityisesti sanotaan:

- Signaali  $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  on *itseisesti integroitava*:  $\int_0^1 |s(t)| dt = \|s\|_{L^1} < \infty$ .
- Signaalilla  $s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  on *äärellinen energia*  $\|s\|^2 = \int_0^1 |s(t)|^2 dt = [\|s\|_{L^2}]^2$ .
- Signaali  $s \in L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  on *olennaisesti rajoitettu*:  $|s(t)| \leq \|s\|_{L^\infty}$  melkein kaikilla  $t$ .

Jaksottomille signaaleilla tiedetään, että

$$L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R}),$$

kun  $p \neq q$ , missä  $p, q \in [1, \infty]$ . Toisaalta jaksollisille signaaleille

$$L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \stackrel{p > q}{\subset} L^q(\mathbb{R}/\mathbb{Z});$$

erityisesti pätee

$$L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}),$$

sillä selvästi

$$\left[ \int_0^1 |s(t)|^q dt \right]^{1/q} \leq \left[ \int_0^1 \|s\|_{L^\infty}^q dt \right]^{1/q} = \|s\|_{L^\infty}$$

ja

$$\|s\|_{L^1} = \int_0^1 |s(t)| dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_0^1 |s(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 1 dt \right)^{1/2} = \|s\|_{L^2}.$$



## 5.2 Fourier-kerroinmuunnos ja Fourier-sarja eli jaksollisten signaalien $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tapaus ( $s : \mathbb{R}/P\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ )

**Fourier-kerroinmuunnos.** 1-jaksollisen signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  *Fourier-muunnos* on funktio  $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , joka määritellään kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt = \int_0^1 s(t) e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt, \quad (68)$$

mikäli tämä integraali on laskettavissa: selvästi

$$|\widehat{s}(\nu)| \leq \int_0^1 |s(t)| dt = \|s\|_{L^1},$$

joten tämä on ok, kun  $s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . Lukuja  $\widehat{s}(\nu) \in \mathbb{C}$  sanotaan signaalin *Fourier-kertoimiksi*. Voidaan merkitä selvyuden vuoksi myös

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(s) = \widehat{s},$$

kun halutaan korostaa, että signaali  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on 1-jaksollinen.

**Huom!** Olkoon  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Tarkista, että

$$\int_0^1 e^{-i2\pi t \cdot \nu} dt = \begin{cases} 1, & \text{kun } \nu = 0, \\ 0 & \text{muutoin!} \end{cases} \quad (69)$$

Ja sitten retorinen kysymys: mikä on signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kerroinmuunnos  $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , kun  $s(t) = e^{i2\pi t \cdot \alpha}$ , missä  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ?

**Esim.** Olkoon  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Määritellään funktio  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$s(t) := \sin(2\pi t \cdot k) \stackrel{\text{Euler}}{=} \frac{1}{2i} (e^{+i2\pi t \cdot k} - e^{-i2\pi t \cdot k}).$$

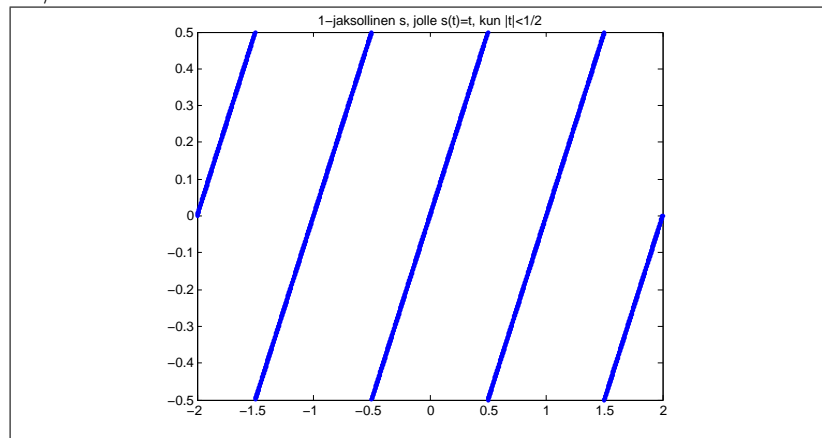
Selvästi  $s(t + m/k) = s(t)$  kaikilla  $m \in \mathbb{Z}$ , joten  $s$  on  $1/k$ -periodinen, mutta toki myös  $k/k$ -periodinen. Voidaan siis ajatella, että

$$s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C},$$

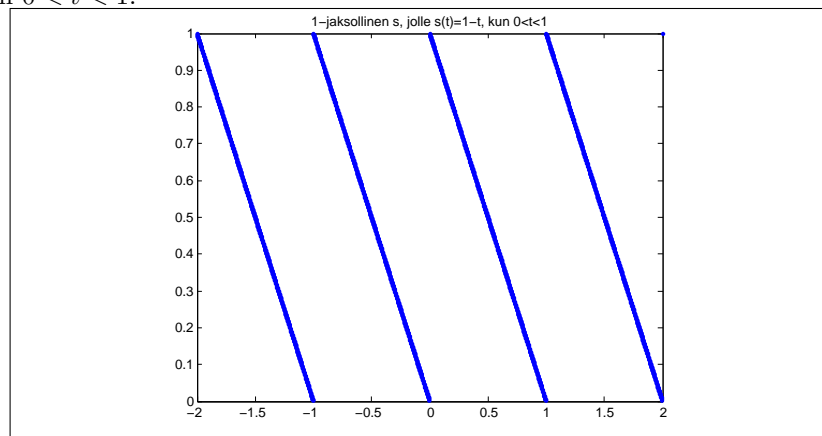
ja tällä on Fourier-kerroinmuunnoksena  $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä

$$\widehat{s}(\nu) = \begin{cases} +1/(2i), & \text{jos } \nu = +k, \\ -1/(2i), & \text{jos } \nu = -k, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

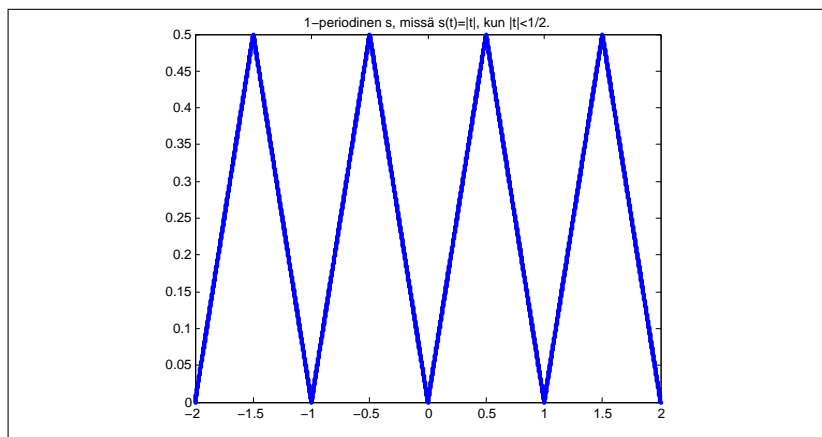
**Tehtävä.** Laske signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kertoimet, missä  $s(t) = t$ , kun  $|t| < 1/2$ .



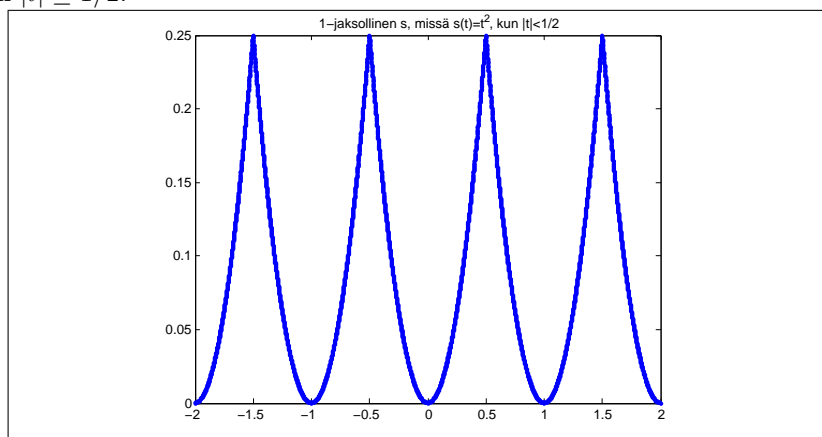
**Tehtävä.** Laske signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kertoimet, missä  $s(t) = 1 - t$ , kun  $0 < t < 1$ .



**Tehtävä.** Laske signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kertoimet, missä  $s(t) = |t|$ , kun  $|t| \leq 1/2$ .



**Tehtävä.** Laske signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kertoimet, missä  $s(t) = t^2$ , kun  $|t| \leq 1/2$ .



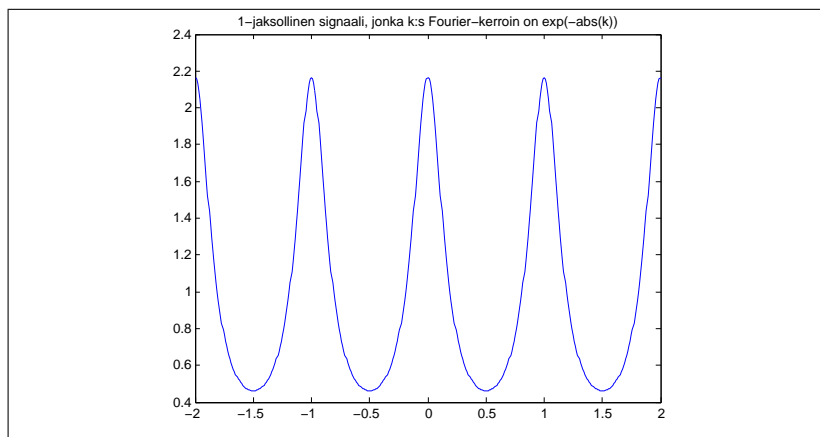
**Tehtävä.** Laske signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kertoimet, missä

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < 1/2, \\ 0, & \text{kun } 1/2 \leq 0 \leq 1. \end{cases}$$

**Tehtävä.** Näytä, että  $\hat{s}(\nu) = c_\nu \in \mathbb{C}$ , kun  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään

$$s(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i2\pi t \cdot k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi t \cdot k}$$

(toki olettaen, että  $s$  on “riittävän mukava”).



**Huomautus:** Pian osoittautuu, ettei edellisen tehtävän ilmiö ollutkaan satunnaa: jokainen “riittävän mukava”  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  voidaan palauttaa Fourier-kertoimistaan  $\widehat{s}(\nu) \in \mathbb{C}$  Fourier-sarjana

$$s(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t \cdot \nu} \quad (70)$$

— voidaan ajatella, että periodisessa analogisessa signaalissa  $s$  on tällöin sama informaatio kuin ei-periodisessa digitaalisessa signaalissa  $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Kurssin alussa esiteltyyn signaalien luokitteluun (A0, A1, D0, D1) mielessä tämä tarkoittaa sitä, että luokat (A1) ja (D0) ovat Fourier-muunnoksen kautta duaalisia niin, että näiden luokkien ominaisuudet ovat toistensa “peilikuvia”.

**Tehtävä.** Laske “mukavan” signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kertoimet, kun

$$s(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{+i2\pi t \cdot kp},$$

missä  $p \geq 1$  on kokonaisluku.

**Tehtävä.** Miten signaalin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ja sen derivaatan  $s' : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-kertoimet liittyvät toisiinsa?

**Tehtävä.** Kurssilla käyttämämme “moderni” Fourier-sarja on muotoa

$$s(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu).$$

Monissa lähteissä käytetään kömpelöä trigonometrista versiota

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi tk) + b_k \sin(2\pi tk)).$$

Etsi muunnoskaavat vakioiden  $a_k, b_k$  ja Fourier-kerrointen  $\widehat{s}(\nu)$  välillä. (Kertoimia  $a_k, b_k$  kutsutaan *kosini-* ja *sinisarjojen* kertoimiksi.)

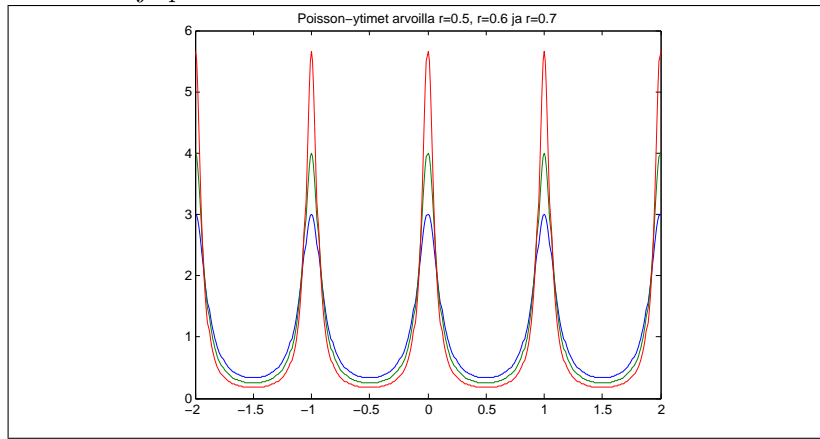
**Tehtävä.** Kun  $0 < r < 1$ , määritellään *Poisson-ydin*  $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$P_r(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{i2\pi t \cdot k}. \quad (71)$$

Näytä geometrisen summan avulla, että

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi t)}.$$

Näytä lisäksi, että  $0 < P_r(t) < \infty$  ja että  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} P_r(t) dt = 1$ . Laske myös Poisson-ytimen suurin ja pienin arvo.



**Fourier-kertoimille käänteismuunnos? Fourier-sarja!** Jos tiedetään vain Fourier-kertoimet  $\widehat{s}(k)$ , kun  $k \in \mathbb{Z}$ , voidaanko tästä tiedosta palauttaa 1-jaksollinen signaali  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ? Vastaus on kyllä, jos  $s$  on riittävän mukava! Jotta laskussa alkuun päästään, oletetaan signaalin sileys. Silloin

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^1 s(u) P_r(t - u) du \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^1 s(u) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} r^{|\nu|} e^{i2\pi(t-u)\cdot\nu} du \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) r^{|\nu|} e^{i2\pi t \cdot \nu} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) e^{i2\pi t \cdot \nu}. \end{aligned}$$

**Vaihtoehtoinen päättely käänteismuunnokselle.** Äskeinen Fourier-sarjan päättely oli erittäin läheistä sukua Fourier-integraalin käänteismuunnoksen kaavan perustelulle. Oikeastaan vain korvasimme ei-periodisen Gaussin normaali-

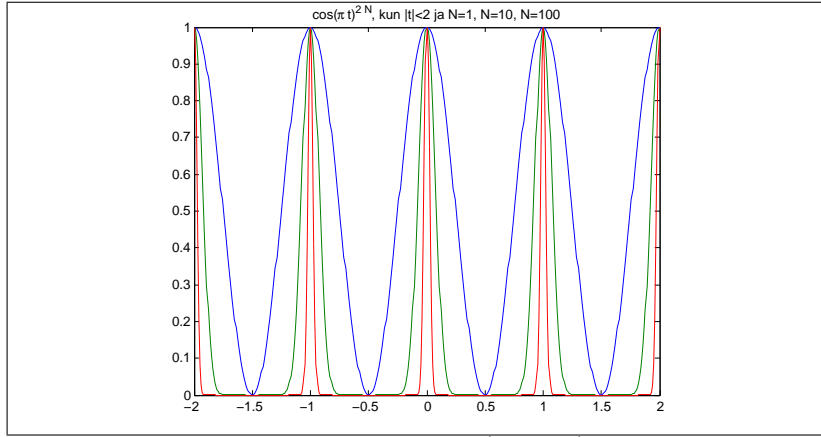
jakauman periodisella Poisson-ytimellä! Fourier-sarjan voi löytää myös muunlaisten periodisten ytimien avulla. Esimerkiksi

$$s(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 s(u) Y_N(t-u) du,$$

missä ydinfunktio  $Y_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on (esimerkiksi) muotoa

$$Y_N(t) := c_N \cos(\pi t)^{2N}, \quad (72)$$

missä  $N \in \mathbb{Z}^+$  ja vakio  $c_N \in \mathbb{R}$  valitaan siten, että  $\int_0^1 Y_N(t) dt = 1$ .



On helppo havaita, että koska  $2 \cos(\pi t) = e^{+i\pi t} + e^{-i\pi t}$ , seuraa binomikaavasta

$$\begin{aligned} Y_N(t) &= \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} e^{+i\pi t \cdot (2N-k)} e^{-i\pi t \cdot k} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} e^{+i2\pi t \cdot (N-k)}. \end{aligned}$$

Siispä saadaan

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 s(u) Y_N(t-u) du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 s(u) \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} e^{+i2\pi(t-u) \cdot (N-k)} du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} \int_0^1 s(u) e^{+i2\pi(t-u) \cdot (N-k)} du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{k} \widehat{s}(N-k) e^{+i2\pi t \cdot (N-k)} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) e^{+i2\pi t \cdot \nu} \end{aligned}$$

edellyttäen, että laskun välivaiheet olivat hyvin perusteltuja!

**Tehtävä.** Täydennä edelliseen Fourier-sarjan käänneismuunnoksen laskuun välivaiheet ja perustelut. Lasku oli ok ainakin, jos  $s \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  eli kun  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on äärettömän monta kertaa derivoituva. Lasku oli ok myös yleisemmässä tapauksessa, jossa

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{s}(\nu)| < \infty,$$

jolloin  $s$  on automaattisesti myös jatkuva.

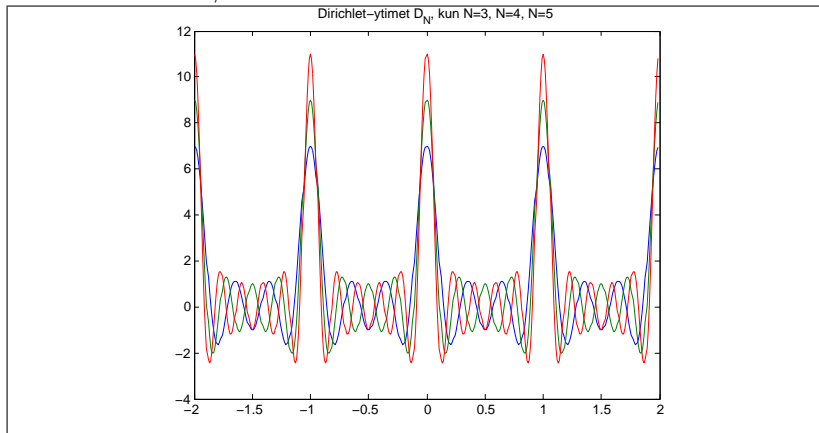
**Tehtävä.** Fourier-sarja olisi voitu löytää myös tarkastelemalla Poisson-ytimen sijaan niin sanottua Dirichlet-ydintä. Kun  $N \in \mathbb{Z}^+$ , määritellään *Dirichlet-ydin*  $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^N e^{i2\pi t \cdot k}.$$

Näytä, että

$$D_N(t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

Näytä lisäksi, että  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} D_N(t) dt = 1$ .



**Fourier-muunnos on unitaarinen:** Tarkastellaan signaaleja  $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ja niiden Fourier-muunnoksia  $\widehat{r}, \widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle &:= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{r}(\nu) \overline{\widehat{s}(\nu)} \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{r}(\nu) \overline{\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{-i2\pi t \nu} s(t) dt} \\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \nu} \widehat{r}(\nu) \overline{s(t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} r(t) \overline{s(t)} dt =: \langle r, s \rangle. \end{aligned}$$

Toisin sanoen Fourier-muunnos on unitaarinen eli se säilyttää signaalien normit ja niiden väliset kulmat! Lyhyesti sanoen sisätulot säilyvät eli

$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle r, s \rangle. \quad (73)$$

Tästä toki seuraa välittömästi energian säilyminen:

$$\|\widehat{s}\|^2 = \langle \widehat{s}, \widehat{s} \rangle = \langle s, s \rangle = \|s\|^2. \quad (74)$$

Nämä kaavat voi ensin perustella sileille testisignaaleille  $r, s \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , mistä ne laajenevat kaikille äärellisen energian signaaleille  $r, s \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ .

**Konvoluutiot.** 1-jaksollisten signaalien  $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  *konvoluutio*  $r * s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään kaavalla

$$r * s(t) := \int_0^1 r(t-u) s(u) du, \quad (75)$$

mikäli tämä integraali on laskettavissa (tässä  $r*s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , jos  $r, s \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ). Vastaavasti funktioiden  $\widehat{r}, \widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  *diskreetti konvoluutio*  $\widehat{r} * \widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään

$$\widehat{r} * \widehat{s}(\nu) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{r}(\nu - \alpha) \widehat{s}(\alpha), \quad (76)$$

mikäli tämä sarja suppenee (ok, jos summa itseisarvoista on äärellinen — palaan tähän myöhemmin.)

**Konvoluutio Fourier-muuntuu tuloksi ja päinvastoin.** Tarkastellaan “riittävän mukavia” 1-jaksollisia signaaleja  $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Näytä laskemalla, että

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu), \quad (77)$$

$$\widehat{r} \widehat{s}(\nu) = \widehat{r} * \widehat{s}(\nu), \quad (78)$$

missä  $(r s)(t) := r(t) s(t)$ .



**Periodinen konvoluutio ja silotus.** Jaksollisten analogisten signaalien  $r, s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  tapauksessa  $(r * s)' = r' * s$  eli

$$(r * s)'(t) = r' * s(t) \quad (79)$$

jokaisella  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (todistus laskemalla aivan kuten jaksottomien analogisten signaalien tapauksessa). Siten  $r * s$  on sileä, jos  $r$  on sileä.

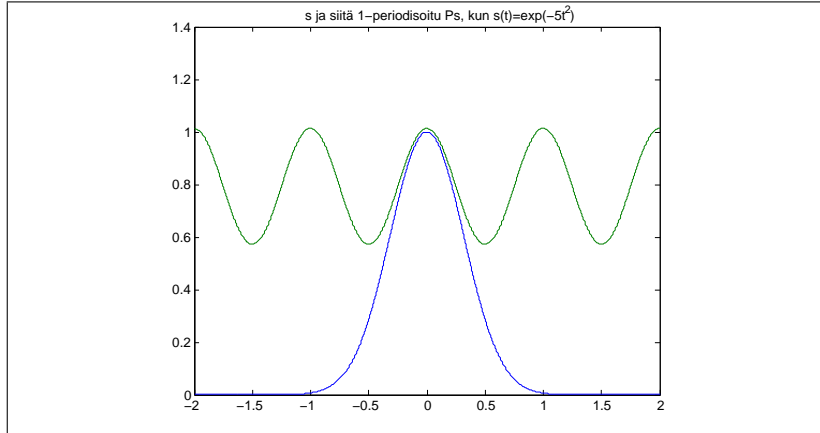
**Tehtävä.** Laske  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ .

Vihje: Tarkastele tapauksessa  $s(t) = t$  (kun  $|t| < 1/2$ ) Fourier-sarjaa

$$s * s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi t \cdot n} \widehat{s * s}(n)$$

kohdassa  $t = 0$ . Laske siis  $s * s(0)$  ja  $\widehat{s * s}(n)$ .

### 5.3 Jaksottoman analogisen signaalin periodisointi



Kuinka Fourier-integraali ja Fourier-sarja liittyvät toisiinsa? *Periodisoidaan* eli *jaksollistetaan* signaali  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  signaaliksi  $\mathcal{P}s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  siten, että

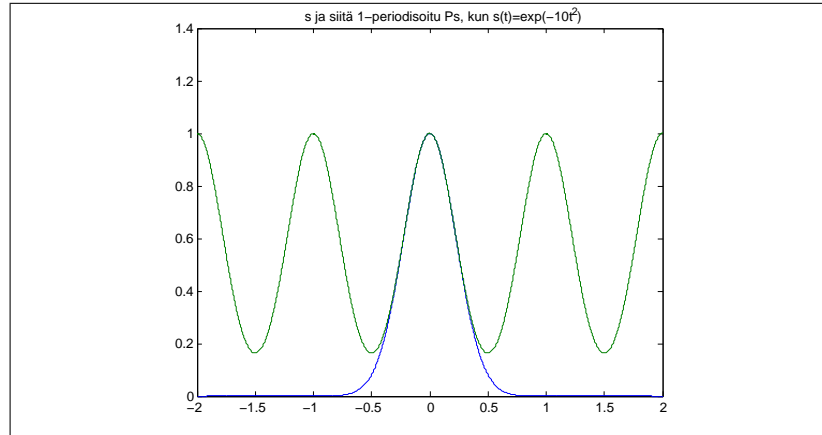
$$\mathcal{P}s(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - k). \quad (80)$$

Tämä on ok ainakin, jos  $s$  on jatkuva ja sarja suppenee itseisesti jokaisella  $t \in [0, 1]$ ; erityisesti Schwartz-testisignaaleille  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  pätee  $\mathcal{P}s \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Nyt jos  $\nu \in \mathbb{Z}$ , niin

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}s}(\nu) &= \int_0^1 e^{-i2\pi t \cdot \nu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - k) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t - k) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt = \widehat{s}(\nu). \end{aligned}$$

Siis periodisoidun signaalin  $\mathcal{P}s$  Fourier-kertoimet  $\widehat{\mathcal{P}s}(\nu)$  vastaavat luonnollisesti alkuperäisen signaalin Fourier-muunnoksen arvoja  $\widehat{s}(\nu)$  kokonaislukupisteissä  $\nu \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ :

$$\widehat{\mathcal{P}s}(\nu) = \widehat{s}(\nu), \quad \text{kun } \nu \in \mathbb{Z}. \quad (81)$$



**Poisson-summauskaava** testisignaaleille  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  on

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu). \quad (82)$$

Todistetaan tämä periodisoinnin ja Fourier-sarjan avulla:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) &\stackrel{(81)}{=} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{P}s}(\nu) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \widehat{\mathcal{P}s}(\nu) \Big|_{t=0} = \mathcal{P}s(0) \\ &\stackrel{(80)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(0 - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k). \end{aligned}$$

## 5.4 Analoginen maailma (A0 + A1)

Tähän mennessä olemme käsitelleet analogisia signaaleja  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , jotka voivat olla joko jaksottomia (tapaus A0) tai jaksollisia (tapaus A1). Tapauksen (A0) signaalille  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  määriteltiin Fourier-muunnos  $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , tarkemmin sanoen Fourier-integraalimuunnos. Tämän käänteismuunnos oli myös integraalityyppinen. Tapauksen (A1) signaalille  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määriteltiin Fourier-muunnos  $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , tarkemmin sanoen Fourier-kerroinmuunnos. Tämän käänteismuunnos oli muodoltaan Fourier-sarja. Yllä esitelty periodisointi ja Poisson-summauskaava rakentavat yhteyden tapausten (A0) ja (A1) välille.

Näiden eri Fourier-muunnosten ja Fourier-käänteismuunnosten lisäksi keskeisiä käsitteitä olivat signaalin energia ja energian säilyminen sekä erilaiset konvoluutiot.

## 6 Digitaalinen maailma:

### diskreetin ajan jaksottomat signaalit $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

Tällä kurssilla *digitaalisella signaalilla* tarkoitetaan funktiota

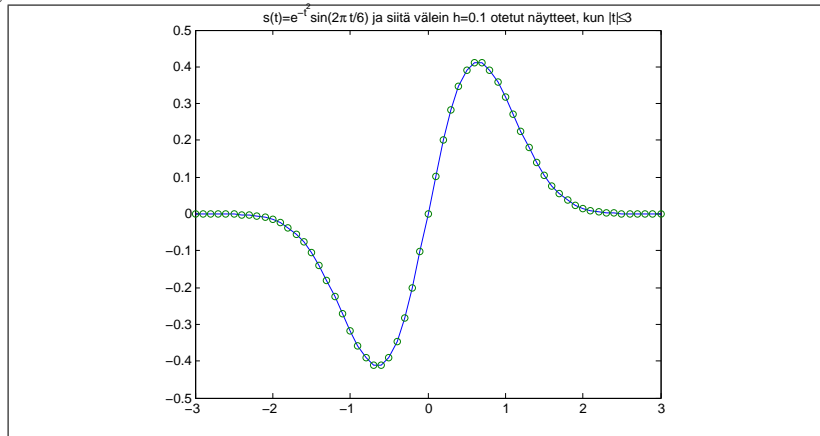
$$s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C},$$

missä  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  on *diskreetti aika-avaruus*. Jaksottoman digitaalisen signaalin Fourier-muunnosta kutsutaan *diskreetin ajan Fourier-muunnokseksi* (DTFT, Discrete Time Fourier Transform, signaalien luokka (D0)). Jaksollisten eli periodisten digitaalisten signaalien tapausta kutsutaan *diskreetiksi Fourier-muunnokseksi* (DFT, Discrete Fourier Transform, signaalien luokka (D1)), jonka numeerinen laskenta on paras suorittaa ns. “*nopealla Fourier-muunnoksella*” (FFT, Fast Fourier Transform), joka on eräs tekniikan ja luonnontieteen aloilla hyödyllisimpiä algoritmeja.

Analisisesta jaksottomasta signaalista  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (signaalien luokka (A0)) saadaan digitaalinen jaksoton signaali  $s_h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  (signaalien luokka (D0)) mittaamalla näytteitä  $h$ -pituisin aikavälein:

$$s_h(t) := s(th)$$

kaikilla  $t \in \mathbb{Z}$ . Toki on digitaalisia signaaleja, jotka eivät ole näytteitä mistään analisisesta signaalista, mutta usein käytännön sovelluksissa on kyse tällaisesta näytteenotosta.



## 6.1 Diskreetit $L^p$ -avaruudet $\ell^p$

Funktiolle  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään  $L^p$ -avaruuksien  $\ell^p := L^p(\mathbb{Z})$  normit seuraavasti:

$$\|s\|_{\ell^p} \stackrel{1 \leq p < \infty}{:=} \left[ \sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)|^p \right]^{1/p}, \quad (83)$$

$$\|s\|_{\ell^\infty} := \sup_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)|. \quad (84)$$

Tällöin merkitään  $s \in \ell^p = L^p(\mathbb{Z})$ , jos  $\|s\|_{\ell^p} < \infty$ . Erityisesti sanotaan:

- Signaali  $s \in \ell^1$  on *itseisesti summautuva*:  $\sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)| = \|s\|_{\ell^1} < \infty$ .
- Signaalilla  $s \in \ell^2$  on *äärellinen energia*  $\|s\|^2 = \sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)|^2 = [\|s\|_{\ell^2}]^2$ .
- Signaali  $s \in \ell^\infty$  on *rajoitettu*:  $|s(t)| \leq \|s\|_{\ell^\infty}$  kaikilla  $t$ .

Nyt selvästi

$$\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty,$$

ja yleisemmin  $\ell^p \subset \ell^q$ , kun  $p < q$ .

**Esim.** Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Milloin  $s \in \ell^p$ , kun  $s(t) = (1 + t^2)^{-\varepsilon/2}$ ? Huomaa, että tämä on olennaisesti sama kysymys kuin kysymykset

$$\text{Milloin } \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p\varepsilon} < \infty? \quad \text{Milloin } \int_1^{\infty} x^{-p\varepsilon} dx < \infty?$$

Tässä siis  $s \in \ell^p$  täsmälleen silloin kun  $1 - p\varepsilon < 0$  eli  $p > 1/\varepsilon$  eli  $\varepsilon > 1/p$ .

## 6.2 Diskreetit distribuutiot $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$

**Diskreetit testifunktiot.** Schwartz-testifunktioiden avaruuden  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  luonnollinen vastine digitaalisille signaaleille on *diskreetti Schwartz-avaruus*  $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ . Sanotaan, että funktio  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on avaruudessa  $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ , kun

$$\max_{t \in \mathbb{Z}} |t^N s(t)| < \infty \quad (85)$$

kaikilla  $N \in \mathbb{Z}^+$  (derivoituvuudesta ei tarvitse välittää diskreetin aikamuuttujan  $t \in \mathbb{Z}$  tapauksessa). Selvästi

$$\ell^1 \neq \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \ell^1.$$

**Esim.** Jos  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  siten, että  $s(t) \neq 0$  vain äärellisen monella  $t \in \mathbb{Z}$ , niin  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ .

**Esim.** Jos  $r \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ja  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  siten, että  $s(t) := r(t)$  (kaikilla  $t \in \mathbb{Z}$ ), niin  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ .

**Diskreetit distribuutiot.** Schwartz-distribuutioiden avaruuden  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  luonnollinen vastine digitaalisille signaaleille on *diskreetti Schwartz-distribuutioiden avaruus*  $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ . Sanotaan, että funktio  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on avaruudessa  $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ , jos on olemassa  $N \in \mathbb{Z}^+$  siten, että kaikilla  $t \in \mathbb{Z}$  pätee

$$|s(t)| \leq \text{vakio} (1 + |t|)^N \quad (86)$$

(eli  $s(t)$  kasvaa enintään polynomiaalista vauhtia, kun  $t \rightarrow \pm\infty$ ). Selvästi

$$\ell^\infty \subset \mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \neq \ell^\infty.$$

Jos  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$  ja  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ , merkitään

$$\langle s, \psi \rangle := \sum_{t \in \mathbb{Z}} s(t) \psi(t)^* \in \mathbb{C}. \quad (87)$$

**Esim.** Polynomit  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ovat diskreettejä distribuutioita. Sen sijaan  $r \notin \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ , kun  $r(t) := e^t$ .

### 6.3 Signaalien avaruus $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{Z})$

Diskreetin ajan  $t \in \mathbb{Z}$  äärellisen energian signaali on ns. neliösummautuva funktio  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ : toisin sanoen signaalilla  $s$  on äärellinen "energia"  $\|s\|^2 < \infty$ , missä

$$\|s\|^2 := \sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)|^2. \quad (88)$$

Näiden neliösummautuvien signaalien avaruutta merkitään  $\ell^2(\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{Z})$ . Lisäksi tyypillisesti vaadimme, että signaali on "riittävän mukava" — siis kulloisenkin tarpeen mukaan niin hyväkäyttöksinen, että laskutoimituksemme kestävät kriittisen tarkastelun... ;)

**Normi ja sisätulo:** Nyt kannattaa kerrata, mitä sanottiin analogisten signaalien  $s \in L^2(\mathbb{R})$  tapauksesta... Digitaalisen signaalin  $s \in L^2(\mathbb{Z})$  normi on

$$\|s\| = \left( \sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)|^2 \right)^{1/2}. \quad (89)$$

Signaalien  $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$  pistetulo eli sisätulo on

$$\langle r, s \rangle := \sum_{t \in \mathbb{Z}} r(t) \overline{s(t)}. \quad (90)$$

**Tehtävä.** Todista Cauchy-Schwarz -epäyhtälö

$$|\langle r, s \rangle| \leq \|r\| \|s\|. \quad (91)$$

ja todista sen avulla ns. Minkowskin kolmioepäyhtälö

$$\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\| \quad (92)$$

signaaleille  $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$ .

**Signaalien vektoriavaruuks:** kun  $r, s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $c \in \mathbb{C}$ , määritellään funktiot  $cs, r + s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  luonnollisesti kaavoilla

$$\begin{aligned} (cs)(t) &:= cs(t), \\ (r + s)(t) &:= r(t) + s(t) \end{aligned}$$

jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ . Havaitaan, että  $cs, r + s \in L^2(\mathbb{Z})$ , jos  $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$ . Toisin sanoen signaalien avaruus  $L^2(\mathbb{Z})$  voidaan tulkita vektoriavaruuksi. Tässä vektoriavaruuksessa voidaan ajatella signaalien  $r, s \in L^2(\mathbb{Z})$  väliseksi etäisyydeksi lukua

$$\|r - s\| = \left( \sum_{t \in \mathbb{Z}} |r(t) - s(t)|^2 \right)^{1/2}.$$

## 6.4 Diskreettiaikainen Fourier-muunnos DTFT (Discrete-Time Fourier Transform)

$$(s \mapsto \widehat{s}) : L^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

Jaksottoman digitaalisen signaalin  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-muunnos on jaksollinen analoginen signaali  $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(s) = \widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä

$$\widehat{s}(\nu) := \sum_{t \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t). \quad (93)$$

Tämä muunnos  $s \mapsto \widehat{s}$  on nimeltään *diskreetin ajan Fourier-muunnos* eli *Discrete Time Fourier Transform (DTFT)*.

**Melkein tuttua?** DTFT on olennaisesti samanlainen kuin aiempi Fourier-sarja. (Huom! Tässä imaginaariyksikön  $i$  etumerkki on miinus.) Määritelmä (93) on sellaisenaan ok, jos  $s \in \ell^1$ . Koska  $\ell^1 \subset \ell^2 \neq \ell^1$ , on määritelmä (93) tulkittava sopivasti tapauksessa  $s \in \ell^2$ : silloin esimerkiksi määritellään  $s_k \in \ell^1$  (kun  $k \in \mathbb{Z}^+$ ) kaavalla

$$s_k(t) := \begin{cases} s(t), & \text{kun } |t| \leq k, \\ 0, & \text{kun } |t| > k, \end{cases}$$

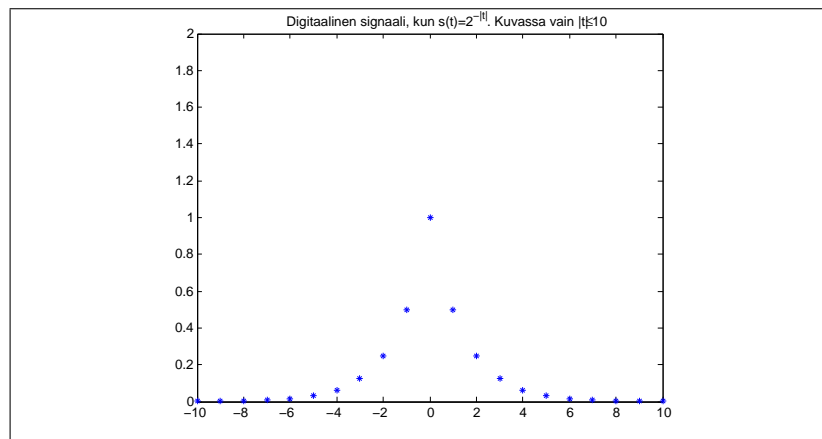
jolloin  $s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$  avaruudessa  $\ell^2$  ja vastaavasti  $\widehat{s} := \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{s}_k$  avaruudessa  $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . Silloin kaavan (93) sarja suppenee melkein kaikilla  $\nu \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Esim.** Olkoon  $k \in \mathbb{Z}$ . Määritellään signaali  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |t| = 1, \\ 0, & \text{kun } |t| \neq 1. \end{cases}$$

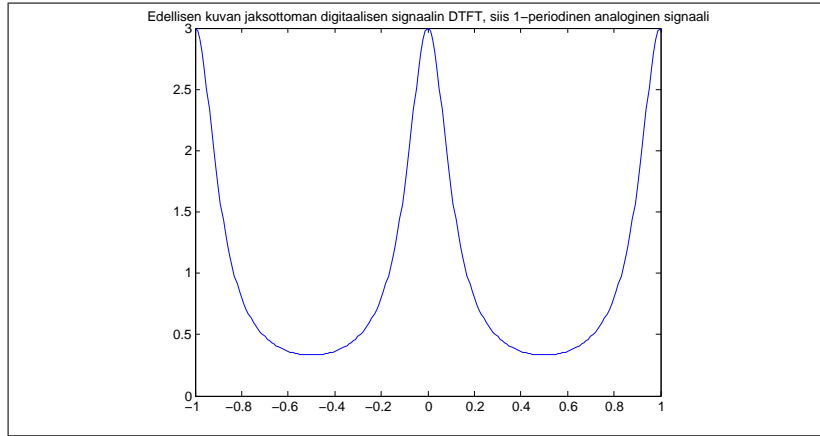
Tämän Fourier-muunnos on  $\widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , jolle

$$\widehat{s}(\nu) = e^{-i2\pi(-1)\nu} + e^{-i2\pi(+1)\nu} = 2 \cos(2\pi\nu).$$





**Tehtävä.** Laske digitaalisen signaalin  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-muunnos (DTFT)  $\hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , kun  $s(t) = 2^{-|t|}$ .



**DTFT:n käänteismuunnos.** Signaalin  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  DTFT  $\hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  lasketaan

$$\hat{s}(\nu) := \sum_{t \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t).$$

DTFT:n käänteismuunnos  $\hat{s} \mapsto s$  saadaan suoralla laskulla:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \hat{s}(\nu) \, d\nu &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \sum_{u \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi u \cdot \nu} s(u) \, d\nu \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}} s(u) \int_0^1 e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} \, d\nu \\ &= s(t). \end{aligned}$$

Saatiin siis

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} e^{+i2\pi t \cdot \nu} \hat{s}(\nu) \, d\nu. \quad (94)$$

Tässä vaiheessa kurssia tämän pitäisi olla hyvin tuttua: kaava (94) on ilmeisen läheistä sukua periodisen signaalin Fourier-kertoimien laskulle. Tämä ei ole ihme: signaalien luokat (A1) ja (D0) ovat toistensa “duaalit” Fourier-muunnoksen suhteen, ja niiden ominaisuudet ovat siten olennaisesti toistensa peilikuvat. Siten meidän ei tarvitse tarkistaa esimerkiksi DTFT:n energian säilyttävyyttä: me tiedämme sen jo!

Tarkasti ottaen kaavan (94) todistuslaskelma yllä vaatii ehdon  $s \in \ell^1$ , jotta DTFT-sarja suppenisi itseisesti; silloin  $\hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on *itseisesti jatkuva funktio*. Kaava (94) on tosin Lebesgue-integraalina voimassa kaikille äärellisen energian signaaleille  $s \in \ell^2$  (ja distribuutiointegraalina voimassa kaikille  $s \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ ).

## 6.5 Konvoluutio

Jaksottomille digitaalisille signaaleille  $r, s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , määritellään *konvoluutio*  $r * s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$r * s(t) := \sum_{u \in \mathbb{Z}} r(t-u) s(u) \quad (95)$$

mikäli signaalit  $r, s$  ovat riittävän mukavia (eli silloin, kun tässä sarja suppenee. Tämä on ok, kun  $r, s \in \ell^1$ , jolloin  $r * s \in \ell^1$ ).

**Tehtävä.** Tarkista, että jaksottomien digitaalisten signaalien konvoluutiolle pätee  $\widehat{r * s} = \widehat{r} \widehat{s}$  eli että

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu).$$

## 6.6 Fourier-bijektiot DTFT:n (ja Fourier-kerroinmuunnoksen) tapauksessa

Muistetaan analogisten ei-periodisten signaalien Fourier-bijektiot

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \subset & L^2(\mathbb{R}) & \subset & \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \subset & L^2(\mathbb{R}) & \subset & \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{array}$$

Vastaavat DTFT:n Fourier-bijektiot ovat

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}(\mathbb{Z}) & \subset & L^2(\mathbb{Z}) & \subset & \mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \subset & L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \subset & \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \end{array}$$

missä  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  on 1-periodisten distribuutioiden avaruus. Toisin sanoen  $s \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , jos

$$s = r^{(m)} + \text{vakio},$$

missä  $r^{(m)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  on 1-periodisen funktion  $r \in L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$   $m$ :s distribuutioderivaatta jollakin  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

Ja Fourier-kerroinmuunnokselle vastaava diagrammi on toki

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \subset & L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \subset & \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(\mathbb{Z}) & \subset & L^2(\mathbb{Z}) & \subset & \mathcal{S}'(\mathbb{Z}). \end{array}$$

;) )

## 6.7 Analogisten ja digitaalisten signaalien yhteys jaksotomassa tapauksessa

Tutkitaan nyt, miten jaksottomat analogiset signaalit (A0) liittyvät jaksotomiin digitaalisiin signaaleihin (D0). Tarkastellaan riittävän mukavaa jaksotonta analogista signaalia  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Poisson-summakaava

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k)$$

on yhtäpitävä seuraavan kaavan kanssa:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - \alpha) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu}. \quad (93)$$

Todistetaan tämä kaava kuitenkin suoraan periodisoinnin Fourier-sarjan avulla:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - \alpha) = \mathcal{P}\widehat{s}(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi k \cdot \nu} \widehat{\mathcal{P}\widehat{s}}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi k \cdot \nu} s(-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi k \cdot \nu} s(k).$$

Mitä tästä seuraa? Olkoon nyt  $s_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sellainen, että

$$\widehat{s}_1(\nu) = 0 \text{ aina kun } |\nu| \geq 1/2.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \widehat{s}_1(\nu) &= \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}_1(\nu - \alpha) \\ &\stackrel{(93)}{=} \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu) \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu} \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu), \end{aligned}$$

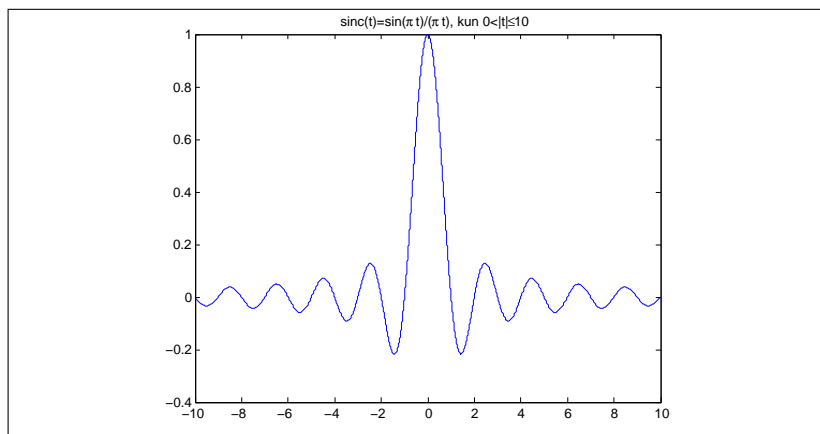
siis

$$\widehat{s}_1(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) e^{-i2\pi k \cdot \nu} \mathbf{1}_{]-1/2, +1/2[}(\nu),$$

mikä Fourier-käänteismuunnettuna johtaa **normalisoituun Whittaker–Shannon-näytekaavaan**

$$s_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) \operatorname{sinc}(t - k), \quad (94)$$

missä siis  $\widehat{s}_1(\nu) = 0$  aina kun  $|\nu| \geq 1/2$ .



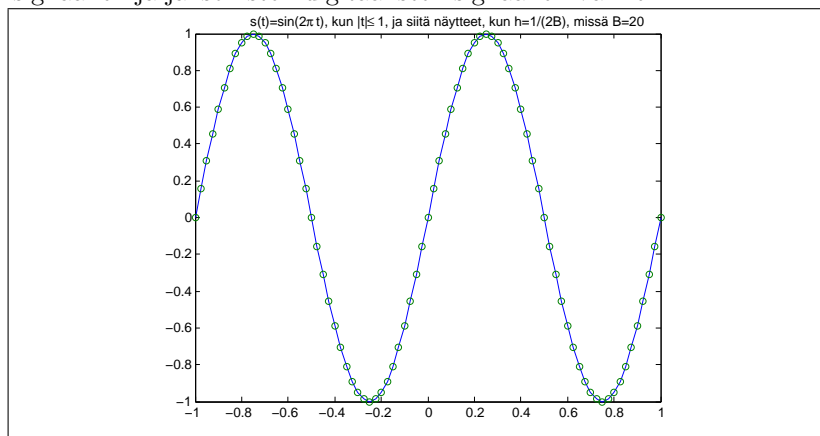
Jos  $\hat{s}(\nu) = 0$  aina kun  $|\nu| \geq B$ , niin normalisoidusta Whittaker–Shannon -näytekaavasta saadaan sopivan muuttujanvaihdon avulla yleinen **Whittaker–Shannon näytekaava**

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{k}{2B}\right) \text{sinc}(2Bt - k), \quad (95)$$

Tähän kaavaan liittyvä **Nyquist–Shannon -näytelause** sanoo: Jos analoginen signaali  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  on **kaistarajoitettu** (engl. **band-limited**) (mikä tarkoittaa  $\hat{s}(\nu) = 0$  aina kun  $|\nu| \geq B$ ), niin  $s$  voidaan palauttaa tasavälisesti otetuista näytearvoista eli vastaavasta digitaalisesta signaalista  $r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , jolle

$$r(k) := s\left(\frac{k}{2B}\right).$$

Toisin sanoen Whittaker–Shannon -kaava rakentaa sillan jaksottomien analogisten signaalien ja jaksollisten digitaalisten signaalien välille!



**Huom.** Nyquist–Shannon -näytelauseen viesti on: jos signaalissa  $s$  on vain alle  $B$ :n taajuuksia, niin  $s$  voidaan (teoriassa) palauttaa näytteistä  $s(k/(2B))$ , missä  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Esimerkki.** Puheäänessä ei ole sanottavammin energiaa yli 8 000 Hz:n taajuuksilla. Siten teoriassa Nyquist–Shannon -näytelauseen nojalla puheen tallentamiseen riittää ottaa 16 000 näytettä sekunnissa.

**Esimerkki.** CD-levylle tallennetaan (monofoninen) äänite, jossa on 44 100 näytettä sekunnissa. Tällöin Nyquist–Shannon -näytelauseen mukaan on CD-tallenteesta mahdollista rekonstruoida alkuperäinen ääni, **jos** siinä ei ole taajuuksia yli rajan  $44\,100/2 = 22\,050$  Hz. Käytännössä ei kuitenkaan kannata olettaa liikoja rekonstruktion laadusta teoreettisen ylärajan tuntumassa...

## 7 Digitaalinen maailma:

### diskreetin ajan jaksolliset signaalit $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

Olkoon  $N \in \mathbb{Z}^+$ .  $N$ -jaksollinen eli  $N$ -periodinen digitaalinen signaali  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  toteuttaa

$$s(t - N) = s(t) \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{Z}$$

— merkitään silloin

$$s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (96)$$

### 7.1 Diskreetti Fourier-muunnos DFT eli jaksollisten signaalien $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tapaus ( $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ )

Signaalin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetti Fourier-muunnos (DFT, Discrete Fourier Transform)  $\hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään kaavalla

$$\hat{s}(\nu) := \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} s(t). \quad (97)$$

Huomaa, että eksponenttifunktiossa tässä on  $t \cdot \nu/N$  eikä aikaisempi  $t \cdot \nu$ . Helppo harjoitustehtävä: perustele itsellesi, miksi pätee

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{t=0}^{N-1} e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} s(t).$$

**Huom!** Olkoon  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Jos  $\nu/N \notin \mathbb{Z}$ , niin geometrisena summana saadaan

$$\sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} = \dots = 0.$$

Jos taas  $\nu/N \in \mathbb{Z}$ , niin selvästi

$$\sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} = \sum_{t=1}^N 1 = N.$$

**Tehtävä.** Määritellään  $e_\alpha, \delta_a : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavoilla

$$e_\alpha(t) := e^{+i2\pi t \cdot \alpha/N}, \quad \delta_a(t) := \begin{cases} 1, & \text{jos } (t - a)/N \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Laske  $\hat{e}_\nu, \hat{\delta}_a : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .

(Tässä  $\delta_a$  on nimeltään *Kronecker-delta*, ja se on jatkuvan ajan *Dirac-deltan* diskreettiaikainen sukulainen.)

**Tehtävä.** Miten  $\hat{r} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  liittyy signaaliin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , kun  $r = \hat{s}$ ?

**Tehtävä.** Näytä, että DFT:n käänteismuunnos  $\widehat{s} \mapsto s$  lasketaan

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N e^{+i2\pi t \cdot \nu / N} \widehat{s}(\nu). \quad (98)$$

Huomaa kerroin  $\frac{1}{N}$  tässä kaavassa!

**Tehtävä.** Määritellään nyt jaksollisen digitaalisen signaalin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  *energia* kaavalla

$$\|s\|^2 := \sum_{t=1}^N |s(t)|^2. \quad (99)$$

Etsi vakio  $c_N$  niin, että kaikille signaaleille  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  pätee

$$\|s\|^2 = c_N \|\widehat{s}\|^2. \quad (100)$$

Siten tässä tapauksessa “energia säilyy vakiota vaille”.

**Diskreetti periodinen konvoluutio.**  $N$ -jaksollisten digitaalisten signaalien  $r, s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetti *konvoluutio*  $r * s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään

$$r * s(t) := \sum_{u=1}^N r(t-u) s(u). \quad (101)$$

**Tehtävä.** Tarkista, että diskreetille periodiselle konvoluutiolle pätee  $\widehat{r * s} = \widehat{r} \widehat{s}$ , toisin sanoen kaikilla  $\nu \in \mathbb{Z}$  (tai oikeammin  $\nu \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ) pätee

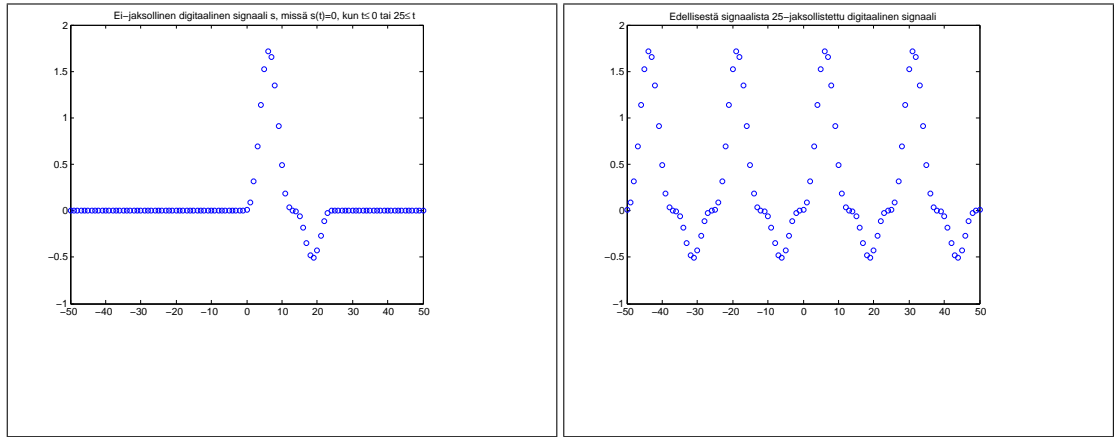
$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu). \quad (102)$$

## 7.2 Jaksottoman digitaalisen signaalin periodisointi

“Riittävän mukavalle” jaksottomalle digitaaliselle signaalille  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  voidaan määritellä jaksollinen digitaalinen signaali  $s_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$s_N(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - kN). \quad (103)$$

Tässä esimerkiksi  $s \in \ell^1 = L^1(\mathbb{Z})$  on “riittävän mukava”.



Silloin DFT  $\widehat{s}_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ja DTFT  $\widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  liittyvät luonnollisesti toisiinsa:

$$\begin{aligned} \widehat{s}_N(\nu) &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} s_N(t) \\ &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu/N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - kN) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi u \cdot \nu/N} s(u) = \widehat{s}(\nu/N). \end{aligned}$$

Siten kaikilla  $\nu$  pätee

$$\widehat{s}_N(\nu) = \widehat{s}(\nu/N). \quad (104)$$

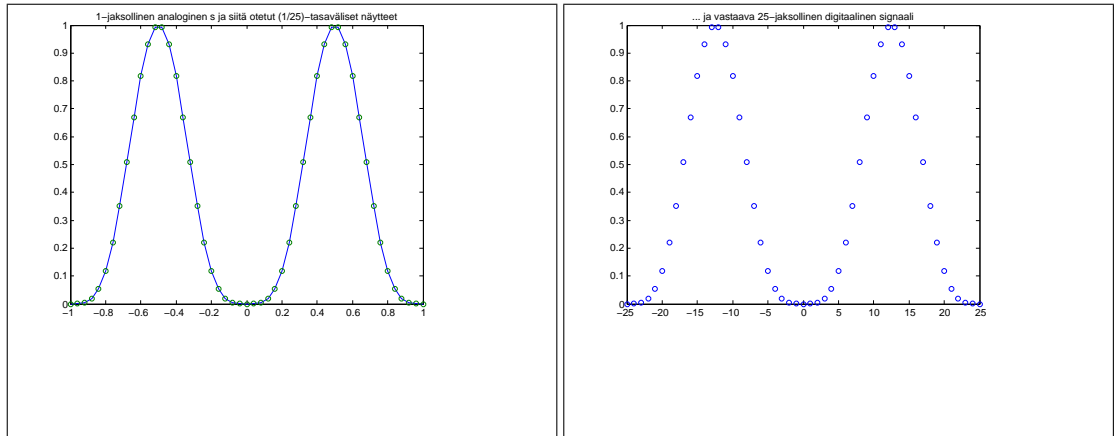


### 7.3 Jaksollisen analogisen signaalin digitointi

“Mukavalle” jaksolliselle analogiselle signaalille  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  voidaan määritellä jaksollinen digitaalinen signaali  $s_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$s_N(t) := s(t/N). \quad (105)$$

Tässä esimerkiksi jatkuva  $s$  on “riittävän mukava”.



Silloin DFT  $\widehat{s}_N : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ja Fourier-kerroinmuunnos  $\widehat{s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  liittyvät luonnollisesti toisiinsa:

$$\begin{aligned} \widehat{s}_N(\nu) &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t/N) \\ &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\alpha) e^{+i2\pi(t/N) \cdot \alpha} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\alpha) \sum_{t=1}^N e^{i2\pi t \cdot (\alpha - \nu) / N} = N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - kN), \end{aligned}$$

jos  $\widehat{s} \in \ell^1 = L^1(\mathbb{Z})$  (jolloin  $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on automaattisesti myös jatkuva). Siten kaikilla  $\nu \in \mathbb{Z}$  pätee

$$\widehat{s}_N(\nu) = N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{s}(\nu - kN), \quad (106)$$

jos  $\widehat{s} \in \ell^1 = L^1(\mathbb{Z})$ .

## 7.4 Nopea Fourier-muunnos FFT (Fast Fourier Transform)

Nopea Fourier-muunnos **FFT** (Fast Fourier Transform) on tehokas keino laskea DFT. FFT on ns. "hajoita-ja-hallitse" -algoritmi, ja se on eräs insinööritieteiden ja sovelletun matematiikan tärkeimmistä työkaluista.

**Esim.** Alkuverryttelyä ennen FFT:tä tarkastellaan järjestelyongelmaa. Oetaan tehtäväksi aakkostaa lyhyt kirjainjono DCBA. Hidas aakkostus "tuntipalkkaisena työntekijänä" voisi olla tällainen:

DCBA,  
CDBA,  
CBDA,  
CBAD,  
BCAD,  
BACD,  
ABCD.

Olkoon "hajoita-ja-hallitse" -algoritmeista esimerkkinä MergeSort, jonka kehitti János (engl. John) von Neumann vuonna 1945. MergeSort ensin pilkkoo ongelman rekursiivisesti pieniksi paloiksi ("hajoita"), sitten ratkaisee osaongelmat ja yhdistää tulokset ("hallitse"). Aakkostetaan pidempi kirjainjono HGFEDCBA "urakkapalkkaisena työntekijänä" seuraavasti:

HGFEDCBA,  
HGFE DCBA,  
HG FE DC BA,  
GH EF CD AB,  
EFGH ABCD,  
ABCDEFGH.

**FFT:n idea.** Halutaan laskea jaksollisen digitaalisen signaalin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-muunnos  $F_N s = \hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Yleisyyttä menettämättä oletetaan nyt, että  $N = 2^k \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, \dots\}$ . Jaetaan silloin laskenta kahdeksi pienempikokoiseksi DFT:ksi:

$$\begin{aligned} F_N s(\nu) &= \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t) \\ &= \sum_{t \in \{1, 3, 5, \dots, N-1\}} e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t) + \sum_{t \in \{2, 4, 6, \dots, N\}} e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t) \\ &= \sum_{t=1}^{N/2} e^{-i2\pi(2t-1) \cdot \nu / N} s(2t-1) + \sum_{t=1}^{N/2} e^{-i2\pi(2t) \cdot \nu / N} s(2t) \\ &= e^{+i2\pi \nu / N} F_{N/2} s_{\text{Odd}}(\nu) + F_{N/2} s_{\text{Even}}(\nu). \end{aligned}$$

Nyt meidän siis tarvitseeikin olennaisesti laskea vain  $F_{N/2}s_{\text{Odd}}$  and  $F_{N/2}s_{\text{Even}}$ ...

**Miksi FFT vaatii vain noin  $N \log(N)$  laskenta-askelta?** Algoritmin *kompleksisuus* tarkoittaa laskennan *työläyttä* eikä “kompleksilukuarvoisuutta”! Sanoetaan, että algoritmin  $F_N$  kompleksisuus on laskennassa tarvittavien kertolaskujen “olennainen lukumäärä”  $M_N$ . Selvästi  $M_1 = 1$  ja  $M_N \leq N^2$ , koska

$$F_N s(\nu) = \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \cdot \nu / N} s(t)$$

— tässähän on  $N$  kpl taajuuksia  $\nu$ , ja toisaalta kullakin yksittäisellä taajuudella on tässä summassa  $N$  kpl termejä, joissa kussakin on yksi kertolasku. Toisaalta äsken saatiin

$$F_N s(\nu) = e^{+i2\pi \nu / N} F_{N/2} s_{\text{Odd}}(\nu) + F_{N/2} s_{\text{Even}}(\nu), \quad (107)$$

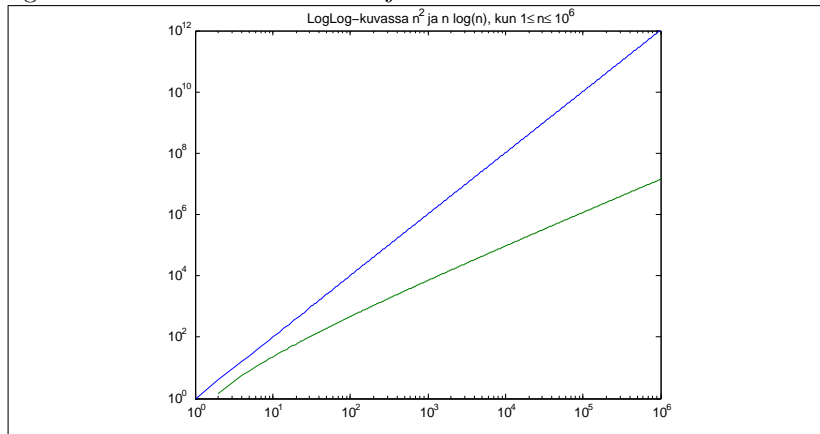
mistä seuraa

$$\begin{aligned} M_N &\stackrel{(107)}{\leq} N + 2 M_{N/2} \\ &\stackrel{(107)}{\leq} N + 2(N/2 + 2 M_{N/4}) = 2N + 4 M_{N/4} \\ &\stackrel{(107)}{\leq} 2N + 4(N/4 + 2 M_{N/8}) = 3N + 8 M_{N/8} \\ \dots &\stackrel{(107)}{\leq} \log_2(N) N + N M_{N/N} = N \log(N) + N \approx N \log(N). \end{aligned}$$

Yllä saatiin siis  $M_N \leq N \log_2(N) + N$ , mutta  $N \ll N \log_2(N)$  “suurilla  $N$ ”, joten voidaan sanoa, että olennaisesti

$$M_N \lesssim N \log(N) \quad (108)$$

— logaritmin kantalukukin on toissijaista informaatiota.



**Tehtävä.** Laadi taulukko, jonka sarakkeina ovat luvut muotoa  $N, N \log_{10}(N), N^2$  ja  $N^2/(N \log_{10}(N))$ , missä taulukon riveinä ovat tapaukset

$$N \in \{10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6\}.$$

**Nopea konvoluutio FFT:n avulla.** Signaalien  $r, s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetin konvoluution  $r * s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  suoraviivainen laskenta vaatisi  $N^2$  kertolaskua, koska

$$r * s(t) = \sum_{u=1}^N r(t-u) s(u).$$

Toisaalta

$$\widehat{r * s}(\nu) = \widehat{r}(\nu) \widehat{s}(\nu),$$

missä Fourier-muunnosten kertolasku  $(\widehat{r}, \widehat{s}) \mapsto \widehat{r} \widehat{s}$  vie vain  $N$  kompleksilukujen kertolaskua. Muunnosten

$$r \mapsto \widehat{r}, \quad s \mapsto \widehat{s}, \quad \widehat{r} \widehat{s} \mapsto r * s$$

FFT-laskenta vie kukin vain noin  $N \log(N)$  kertolaskuoperaatiota. Siten konvoluution  $(r, s) \mapsto r * s$  laskennan olennainen kompleksisuus on vain luokkaa  $N \log(N)$  (tarkemmin:  $3N \log_2(N) + 4N \approx 3N \log_2(N)$ , mutta usein tällainen tarkkuus on epäoleennaista...).

**Tehtävä.** Selitä, kuinka voidaan toteuttaa polynomien kertolasku nopeasti konvoluution ja FFT:n avulla.

(Vihje:  $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  ja  $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$  voidaan tulkita vektoreina

$$a = (a_k)_{k=0}^{m+n}, \quad b = (b_k)_{k=0}^{m+n},$$

missä  $a_k = 0$ , jos  $k > m$ , ja  $b_k = 0$ , jos  $k > n$ . Silloin  $p(x)q(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$  vastaa vektoria  $c = (c_l)_{l=0}^{m+n}$ , missä  $c_l$  liittyy konvoluutioon..)

**Tehtävä.** Selitä, kuinka voidaan toteuttaa “suurten kokonaislukujen” kertolasku nopeasti konvoluution ja FFT:n avulla.

(Vihje: Kokonaisluvut voidaan kirjoittaa edellisen tehtävän polynomien tapaan vaikkapa 10-kantaisessa lukujärjestelmässä  $p(10) = \sum_{k=0}^m a_k 10^k$ ,  $q(10) = \sum_{k=0}^n b_k 10^k$ , missä  $a_k, b_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .)

**FFT:n Matlab-laskenta.** Matlab:n komento `fft` (Fast Fourier Transform) toimii seuraavasti:

vektori  $\mathbf{X} = \text{fft}(\mathbf{x})$  lasketaan vektorista  $\mathbf{x} = [x(1) \ x(2) \ \dots \ x(N)]$  kaavalla

$$X(m) = \sum_{k=1}^N e^{-i2\pi(k-1)(m-1)/N} x(k). \quad (109)$$

Huomaa, että meidän käyttämämme DFT:n määritelmä on

$$\hat{x}(m) := \sum_{k=1}^N e^{-i2\pi k \cdot m/N} x(k). \quad (110)$$

Siten tässä DFT ja Matlab:n `fft` poikkeavat toisistaan yhden indeksin verran sekä ajassa että taajuudessa, mikä on otettava laskuissa huomioon. **Sinua on siis varoitettu!!!** ;) Käyttämämme DFT on Fourier-analyysin kaavojen kannalta mukava toisin kuin Matlab:n `fft`. Esimerkiksi “konvoluutio on Fourier-muunnoksen toisella puolen kertolasku” ei päde Matlab-algoritmissa, mutta pätee toki DFT:ssä! Samoin Matlab-laskennassa taajuuksien skaala on “yhdellä pielessä”: kun  $1 \leq k \leq N/2$  ja

$$\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_{N/2} \ X_{N/2+1} \ \dots \ X_{N-2} \ X_{N-1} \ X_N],$$

vastaa Fourier-kerroin  $X_{k+1}$  perustaaajuuden  $k$ -monikertaa (eikä  $(k+1)$ -monikertaa!).

Matlab on kuitenkin muutoin mainio laskennallisessa Fourier-analyysissä ja signaalinkäsittelyssä.

**Tehtävä.** Oletetaan, että haluat laskea signaalin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetin Fourier-muunnoksen  $\hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ; kuinka käytät tähän `fft`-komentoa?

**Tehtävä.** Olkoon Matlab-ohjelman merkinnöillä  $\mathbf{X} = \text{fft}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{Y} = \text{fft}(\mathbf{y})$  ja  $\mathbf{Z} = \text{fft}(\mathbf{z})$ , missä  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} * \mathbf{Y}$  on vektorien  $\mathbf{X}$  ja  $\mathbf{Y}$  kertolasku komponenteittain. Miten signaalien  $x$  ja  $y$  konvoluutio liittyy signaaliin  $z$ ?

## 7.5 Digitaalinen maailma (D0 + D1)

Nyt käsitelimme digitaalisia signaaleja  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , jotka voivat olla joko jakottomia (tapaus D0) tai jaksollisia (tapaus D1). Tapauksen (D0) signaalille  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määriteltiin Fourier-muunnos  $\hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , tarkemmin sanoen diskreetin ajan Fourier-muunnos (DTFT). Tämän käänteismuunnos oli Fourier-sarjatyypinen. Tapauksen (D1) signaalille  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määriteltiin Fourier-muunnos  $\hat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , tarkemmin sanoen diskreetti Fourier-muunnos (DFT). Tämän käänteismuunnos oli muodoltaan DFT-tyyppinen. Yllä esitelty periodisointi ja näytteenotto (Whittaker–Nyquist–Shannon) rakentavat yhteyden erilaisten Fourier-muunnosten välille.

Näiden eri Fourier-muunnosten ja Fourier-käänteismuunnosten lisäksi keskeisiä käsitteitä olivat signaalin energia ja energian säilyminen sekä erilaiset konvoluutiot.

DFT:n laskennassa tärkeä tehokas menetelmä oli FFT.

## 8 Aika–taajuus-analyysi

Seuraavaksi pyrimme esittämään analogisen signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aikataajuustasossa eli yhtä aikaa sekä ajan että taajuuden suhteen. Tällaisen aika–taajuus-analyysin sovelluskohteita ovat mm. audiosignaalien käsittely (fonetiikka, puhevikojen hoito, äänisynteesi, eläinten äänien tutkimus, musiikki), EEG- ja EKG-datojen lääketieteellinen kuvitus, kaikuluotain- ja tutkasignaalien käsittely, seismologia, kvanttifysiikka jne.

Analogisen signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aika–taajuus-jakauma on tyypillisesti funktio

$$As : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

missä  $As(t, \nu) \in \mathbb{C}$  on “signaalin  $s$  intensiteetti tai energiatiheys aika–taajuudessa  $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ”. Erilaisia aika–taajuus-jakaumia on lukuisia, erityisesti mainittakoon Leon Cohenin vuonna 1966 esittelemä bilineaaristen aika–taajuus-jakaumien perhe, johon kuuluvat esimerkiksi kaikki spektrogrammit ja ns. Born–Jordan -jakauma.

### 8.1 Ikkunoitu Fourier-muunnos (Windowed Fourier Transform) (STFT, Short-Time Fourier Transform) ja spektrogrammi

Seuraavassa tarkastellaan analogista signaalia  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ikkunan  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  avulla — usein voidaan myös ajatella, että  $w$  on toinen analoginen signaali. *w-ikkunoitu Fourier-muunnos* (**STFT**, Short-Time Fourier Transform) signaalille  $s$  on funktio  $F(s, w) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , joka määritellään kaavalla

$$F(s, w)(t, \nu) := \widehat{s \overline{w}_t}(\nu), \quad (111)$$

missä  $w_t(u) = w(u - t)$ . Toisin sanoen

$$F(s, w)(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} s(u) \overline{w(u - t)} e^{-i2\pi u \cdot \nu} du.$$

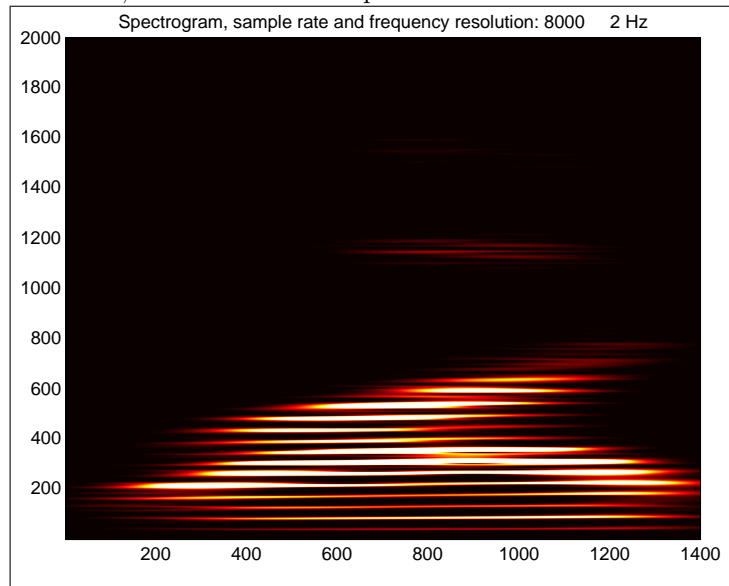
Idea: Fourier-muunnos  $\widehat{s}(\nu)$  mittaa signaalin  $s$  “sisältöä” taajuudella  $\nu \in \mathbb{R}$  yli kaikkien ajanhetkien.  $F(s, w)(t, \nu)$  mittaa signaalin  $s$  “sisältöä” aika–taajuudessa  $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (kun signaalia  $s$  katsotaan ikkunan  $w$  läpi). Usein on syytä valita  $w$  niin, että “ $w(t) \approx 0 \approx \widehat{w}(\nu)$  suurilla  $|t|, |\nu| \in \mathbb{R}$ ” (miksi?).

**Spektrogrammi (Sonogrammi).** *w-spektrogrammi* eli *w-ikkunoituun Fourier-muunnokseen* liittyvä spektrogrammi on

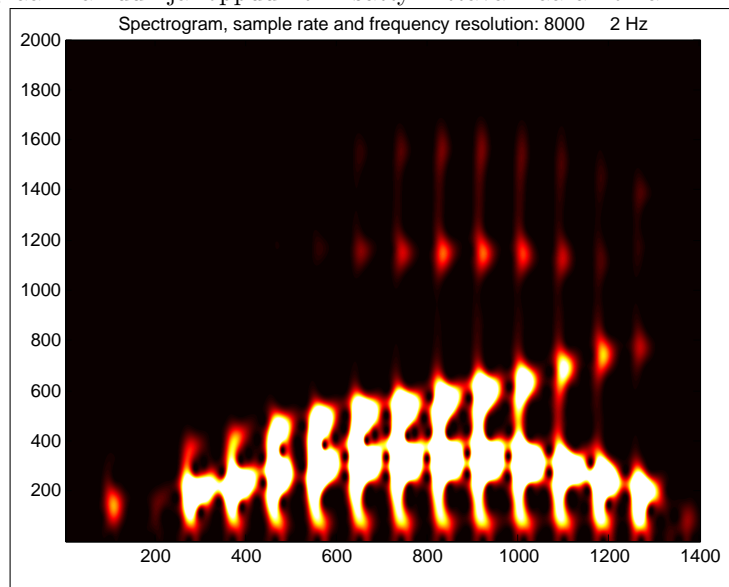
$$|F(s, w)|^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+. \quad (112)$$

Idea:  $|F(s, w)(t, \nu)|^2 \geq 0$  on signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  “energiatiheys” aika–taajuudessa  $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (kun signaalia  $s$  katsotaan ikkunan  $w$  läpi).

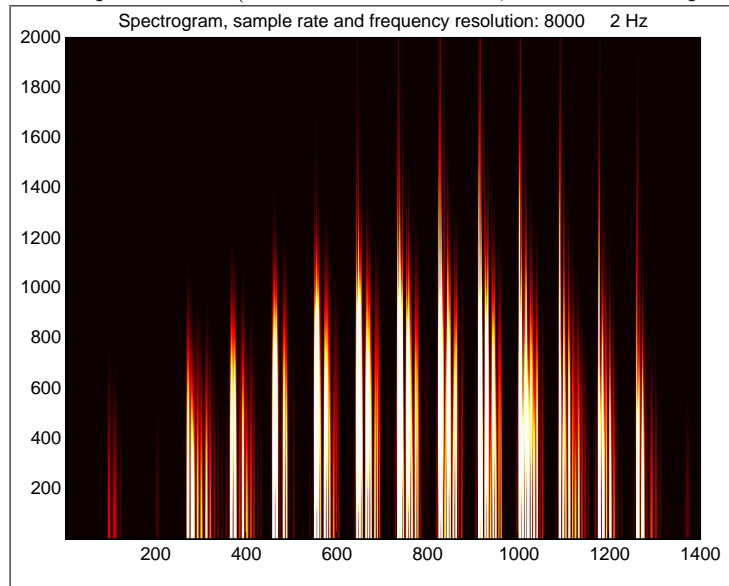
**Esimerkkejä spektrogrammeista.** Huomaa, että ikkunoitu Fourier-muunnos ja vastaava spektrogrammi riippuvat olennaisesti ikkunan  $w$  valinnasta! Seuraavissa spektrogrammeissa on kuvitettu sama signaali, jossa mies kysyy englanniksi “Why?”. Näissä spektrogrammeissa musta väri tarkoittaa matalaa energian intensiteettiä, kirkkaan valkoinen puolestaan korkeaa.



Tässä on otettu 1400 näytettä näytteenottotaajuudella 8000 Hz (eli aikavälin pituus on  $1400/8000 = 0.175$  sekuntia), ja kuvien pystyakselin taajuusyksikkö on 2 Hz (siis kuvan pystyakselin luku 200 vastaa taajuutta 400 Hz) — laskennassa signaalin alkuun ja loppuun on lisätty riittävä määrä nollia.



Kussakin kuvassa aikaikkuna  $w$  on Gauss-tyyppinen funktio: ensimmäisessä kuvassa aikaikkuna on levein ja viimeisessä kapein. Leveä aikaikkuna paikallistaa taajuudet suht'hyvin, kun taas kapea aikaikkuna löytää suht'hyvin äänen äkilliset napsahdukset (ihmisiä äänen "narinan", äänihuulten napsahdukset).



Spektrogrammien sumeus (väljästi sanoen) johtuu "mielivaltaisesta" aikaikkunan valinnasta **ja** kaksinkertaisesta epätarkkuusperiaatteesta. Kohta esittelemme Born–Jordan aika–taajuus-jakauman, jossa signaalille ei valita mitään aikaikkunaa ja joka tarkkuudessaan päihittää spektrogrammit. Fourier-analyysin yksinkertainen epätarkkuusperiaate pätee Born–Jordan -tapauksessakin, mutta iso osa spektrogrammin sumeutta on aikaikkunan valinnan seurausta!

**Spektrogrammin laskenta tietokoneella.** Kokeile spektrogrammeja Matlab-ohjelmalla:

`help spectrogram`

... tai ohjelmoi itse oma spektrogrammisi: on helppo toteuttaa

$$|F(s, w)(t, \nu)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} s(u) \overline{w(u-t)} e^{-i2\pi u \cdot \nu} du \right|^2.$$

**Tehtävä.** Olkoon  $\delta_b$  Dirac-delta hetkellä  $b \in \mathbb{R}$  ja  $e_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $e_\alpha(t) = e^{i2\pi t \cdot \alpha}$ . Miten ikkunan  $w$  valinta näkyy signaalien  $\delta_b, e_\alpha$   $w$ -ikkunoiduissa Fourier-muunnoksissa ja vastaavissa spektrogrammeissa?

**Tehtävä.** Miten signaali  $s$  saadaan laskettua ikkunoidusta Fourier-muunnoksesta  $F(s, w)$ , kun ikkuna  $w$  tunnetaan ja  $w(t) \neq 0$ ?



## 8.2 Born–Jordan -aika–taajuus-jakauma

Analogisten signaalien  $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Born–Jordan -muunnos  $Q(r, s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään

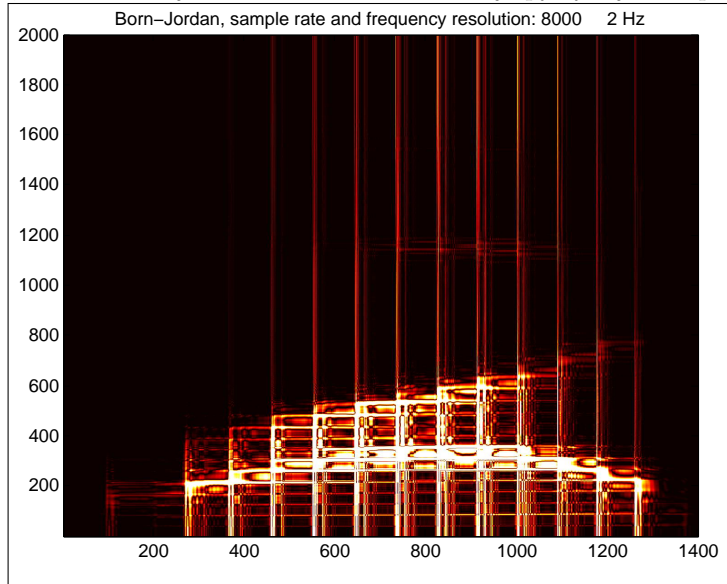
$$\begin{aligned} Q(r, s)(t, \nu) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \cdot \nu} \frac{1}{u} \int_{t-u/2}^{t+u/2} r(z + u/2) \overline{s(z - u/2)} dz du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \cdot \nu} \frac{1}{u} \int_t^{t+u} r(z) \overline{s(z - u)} dz du. \end{aligned}$$

Signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Born–Jordan -jakauma on

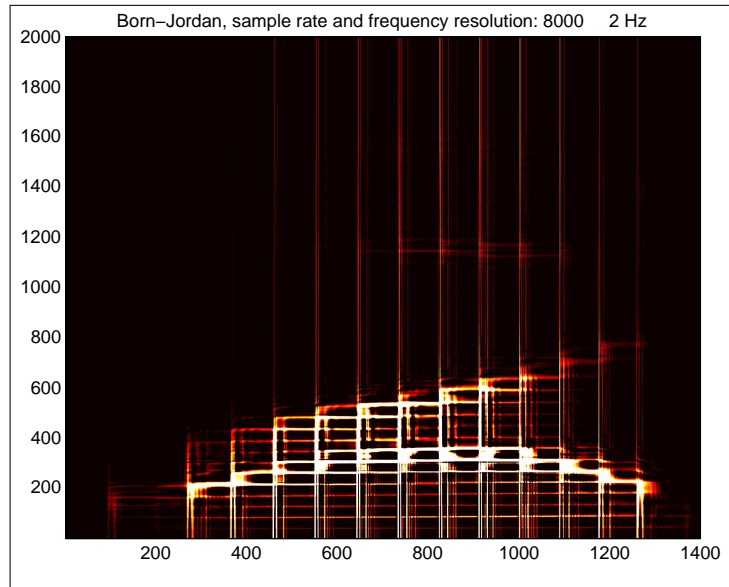
$$Qs = Q[s] := Q(s, s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (113)$$

Tulkinta:  $Qs(t, \nu) \in \mathbb{R}$  on signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  “energian intensiteetti” aika–taajuudessa  $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Esimerkki.** Born–Jordan -jakaumassa ei valittu mitään aikaikkunaa toisin kuin spektrogrammin laskennassa. Seuraavissa Born–Jordan -kuviissa on aiemasta tuttu signaali, jossa mies kysyy englanniksi “Why?”. Kuvia voi tulkita niin, että vaakalinjat ovat “viheltäviä ääniä” ja pystylinjat “napsauksia”:



Ylemmässä kuvassa oli (reaalisen) Born–Jordan -funktion itseisarvo, ja alemmassa kuvassa puolestaan funktion positiivinen osa (eli negatiiviset arvot leikataan siinä nollaksi):



Yhden spektrogrammin laskenta on yhtä työlästä kuin Born–Jordan -jakaumankin, mutta spektrogrammi vaikuttaa huomattavasti sumeammalta. Born–Jordan -jakauman parempi tarkkuus mahdollistaa jatkossa hyvien aika–taajuus-suodattimien suunnittelun. Lisäksi on syytä todeta, ettei signaalia  $s$  voida palauttaa spektrogrammistaan (paitsi pahasti vääristyneenä). Toisaalta  $s$  voidaan laskea Born–Jordan -jakaumasta  $Qs$  “ykkösen kokoista kompleksilukua vaille”: vakiolle  $\lambda \in \mathbb{C}$  pätee  $Q[\lambda s] = |\lambda|^2 Qs$ , mutta jakaumasta  $Qs$  voidaan rekonstruoida helposti  $\lambda s$  jollakin vakiolla  $\lambda$ , jolle  $|\lambda| = 1$  (eli reaalisen signaalin tapauksessa siis löydetään joko  $s$  tai  $-s$ ) — tämä käytännössä riittää.

**Tehtävä.** Näytä, että  $Qs$  on reaalinen ja laske

$$\int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) d\nu, \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) dt d\nu.$$

**Tehtävä.** Laske signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Born–Jordan -jakauma, kun  $s(t) = \lambda e^{i2\pi t \cdot \alpha}$ , missä  $\lambda \in \mathbb{C}$  on vakio.

**Born–Jordan -jakauman ominaisuuksia.** Integroimalla saadaan seuraavat signaalin  $s$  luonnolliset marginaalijakaumat:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) dt &= |\widehat{s}(\nu)|^2, \\ \int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) d\nu &= |s(t)|^2. \end{aligned}$$

Siten energialle pätee

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Qs(t, \nu) dt d\nu = \|s\|^2.$$

Ominaisuus

$$Q\widehat{s}(\nu, t) = Qs(-t, \nu)$$

voidaan ymmärtää niin, että Fourier-muunnos kääntää aika-taajuus-tasoa  $90^\circ$ . Myös ajan ja taajuuden siirrot näkyvät kuten pitääkin: jos

$$r(t) := s(t - t_0) \quad \text{ja} \quad q(t) := e^{i2\pi t \cdot \nu_0} s(t),$$

niin

$$\begin{aligned} Qr(t, \nu) &= Qs(t - t_0, \nu), \\ Qq(t, \nu) &= Qs(t, \nu - \nu_0). \end{aligned}$$

Dirac-delta ja kompleksinen eksponenttifunktio käyttäytyvät myös hyvin:

$$\begin{aligned} Q\delta_{t_0}(t, \nu) &= \delta_{t_0}(t), \\ Qe_{\nu_0}(t, \nu) &= \delta_{\nu_0}(\nu), \end{aligned}$$

missä  $e_{\nu_0}(t) := e^{i2\pi t \cdot \nu_0}$ . Ja sokerina pohjalla Born–Jordan -jakauman “interferensien” hyvänlaatuisuutta osoittava laskelma: jos nyt  $\alpha < \beta$ , niin

$$Q[\lambda e_\alpha + \mu e_\beta](t, \nu) = |\lambda|^2 \delta_\alpha(\nu) + |\mu|^2 \delta_\beta(\nu) + 2 \operatorname{Re}(\lambda \bar{\mu} e_{\alpha-\beta}(t)) \frac{\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(\nu)}{\beta - \alpha},$$

missä  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  vakioita — tässä nimittäin “interferenssi”

$$2 \operatorname{Re}(\lambda \bar{\mu} e_{\alpha-\beta}(t)) \frac{\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(\nu)}{\beta - \alpha}$$

on tasaisen kauniisti levittäytynyt aika-taajuus-tason leveälle kaistaleelle Dirac-delta -osuuksien väliin, muttei laajemmalle — seikka, jota arvostaa, kun Coheinin luokan aika-taajuus-jakaumia on tarpeeksi ihmetelty.

**Tehtävä.** Todista ne yllä mainitut Born–Jordan -jakauman ominaisuudet, joita et ole vielä todistanut... ;)

**Tehtävä.** Kuinka saat palautettua signaalin  $s$  “ykkösen kokoista kompleksilukua vaille” Born–Jordan -jakaumasta  $Qs$ ?

**Born–Jordan -suodattimien suunnittelu.** *Aika-taajuus-symboli* on funktio  $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Nyt suunnittelemme integraali-operaattorin  $L_\sigma$  niin, että saamme “parhaan mahdollisen Born–Jordan -likiarvon”

$$Q[L_\sigma s](t, \nu) \approx \sigma(t, \nu) Qs(t, \nu)$$

kaikille signaaleille  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ja kaikille aika-taajuuksille  $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Operaattori  $L_\sigma$  määritellään kaavalla

$$\langle r, L_\sigma s \rangle := \langle Q(r, s), \sigma \rangle \tag{114}$$

kaikille signaaleille  $r, s \in L^2(\mathbb{R})$  (yhtälön vasemmalla puolen sisätulo aikasuoralla, ja yhtälön oikealla puolella sisätulo aika-taajuus-tasossa). Tässä

$$\begin{aligned}
\langle r, L_\sigma s \rangle &= \langle Q(r, s), \sigma \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Q(r, s)(z, \nu) \overline{\sigma(z, \nu)} dz d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi w \cdot \nu} \frac{1}{w} \int_{z-\frac{w}{2}}^{z+\frac{w}{2}} r(\tilde{t} + \frac{w}{2}) \overline{s(\tilde{t} - \frac{w}{2})} d\tilde{t} dw \overline{\sigma(z, \nu)} dz d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} r(t) \left[ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) \frac{1}{u-t} \int_t^u \sigma(z, \nu) dz du d\nu \right]^* dt.
\end{aligned}$$

Siten

$$L_\sigma s(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) a(t, u, \nu) du d\nu, \quad (115)$$

missä *amplitudi*  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään  $a(t, t, \nu) = \sigma(t, \nu)$  ja tapauksessa  $t \neq u$  seuraavasti:

$$a(t, u, \nu) = \frac{1}{u-t} \int_t^u \sigma(z, \nu) dz. \quad (116)$$

Saatiin siis

$$L_\sigma s(t) = \int_{\mathbb{R}} K_{L_\sigma}(t, u) s(u) du,$$

missä integraalioperaattorin  $L_\sigma$  ydin  $K_{L_\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  toteuttaa  $K_{L_\sigma}(t, t) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(t, \nu) d\nu$  ja tapauksessa  $t \neq u$ :

$$K_{L_\sigma}(t, u) = \frac{1}{u-t} \int_t^u \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} \sigma(z, \nu) d\nu dz. \quad (117)$$

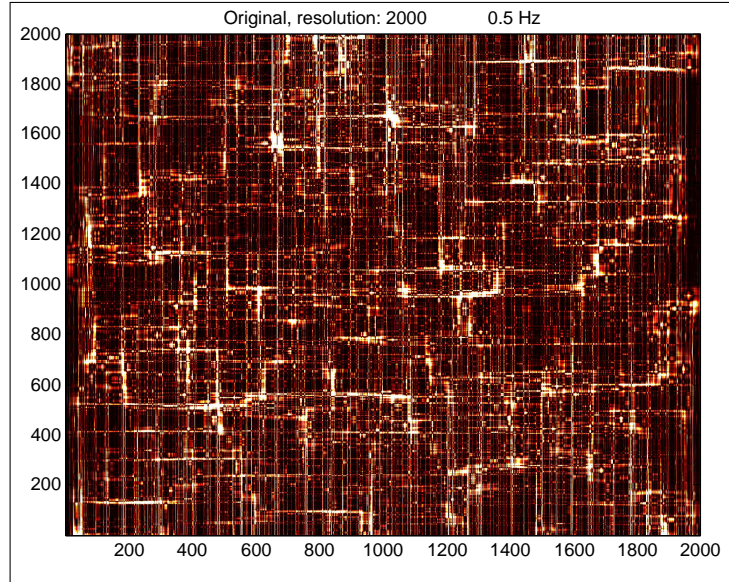
**Esimerkki.** Oletetaan aikainvarianssi  $\sigma(t, \nu) = \widehat{\psi}(\nu)$  kaikilla  $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Silloin toki  $L_\sigma s = \psi * s$ , koska

$$\begin{aligned}
L_\sigma s(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) \frac{1}{u-t} \int_t^u \widehat{\psi}(\nu) dz du d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) \widehat{\psi}(\nu) du d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi t \cdot \nu} \widehat{s}(\nu) \widehat{\psi}(\nu) d\nu = \psi * s(t).
\end{aligned}$$

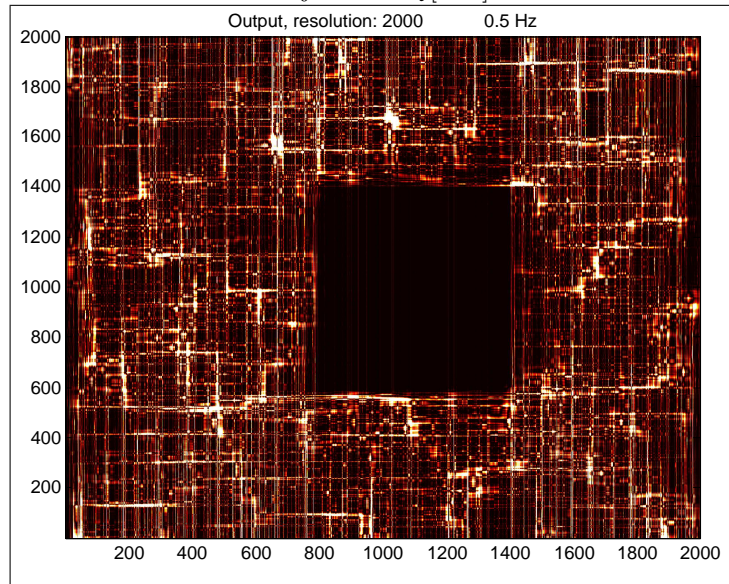
**Esimerkki.** Oletetaan taajuusinvarianssi  $\sigma(t, \nu) = \varphi(t)$  kaikilla  $(t, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Silloin  $a(t, u, \nu) = b(t, u)$ , joten  $L_\sigma s = \varphi s$ , koska

$$\begin{aligned}
L_\sigma s(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi(t-u) \cdot \nu} s(u) b(t, u) du d\nu \\
&= s(t) b(t, t) = \varphi(t) s(t).
\end{aligned}$$

**Esimerkki.** Seuraavassa kuvassa on Born–Jordan -jakauma  $Q_s$  Matlab:n randomennolla tuotetusta kohinasta  $s$ :



Nyt aika-taajuus-symboli  $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  valitaan niin, että  $\sigma(t, \nu) = 0$  eräässä aika-taajuus-tason suorakaiteessa ja muutoin  $\sigma(t, \nu) = 1$ . Tässä suodatetun signaalin  $L_\sigma s$  Born–Jordan -jakauma  $Q[L_\sigma s]$ :



Osaatko arvata, mikä oli se aika-taajuus-tason suorakaide, jossa  $\sigma(t, \nu) = 0$ ?

## 9 Yhteenveto

Ennen kertauskysymyksiä tarkastelemme vielä Fourier-muunnoksen historiaa ja mahdollisuutta (tai mahdottomuutta...) rajoittaa signaali aika-taajuus-tason äärelliseen osaan.

### 9.1 Ajassa ja taajuudessa rajoitettu signaali?

Olkoon  $\|s\|^2 < \infty$ , missä  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  rajoitettu elää rajoitetussa osassa aika-taajuutta siinä mielessä, että

$$s(t) = 0 = \widehat{s}(\nu)$$

aina kun  $|t| > M$  ja  $|\nu| > M$ ; tässä  $M < \infty$  on vakio. Tässä kohtaa tarvitsemme hieman kompleksianalyysia (ks. kurssi **MS-C1300 Kompleksianalyysi**). Määritellään silloin analyyttinen funktio  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kaavalla

$$h(z) := \int_{-M}^M e^{-i2\pi t \cdot z} s(t) dt.$$

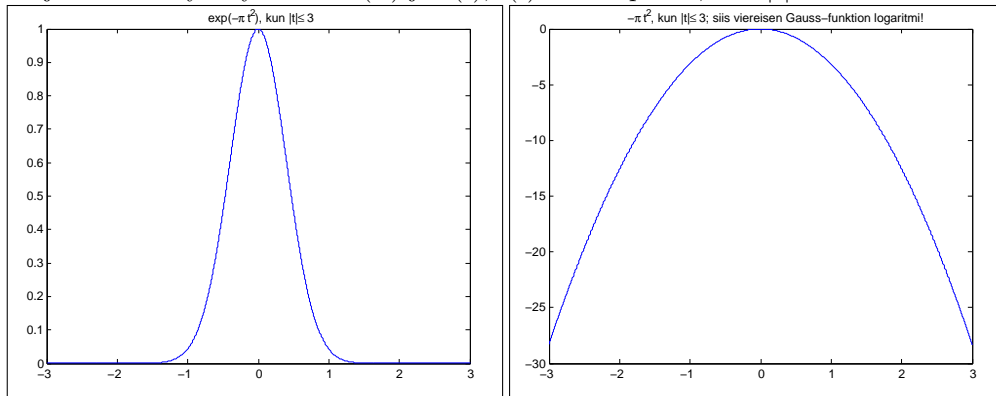
Analyyttisyyden vuoksi  $h$  voidaan esittää potenssisarjana

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{(k)}(a) (z - a)^k$$

kaikilla  $a \in \mathbb{C}$ . Mutta jos  $M < a \in \mathbb{R}$ , niin  $h(a) = \widehat{s}(a) = 0$  ja siten  $h^{(k)}(a) = 0$  kaikilla  $k \geq 0$ . Tämän vuoksi  $h(z) \equiv 0$  kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ . Toisaalta  $\widehat{s}(\nu) = h(\nu) \equiv 0$  kaikilla  $\nu \in \mathbb{R}$ , joten  $s(t) \equiv 0$  kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ .

**Johtopäätös:** Ainoa rajoitetussa osassa aika-taajuutta elävä signaali on nollassignaali!

**Huomautus:** Schwartz-testifunktiot  $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$  (esim. Gauss-tyyppiset funktiot) “elävät melkein rajoitetussa alueessa aika-taajuudessa”: nyt myös  $\widehat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ja  $s(t), \widehat{s}(t) \rightarrow 0$  nopeasti, kun  $|t| \rightarrow \infty$ .



## 9.2 Lämmönvirtaus: Fourier-analyysin historiallinen alkuperä

Oletetaan, että  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa ns. *lämpöyhtälön*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u(x, t) \quad (118)$$

alkuehdolla  $u(x, 0) = f(x)$ , missä  $\alpha > 0$  on terminen diffuusiokerroin. Tässä  $u_t(x) = u(x, t)$  on "lämpötila pisteessä  $x$  hetkellä  $t$ ". Otetaan lämpöyhtälöstä puolittain Fourier-muunnos muuttujan  $x \in \mathbb{R}$  suhteen, jolloin saadaan

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_t(\xi) = -(2\pi\xi)^2 \alpha \widehat{u}_t(\xi) \quad \text{ja} \quad \widehat{u}_0(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

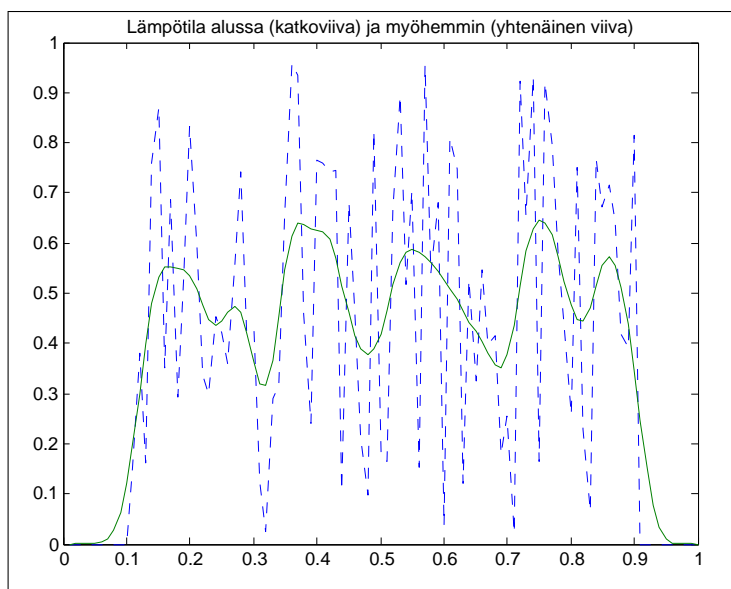
joten

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(\xi) &= e^{-(2\pi\xi)^2 \alpha t} \widehat{f}(\xi), \\ u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} e^{-(2\pi\xi)^2 \alpha t} \widehat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Fourier johti lämpöyhtälön ja päätteli sille tällaisen ratkaisukaavan jaksollisen muuttujan  $x$  tapauksessa vuonna 1807: tätä voidaan pitää Fourier-analyysin varsinaisena syntyvuonna. Toisaalta Daniel Bernoulli ja Leonhard Euler pohtivat värähtelevien lankojen esittämistä trigonometrisina sarjoina jo vuonna 1753; ja Gauss "keksi" varhaisen FFT-algoritmin vuonna 1805.

Huomaa, että yllä  $u$  saadaan normaalijakauman ja alkudatan konvoluutiona:

$$u(x, t) = k_t * f(x), \quad \text{kun} \quad k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t \pi}} e^{-x^2/(4\alpha t)}.$$



### 9.3 Kertaus: miten liittyvät toisiinsa erilaiset Fourier-muunnokset?

Tarkastellaan nyt kurssilla esiteltyjen erilaisten Fourier-muunnosten yhteisiä piirteitä. Olkoon  $G$  ajanhetkien avaruus. Taajuuksien avaruus  $\widehat{G}$  on silloin duaalinen ajanhetkien avaruudelle  $G$ . Taulukoidaan käsittelemämme tapaukset:

$$\begin{aligned} (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{R}, \mathbb{R}). & (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}). \\ (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}). & (G, \widehat{G}) &= (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Nämä vastasivat seuraavia signaalien luokitteluja:

$$\begin{aligned} \textit{Analogiset jaksottomat (A0).} & & \textit{Analogiset jaksolliset (A1).} \\ \textit{Digitaaliset jaksottomat (D0).} & & \textit{Digitaaliset jaksolliset (D1).} \end{aligned}$$

Jokaisessa näistä tapauksista tarkasteltiin signaaleja  $s : G \rightarrow \mathbb{C}$  ja niiden Fourier-muunnoksia  $\widehat{s} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ , ja näiden välillä oli yhteys muotoa

$$\begin{aligned} \widehat{s}(\nu) &= \int_G e^{-i\langle t, \nu \rangle} s(t) dt, \\ s(t) &= \int_{\widehat{G}} e^{+i\langle t, \nu \rangle} \widehat{s}(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Tyypillisesti Fourier-muunnoksessa “energia säilyi” eli  $\|\widehat{s}\|^2 = \|s\|^2$ , missä

$$\|s\|^2 = \int_G |s(t)|^2 dt$$

(paitsi että epäsymmetrisen DFT:n kohdalla tarvittiin korjausvakio...). Signaalien  $r, s : G \rightarrow \mathbb{C}$  konvoluutio  $r * s : G \rightarrow \mathbb{C}$  määriteltiin

$$r * s(t) = \int_G r(t - u) s(u) du,$$

ja DFT:n tapauksessa tämä voitiin laskea tehokkaasti FFT-algoritmilla.

**Mistä Fourier-analyysissä on yleisesti kyse?** Voidaan sanoa, että ajan symmetriat synnyttävät Fourier-analyysin. Täsmällisemmin: Jos “ajanhetkien” joukko  $G$  on “lokaalisti kompakti kommutatiivinen ryhmä” (engl. “locally compact commutative group”), niin “taajuuksien” joukko  $\widehat{G}$  on samantyyppinen ryhmä ja saadaan aikaan yllä esiintyvän kaltainen Fourier-koneisto. Tällainen Fourier-analyysi syntyy myös tapauksessa, jossa  $G$  on “kompakti ryhmä” — aiheesta lisää kurssilla **MS-E1220 Symmetries**.



## 9.4 Kertausongelmia ja -kysymyksiä

Etsi tieteenalaltasi esimerkkejä signaaleista

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}, & s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ s : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}, & s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}. \end{aligned}$$

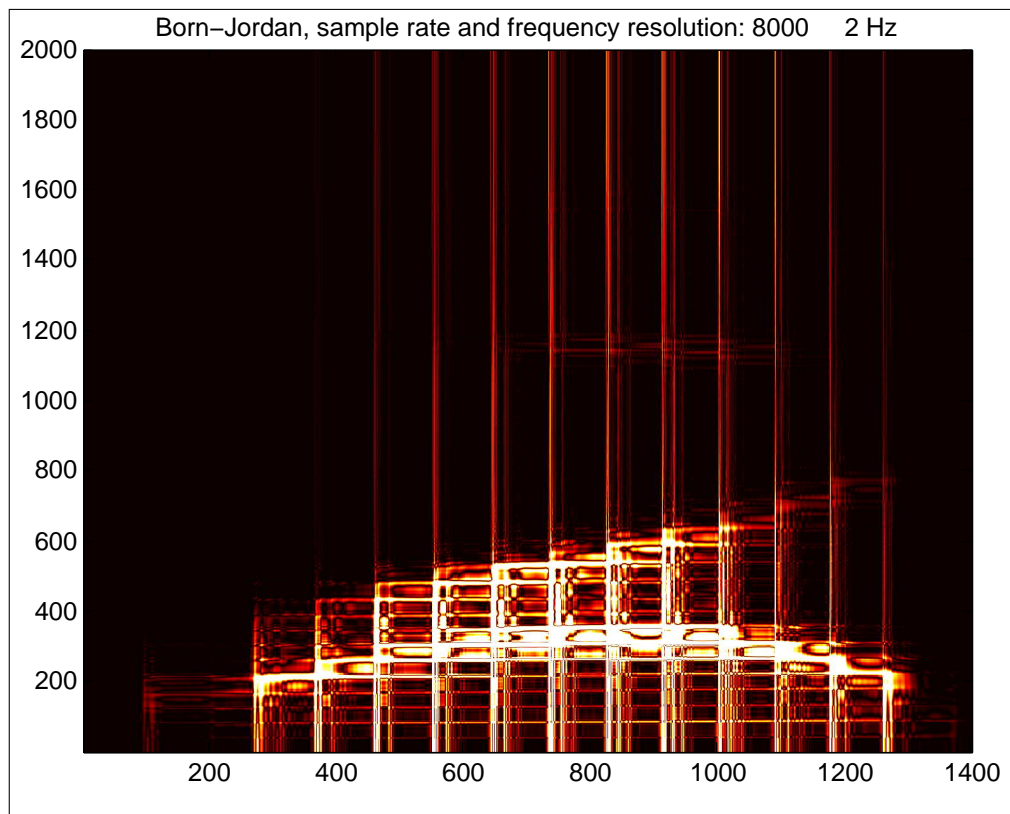
Kussakin näistä tapauksista:

- Miten Fourier-muunnos määritellään? Minkä tyyppinen signaali se on?
- Kuinka energia määritellään? Mikä on energian tulkinta?
- Miltä Fourier-käänteismuunnos näyttää?
- Miten konvoluutio määritellään? Sovellukset signaalinkäsittelyyn?

Miten kaikki nämä erilaiset Fourier-muunnokset liittyvät toisiinsa?

Miksi FFT on nopea?

Mitä aika-taajuus-jakaumat meille kertovat?



**Kiitokset!** Gustaf Gripenberg, Lauri Mustonen, Olli Saari, sekä kurssin assistentit ja opiskelijat, kiitos teille kommentteistanne koskien tämän luentomonisteen aiempia versioita! Pyrin jatkossakin kehittämään Fourier-analyysin kurssi-materiaalia — palaute on tervetullutta:

ville.turunen@aalto.fi

## Jatkoviitteitä kirjallisuuteen

1. P. Antosik, J. Mikusinski and R. Sikorski: *Theory of distributions. The sequential approach*. Polish Scientific Publishers, 1973.
2. R. Beals: *Advanced mathematical analysis*. Springer-Verlag, 1973.
3. M. Born and P. Jordan: *Zur Quantenmechanik*, Zeit. f. Phys., vol. 34, pp. 858–888, 1925.
4. L. Cohen: *Time-frequency analysis*. Prentice Hall, 1995.
5. J. W. Cooley and J. W. Tukey: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comput., vol. 19, no. 2, pp. 297–301, April 1965.
6. G. B. Folland: *Harmonic analysis in phase space*. Princeton University Press, 1989.
7. D. Gabor: *Theory of communication*, J. IEE (London), 93 (III): pp. 429–457, 1946.
8. C. F. Gauss: *Nachlass: Theoria interpolationis methodo nova tractata*, pp. 265–303, in Carl Friedrich Gauss, Werke, Band 3, Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866.
9. K. Gröchenig: *Foundations of time-frequency analysis*. Birkhäuser, 2001.
10. M. T. Heideman, D. H. Johnson, C. S. Burrus: *Gauss and the history of the Fast Fourier Transform*, IEEE ASSP Magazine, Oct 1984, pp. 14–21.
11. Y. Katznelson: *An introduction to harmonic analysis*. Dover, 1976.
12. W. Rudin: *Functional analysis*. Tata McGraw-Hill, 1973.
13. W. Rudin: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.
14. M. Ruzhansky and V. Turunen: *Pseudo-differential operators and symmetries*. Birkhäuser, 2010.
15. E. P. Wigner: *On the quantum correction for thermo-dynamic equilibrium*, Phys. Rev. Letters, 40: pp. 749–759, 1932.
16. A. Zygmund: *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 1959.