MS-A010X Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Pekka Alestalo[1]

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

1.9.2018

[1] Kiitokset Harri Hakulalle, Janne Korvenpäälle, Riikka Kortteelle, Jarmo Maliselle ja kurssien opiskelijoille painovirheiden korjauksista.

Sisältö

Nämä kalvot sisältävät otsikossa mainitun kurssin keskeisen materiaalin, mutta myös paljon oheislukemista. Luennoilla voidaan käsitellä myös täydentäviä esimerkkejä, koska kalvot sisältävät yleensä vain yhden, usein mahdollisimman yksinkertaisen esimerkin kustakin aiheesta.

1.1 Lukujoukot

- **Luonnollisten lukujen joukko N** $= \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbf{N} \cup \{0\}$.
- **Kokonaislukujen joukko Z** $= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.
- **Rationaalilukujen joukko Q** $= \{p/q \mid p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}\}$.
- **Reaalilukujen joukko R**. Täsmällinen konstruointi palautuu rationaalilukuihin, jossa eri mahdollisuuksia:
  Dedekindin leikkaukset,
  rationaaliset Cauchy-jonot,
  desimaaliapproksimaatiot.
  Intuitiivisesti helpoin vaihtoehto on ajatella reaalilukuja desimaaliesitysten kautta.
  Suurin osa reaaliluvuista ei ole rationaalisia, esimerkiksi $\sqrt{2}$, π, Neperin luku e.

1.2 Jonot

- Lukujonolla tarkoitetaan *ääretöntä* jonoa reaalilukuja $a_n \in \mathbf{R}$, kun indeksi $n \in \mathbf{N}$. Merkitään

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

- Lukujonon täsmällinen tulkinta on funktio $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, jolle $f(n) = a_n$.
- Jonon indeksöinti voi alkaa myös jostakin muusta arvosta kuin 1. Jos indeksin alkuarvo ei ole tärkeä tai tilanne on muuten selvä, voidaan käyttää merkintää (a_n).
- Joissakin sovelluksissa esiintyy myös jonoja, joiden indeksijoukkona on kaikkien kokonaislukujen joukko $\mathbf{Z}$.
- *Äärelliset* jonot $(a_1, \dots, a_n)$ on luontevinta tulkita n-ulotteisen avaruuden $\mathbf{R}^n$ pisteiksi.

1.2 Käytännössä

Jonoja voidaan määritellä

- antamalla yleisen termin lauseke; esimerkiksi

$$a_n = 2^n, \text{ kun } n \in \mathbf{N} \Rightarrow \text{ lukujono } (2, 4, 8, 16, \dots).$$

- rekursiivisesti palautuskaavojen avulla, erityisesti monissa numeerisissa menetelmissä. Esimerkiksi

$$x_0 = \text{alkuarvaus}, \; x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ kun } n \geq 0$$

$\Rightarrow$ Newtonin menetelmän approksimaatiot funktion nollakohdalle.

$$f_0 = 0, \; f_1 = 1, \; f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \text{ kun } n \geq 2$$

$\Rightarrow$ Fibonaccin lukujono $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$.

- tekemällä mittauksia jostakin systeemistä; esimerkiksi äänen voimakkuus tasaisin aikavälein (idealisoituna äärettömäksi jonoksi).

1.2 Perusongelmat

- Mitä jonon ominaisuuksia saadaan selville yleisen termin tai palautuskaavojen avulla?
- Miten palautuskaavasta saadaan yleisen termin lauseke? Esimerkiksi Fibonaccin jonolle

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n} \right),$$

jossa

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

on ns. kultaisen leikkauksen suhde.

1.2 Jonojen ominaisuuksia

Määritelmä 1.1

Lukujono (a_n) on

- **ylhäältä rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että $a_n \leq C$ kaikilla n
- **alhaalta rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $c \in \mathbf{R}$, että $a_n \geq c$ kaikilla n
- **rajoitettu**, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu
- **nouseva**, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla n
- **laskeva**, jos $a_{n+1} \leq a_n$ kaikilla n
- **monotoninen**, jos se on nouseva tai laskeva

1.3 Suppeneminen I

Määritelmä 1.2

Lukujono (a_n) **suppenee** kohti raja-arvoa $L \in \mathbf{R}$, jos lausekkeen $|a_n - L|$ arvo lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$; täsmällisemmin: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että $|a_n - L| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$.
Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{tai} \quad \lim a_n = L \quad \text{tai lyhyesti} \quad a_n \to L.$$

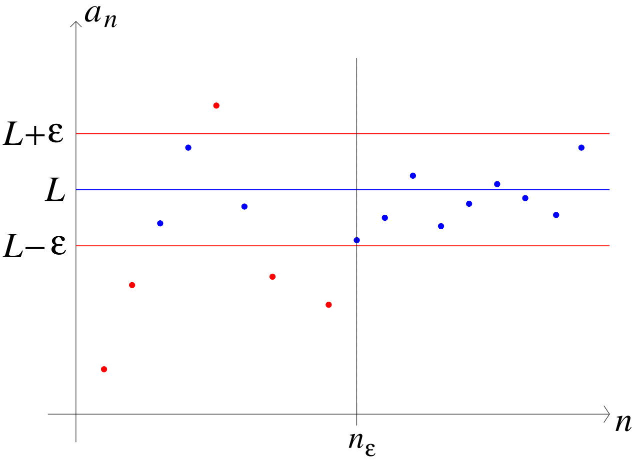
Jos lukujono ei suppenee, niin se **hajaantuu**.

Lyhyesti: $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

Huom: $|a_n - L|$ = jonon termin a_n ja raja-arvon L välinen etäisyys:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Idea: Mitä pienempi ε, sitä suurempi n_ε tarvitaan.



1.3 Täydellisyysaksioma

Reaalilukujen joukon erottaa rationaalilukujen joukosta

Täydellisyysaksioma:
Nouseva ja ylhäältä rajoitettu reaalilukujono $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suppenee.

Täydellisyysaksioma voidaan muotoilla eri tavoilla. Aiheesta lisää kurssilla MS-C1540.

Aksioma tarjoaa mahdollisuuden reaaliluvun täsmälliseen määritelmään:

Reaaliluku $n{,}d_1d_2\ldots$, jossa kokonaisosa n on kokonaisluku ja desimaalit $d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, on monotonisen rationaalilukujonon $(n; n{,}d_1; n{,}d_1d_2; n{,}d_1d_2d_3, \dots)$ raja-arvo.

Rationaalijonojen kohdalla ongelma on se, ettei raja-arvo ole aina rationaaliluku!

1.3 Yleisiä tuloksia

- Laskeva ja alhaalta rajoitettu jono suppenee.
- Suppeneva jono on rajoitettu.
- Suppiloperiaate: Jos $a_n \leq b_n \leq c_n$ jostakin indeksistä alkaen ja

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L,$$

  niin jono (b_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.
- Geometrinen jono (q^n) suppenee, jos suhdeluku $-1 < q \leq 1$, jolloin sen raja-arvo on joko 0 tai 1. Muissa tapauksissa geometrinen jono hajaantuu.
- Jonon suppenemista kohti nollaa voi tutkia lausekkeen $|a_{n+1}/a_n|$ avulla: jos jostakin indeksistä alkaen on $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ ja $0 \leq q < 1$, niin

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

  Tämä seuraa kahdesta edellisestä kohdasta, koska $|a_n| \leq |a_1| q^{n-1}$.

Lause 1.3

Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *ja* $c \in \mathbf{R}$, *niin*

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- $\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\, a$,
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$,
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, *jos* $b \neq 0$.

Huom: Viimeisen kohdan oletuksesta $b \neq 0$ seuraa, että $b_n \neq 0$ jostakin indeksistä alkaen.

Perustelu: Ensimmäinen kaava perustuu epäyhtälöön

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Toinen kaava seuraa yhtälöstä

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a|.$$

Kolmannen kaavan kohdalla käytetään epäyhtälöä

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|$$

ja sitä, että $|a_n| \leq C$ jollakin vakiolla C.
Neljännen kaavan kohdalla osoitetaan aluksi, että $1/b_n \to 1/b$, ja käytetään sen jälkeen tulokaavaa.

1.3 Laskusääntöjä III

Esimerkki 1.4

Laske raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n}{n^2+1}$.

Ratkaisu: Koska

$$\frac{3n^2+4n}{n^2+1} = \frac{n^2(3+4/n)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{3+4/n}{1+1/n^2}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

niin raja-arvon laskusääntöjen mukaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{n^2+1} = \frac{3+0}{1+0} = 3.$$

1.3 Eräitä raja-arvoja

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, kun $a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e =$ Neperin luku $\approx 2{,}7182818\ldots$ Tähän palataan myöhemmin.
- Stirlingin kaava (jolle ei helppoa todistusta!):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1.$$

Idea: Ensimmäinen seuraa toisesta suppiloperiaatteen avulla. Toisen kohdalla merkitään $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ ja sovelletaan binomikaavaa: $n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + n(n-1)x_n^2/2 + \cdots > 1 + n(n-1)x_n^2/2$, joten $0 < x_n < \sqrt{2/n}$. Väite seuraa tästä suppiloperiaatteen avulla.

1.3 Raja-arvon yleistykset

Myös käsitteet

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ ja } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

voidaan määritellä täsmällisesti.

Esimerkiksi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{jokaista lukua } M \in \mathbf{R} \text{ vastaa sellainen indeksi } n_M \in \mathbf{N}, \text{ että } a_n \geq M \text{ aina, kun } n \geq n_M.$$

Sanotaan: Jono (a_n) **hajaantuu** kohti ääretöntä.

2.1 Sarja

Lukujonosta $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ voidaan muodostaa sen **osasummien jono** (s_n):

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots, \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \end{aligned}$$

Määritelmä 2.1

Jos osasummien jonolla (s_n) on raja-arvo $s \in \mathbf{R}$, niin sanotaan, että jonosta (a_k) muodostettu **sarja suppenee** ja sen summa on s. Tällöin merkitään

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s.$$

2.1 Indeksöinti

- Osasummat kannattaa indeksöidä samalla tavalla kuin jono (a_k); esim. jonon $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ osasummat ovat $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1$ jne.
- Suppenevaan sarjaan voidaan tehdä summausindeksin siirtoja: esim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}.$$

- Konkreettisesti:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

2.1 Sarjan hajaantuminen

- Jos sarja ei suppene, niin se **hajaantuu**. Tämä voi tapahtua kolmella eri tavalla: (i) osasummat lähestyvät ääretöntä; (ii) osasummat lähestyvät miinus-ääretöntä; (iii) osasummien jono heilahtelee niin, ettei raja-arvoa ole.
- Hajaantuvan sarjan tapauksessa merkintä $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ei oikeastaan tarkoita mitään. Usein sovitaan sen tarkoittavan osasummien jonoa, joka on aina hyvin määritelty.
- Monet sarjoihin liittyvät "kummallisuudet" (esim. $0 = 1$-todistus) johtuvat siitä, että sarjan summaaminen tulkitaan operaatioksi, jossa kaikki jonon alkiot lasketaan yhteen samalla kertaa. Näin ei ole, vaan summa lasketaan osasumminen raja-arvona. Tämän vuoksi osa äärellisten summien laskusäännöistä ei enää päde sarjoille. Joissakin tapauksissa esimerkiksi sarjan summa voi muuttua, jos termien järjestystä vaihdetaan.

2.2 Geometrinen sarja I

Lause 2.2

Geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

suppenee, jos $|q| < 1$ (tai $a = 0$), jolloin sen summa on $\frac{a}{1-q}$. Jos $|q| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Perustelu: Sarjan osasummille pätee $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$, josta väite seuraa.

Yleisemmin

$$\sum_{k=i}^{\infty} aq^k = \frac{aq^i}{1-q} = \frac{\text{sarjan 1. termi}}{1-q}, \text{ kun } |q| < 1.$$

Esimerkki 2.3

Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^{k+1}}$$

summa.

Ratkaisu: Koska

$$\frac{3}{4^{k+1}} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k,$$

niin kyseessä on geometrinen sarja. Sen summaksi saadaan

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{4}.$$

2.2 Laskusääntöjä I

Lause 2.4

Suppenevien sarjojen ominaisuuksia:

- $$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
- $$\sum_{k=1}^{\infty}(c\, a_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$ *kun* $c \in \mathbf{R}$ *on vakio*

Perustelu: Seuraa vastaavista jonojen raja-arvojen ominaisuuksista.

Huom: Sarjoilla ei ole jonon raja-arvon tapaista tulosääntöä, sillä jo kahden termin summalle yleensä $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \neq a_1 b_1 + a_2 b_2$. Oikea yleistys on sarjojen Cauchy-tulo, jossa myös tulon ristitermit otetaan huomioon. Katso esim.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_product`

2.2 Laskusääntöjä II

Lause 2.5

Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee, niin* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Kääntäen: Jos $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, *niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu.*

Perustelu: Jos sarjan summa on s, niin $a_k = s_k - s_{k-1} \to s - s = 0$.
Huom: Ominaisuuden $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ avulla ei voida perustella sarjan suppenemista; vrt. seuraavat esimerkit.

Esimerkki 2.6

Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$$

suppenemista.

Ratkaisu: Sarjan yleisen termin raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

ei ole nolla, joten sarja hajaantuu.

Esimerkki 2.7

Harmoninen sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$
hajaantuu, vaikka sen yleisen termin $a_k = 1/k$ raja-arvo on nolla.

Ratkaisu: Katso alkeellinen perustelu esim. Matematiikkalehti Solmusta `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/harmsarja.pdf`
Toinen tapa integraalin avulla: $1/k$-pylväsdiagrammin alle jää funktion $1/(x+1)$ kuvaaja, joten pinta-aloja vertaamalla

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_0^n \frac{dx}{x+1} = \ln(n+1) \to \infty,$$

kun $n \to \infty$.

2.2 Positiiviset sarjat I

Sarjan summan laskeminen on usein hankalaa tai mahdotonta (muuten kuin numeerisena likiarvona). Monissa tilanteissa on kuitenkin tärkeintä tietää, suppeneeko vai hajaantuuko tutkittava sarja.

Määritelmä 2.8

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ on **positiivinen** (tai positiiviterminen), jos $p_k \geq 0$ kaikilla k.

Positiivisille sarjoille suppenemisen tutkiminen on suoraviivaista:

Lause 2.9

Positiivinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun sen osasummien jono on ylhäältä rajoitettu.

Syy: Positiivisen sarjan osasummien jono on nouseva.

2.2 Positiiviset sarjat II

Esimerkki 2.10

Osoita, että *yliharmonisen* sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

osasummille on voimassa $s_n < 2$ kaikilla n, joten sarja suppenee.

Ratkaisu: Perustuu kaavaan

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

kun $k \geq 2$; vrt. pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 15/kevät 2015. Toinen tapa integraalilaskennan avulla.

Leonhard Euler keksi v. 1735 sin-funktion tulokehitelmän avulla, että sarjan summa on $\pi^2/6$.

2.2 Itseinen suppeneminen I

Määritelmä 2.11

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee **itseisesti**, jos positiivinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee.

Lause 2.12

Itseisesti suppeneva sarja suppenee, ja tällöin

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Kyseessä on erikoistapaus yleisestä *Majoranttiperiaatteesta*, josta myöhemmin lisää.

2.2 Itseinen suppeneminen II

Lauseen perustelu (ilman yleistä majoranttiperiaatetta!): Oletetaan, että sarja $\sum_k |a_k|$ suppenee ja tutkitaan erikseen sarjan $\sum_k a_k$ positiivista ja negatiivista osaa: Olkoon

$$b_k = \max(a_k, 0) \geq 0 \text{ ja } c_k = -\min(a_k, 0) \geq 0.$$

Koska $b_k, c_k \leq |a_k|$, niin positiiviset sarjat $\sum b_k$ ja $\sum c_k$ suppenevat lauseen 2.9 perusteella. Lisäksi $a_k = b_k - c_k$, joten $\sum a_k$ on suppenevien sarjojen erotuksena suppeneva.

Esimerkki 2.13

Tutki vuorottelevan sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \dots$$

suppenemista.

Ratkaisu: Koska $\left| \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}$ ja yliharmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

suppenee, niin tutkittava sarja suppenee itseisesti. Näin ollen se suppenee myös tavallisessa mielessä.

Itseinen suppeneminen ja (tavallinen) suppeneminen ovat kuitenkin eri käsitteitä:

Esimerkki 2.14

Vuorotteleva harmoninen sarja

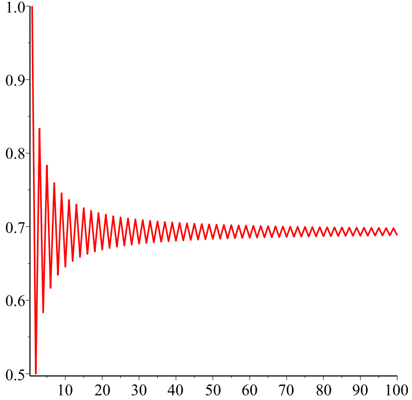
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

suppenee, mutta ei itseisesti (vrt. harmoninen sarja).

Ratkaisu: (Idea) Piirretään osasummien jonon (s_n) kuvaaja (seuraava sivu) ja tutkitaan erikseen parillisten ja parittomien indeksien osasummia s_{2n} ja s_{2n+1}.

Sarjan summa on $\ln 2$, joka saadaan integroimalla geometrisen sarjan summakaava sopivalla tavalla; vrt. harjoitukset?

2.2 Vuorotteleva harmoninen sarja II



100 ensimmäistä osasummaa; pisteet yhdistetty janoilla havainnollisuuden vuoksi.

2.3 Majorantti ja minorantti I

Edellisen yleistyksenä saadaan

Lause 2.15

Majoranttiperiaate: *Jos* $|a_k| \leq p_k$ *kaikilla* k *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *suppenee, niin myös* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*
Minoranttiperiaate: *Jos* $0 \leq p_k \leq a_k$ *kaikilla* k *ja* $\sum p_k$ *hajaantuu, niin myös* $\sum a_k$ *hajaantuu.*

Majorantin perustelu: Koska $a_k = |a_k| - (|a_k| - a_k)$ ja $0 \leq |a_k| - a_k \leq 2|a_k|$, niin sarja $\sum a_k$ suppenee kahden suppenevan positiivisen sarjan erotuksena. Tässäkin tarvitaan apuna alkeellisempaa positiivisten sarjojen majoranttiperiaatetta 2.9; kyseessä ei ole kehäpäättely!
Minorantin perustelu: Oletuksista seuraa, että sarjan $\sum a_k$ osasummat hajaantuvat kohti ääretöntä.

Esimerkki 2.16

Tutki sarjojen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^3} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

suppenemista.

Ratkaisu: Koska

$$0 < \frac{1}{1+k^3} < \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$, niin ensimmäinen sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Toisaalta $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{k}$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$, joten jälkimmäisellä sarjalla on minoranttina hajaantuva harmoninen sarja. Siispä jälkimmäinen sarja hajaantuu.

2.3 Suhdetesti

Käytännössä tärkein tapa suppenemisen tutkimiseen perustuu ns. **suhdetestiin**, jossa sarjan termejä verrataan sopivaan geometriseen sarjaan:

Lause 2.17

Jos jostakin indeksistä alkaen on voimassa

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq Q < 1,$$

niin sarja $\sum a_k$ *suppenee (ja "suppenemisnopeus" vastaa geometrista sarjaa* $\sum Q^k$ *tai on vieläkin suurempi).*

Perustelu: Sarjan alku ei vaikuta sen suppenemiseen, joten epäyhtälö voidaan olettaa kaikille indekseille. Tästä seuraa

$$|a_k| \leq Q|a_{k-1}| \leq Q^2|a_{k-2}| \leq \cdots \leq Q^k|a_0|,$$

joten sarjalle saadaan suppeneva geometrinen majorantti.

2.3 Suhdetestin raja-arvomuoto I

Lause 2.18

Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q$, *niin sarja* $\sum a_k$

$$\begin{cases} \textit{suppenee}, & \textit{jos } 0 \leq q < 1, \\ \textit{hajaantuu}, & \textit{jos } q > 1, \\ \textit{voi olla suppeneva tai hajaantuva}, & \textit{jos } q = 1. \end{cases}$$

Idea: Geometriselle sarjalle kahden peräkkäisen termin suhde on q. Suhdetestin mukaan yleisemmänkin sarjan suppeneminen määräytyy samalla periaatteella kuin geometriselle sarjalle, kun suhdelukuna käytetään peräkkäisten termien suhteen raja-arvoa.

2.3 Suhdetestin raja-arvomuoto II

Perustelu: Jos $q < 1$, niin valitsemalla raja-arvon määritelmässä $\varepsilon = (1-q)/2 > 0$ saadaan jostakin indeksistä n_ε alkaen voimaan

$$|a_{k+1}/a_k| < q + \varepsilon = (q+1)/2 = Q < 1.$$

Tällöin tulos seuraa edellisestä lauseesta.

Tapauksessa $q > 1$ sarjan yleinen termi ei lähesty nollaa, joten sarja hajaantuu.

Viimeisessä kohdassa $q = 1$ ei siis saada mitään tietoa suppenemisesta. Tämä tapaus esiintyy mm. harmonisen ($a_k = 1/k$, hajaantuva!) ja yliharmonisen ($a_k = 1/k^2$, suppeneva!) sarjan kohdalla. Näissä tapauksissa suppeneminen täytyy selvittää jollakin muulla tavalla.

2.3 Suhdetestin raja-arvomuoto III

Esimerkki 2.19

Tutki sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \dots$$

suppenemista.

Ratkaisu: Tässä $a_k = (-1)^{k+1}k/2^k$, joten

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+2}(k+1)/2^{k+1}}{(-1)^{k+1}k/2^k}\right| = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \to \frac{1}{2} < 1,$$

kun $k \to \infty$. Suhdetestin perusteella sarja suppenee.

3.1 Funktiot

Tässä luvussa käsitellään reaaliakselin osajoukoissa määriteltyjä funktioita $f\colon A \to \mathbf{R}$. Yleensä funktion määrittelyjoukko $M_f = A$ on jokin väli, muttei aina.

- **Avoin väli:** $]a, b[$ tai $]a, \infty[$ tai $]-\infty, b[$ tai $]-\infty, \infty[= \mathbf{R}$. Avoimia välejä merkitään joskus myös kaarisulkujen avulla.
- **Suljettu väli:** $[a, b]$.
- **Puoliavoimet välit:** muotoa $[a, b[$ tai $]a, b]$.
- Merkintöjä yksinkertaistava sopimus: $[a, b]$ tarkoittaa aina suljettua väliä, jonka päätepisteet ovat $a, b \in \mathbf{R}$ riippumatta siitä, mikä on lukujen a ja b suuruusjärjestys. Samoin muiden välien kohdalla.

3.1 Erilaisia funktioita

n-ulotteinen avaruus

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R},\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Tapauksessa $n = 2$ pisteitä merkitään usein (x, y) ja tapauksessa $n = 3$ muodossa (x, y, z).

- Yhden muuttujan funktio $f \colon A \to \mathbf{R}$, kun $A \subset \mathbf{R}$.
- Tasokäyrän parametrisointi $\mathbf{f} \colon [a, b] \to \mathbf{R}^2$, jolloin $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$.
- Avaruuskäyrän parametrisointi $\mathbf{f} \colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$, jolloin $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- Usean muuttujan funktio (skalaarikenttä) $f \colon A \to \mathbf{R}$, kun $A \subset \mathbf{R}^n$; funktion arvoa merkitään $f(x, y)$ tapauksessa $n = 2$.
- Vektorikenttä $\mathbf{F} \colon A \to \mathbf{R}^k$, kun $A \subset \mathbf{R}^n$.

Funktion jatkuvuus määritellään usein raja-arvon avulla. Jatkuvuus on kuitenkin raja-arvoa yksinkertaisempi käsite, joten aloitetaan siitä.
Muista: Jos $a, b \in \mathbf{R}$, niin lauseke $|a - b|$ on pisteiden ($=$ lukujen) a ja b välinen etäisyys.

Määritelmä 3.1

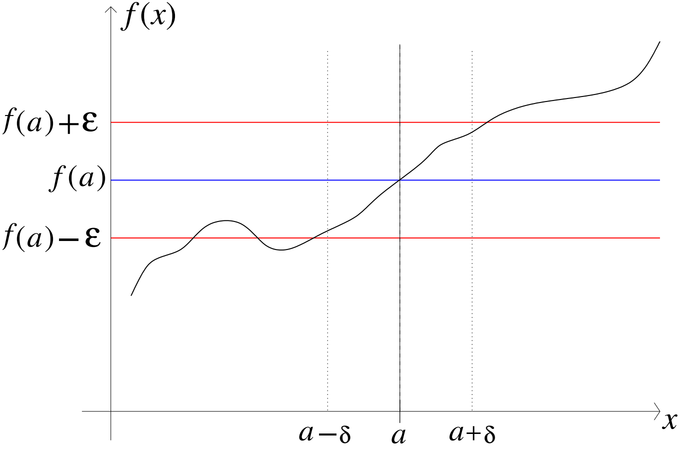
Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ funktio. Funktio f on **jatkuva pisteessä** $a \in A$, kun pätee:
Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x \in A \quad \text{ja} \quad |x - a| < \delta.$$

Lyhyesti: $x \in A$ ja $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Idea: Kun ε pienenee, niin $\delta = \delta_\varepsilon$ pienenee (jos jatkuvuus voimassa).

3.2 Jatkuvuus II



- Usein funktion määrittelyjoukko A on jokin väli. Tällöin jatkuvuutta voidaan tutkia määritelmän avulla myös väliin kuuluvassa päätepisteessä; ehto $x \in A$ on olennainen.
- Jos f on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä, niin se on **jatkuva joukossa** A (tai lyhyesti: jatkuva).
- Funktion jatkuvuus voidaan määritellä myös jonojen avulla. Seuraava ehto on yhtäpitävä varsinaisen $\varepsilon - \delta$-määritelmän kanssa:
  Funktio $f : A \to \mathbf{R}$ on jatkuva pisteessä $a \in A$ täsmälleen silloin, kun pätee:
  Jos jonolle (a_n) on voimassa $a_n \in A$ kaikilla n ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin silloin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
- Jonojen avulla kirjoitettuna jatkuvuus tarkoittaa siis yhtälöä

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big).$$

3.2 Jatkuvuus IV

Jatkuvia funktioita ovat esimerkiksi

- polynomit: $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$;
- rationaalifunktiot: $R(x) = P(x)/Q(x)$, kun P ja Q ovat polynomeja;
- juurifunktiot: $f(x) = x^{p/q}$, kun $x \geq 0$;
- trigonometriset funktiot sin, cos, tan ja cot;
- jatkuvien funktioiden summat, tulot ja osamäärät (määrittelyjoukko!);
- jatkuvien funktioiden yhdistetyt funktiot.

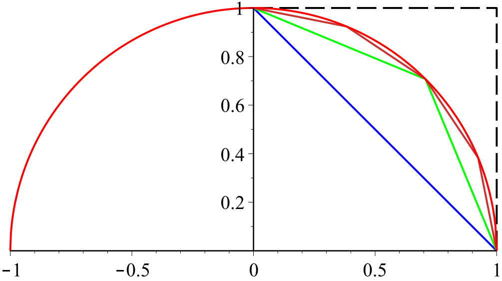
Perustelut suoraviivaisia, kun jatkuvuutta tutkitaan edellisen sivun jono-version avulla: tulokset palautuvat jonojen raja-arvojen ominaisuuksiin.

3.3 Trigonometriset funktiot I

Trigonometriset funktiot määritellään yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kaarenpituuden avulla. Jonojen avulla ympyrän kaarenpituus voidaan määritellä alkeellisella tavalla ilman integraalilaskentaa:
Jaetaan tutkittava kaari tasavälisesti 2^n:ään osaan ja lasketaan vastaavan murtoviivan pituus a_n. Näin saadaan nouseva ja ylhäältä rajoitettu jono, jonka raja-arvo on kyseessä olevan kaaren pituus. Geometrisella tarkastelulla jonolle (a_n) voidaan esimerkiksi yksikköympyrän neljänneksen tapauksessa johtaa palautuskaava

$$a_0 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{2^{2n+2}}}}.$$

Jono on nouseva, koska 2^n-tyyppisessä jaossa kaikki aikaisempien vaiheiden jakopisteet pysyvät mukana. Ylhäältä rajoittuneisuus nähdään helpoiten geometrisesti projisioimalla janat (origosta katsoen) ympyrän ulkopuolelle piirretyn neliön sivuille (katkoviiva), jolloin niiden pituus kasvaa ja ylärajaksi saadaan 2.



Janojen projektioista muodostuu musta katkoviiva, joten

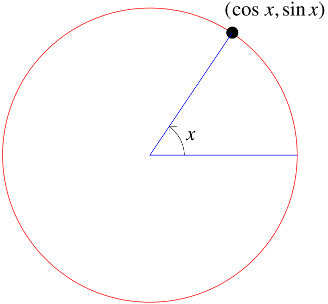
$$\begin{aligned} a_n &= \text{janojen pituuksien summa vaiheessa } n \\ &< \text{katkoviivan pituus} = 2. \end{aligned}$$

3.3 Trigonometriset funktiot III

Määritelmä 3.2

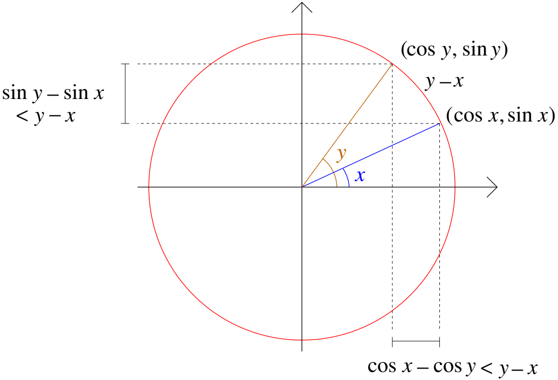
Luku π on yksikköympyrän puolikkaan kaarenpituus.

Kaarenpituuden avulla määritellään kulman yksikkö radiaani (lyh. rad), joka on dimensioton. Trigonometriset funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ määritellään yksikköympyrän kaarenpituuden avulla kaikille $x \in \mathbf{R}$.



3.3 Trigonometriset funktiot IV

Sinin ja kosinin jatkuvuus geometrisesti yksikköympyrän avulla.



Jatkuvuus seuraa epäyhtälöistä $|\sin x - \sin a| \leq |x - a|$ ja $|\cos x - \cos a| \leq |x - a|$.

3.4 Maksimi ja minimi

Olkoon $f\colon A \to \mathbf{R}$. Funktiolla f on pisteessä $a_0 \in A$

- **maksimi** eli suurin arvo, jos $f(a) \leq f(a_0)$ kaikilla $a \in A$. Merkitään

$$\max\{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{tai} \quad \max_{x \in A} f(x).$$

- **minimi** eli pienin arvo pisteessä $a_1 \in A$, jos $f(a) \geq f(a_1)$ kaikilla $a \in A$. Merkitään

$$\min\{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{tai} \quad \min_{x \in A} f(x).$$

Muuttujan arvot a_0 ja a_1 ovat funktion f **ääriarvokohtia**. Funktion arvot $f(a_0)$ ja $f(a_1)$ ovat funktion **ääriarvot**.

3.4 Ominaisuuksia

- I perustulos: Suljetulla välillä määritellyllä jatkuvalla funktiolla on maksimi ja minimi joissakin välin pisteissä.
- II perustulos (Jatkuvien funktioiden väliarvolause): Suljetulla välillä I määritelty jatkuva funktio saa kaikki arvot, jotka ovat sen minimin ja maksimin välissä. Toisin sanoen: funktion arvojoukko $f[I] = \{f(x) \mid x \in I\}$ on myös väli. Tässä muodossa väite pätee myös avoimille tai puoliavoimille väleille I (jolloin maksimia tai minimiä ei aina ole).
- Erityisesti: Jos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja $f(a)f(b) < 0$, niin funktiolla f on nollakohta avoimella välillä $]a, b[$.
- Näitä asioita käsitellään yleisemmin kurssilla MS-C1540 Euklidiset avaruudet, jossa ne myös todistetaan.

3.5 Funktion raja-arvo

- Jos $A \subset \mathbf{R}$ ja $f\colon A \to \mathbf{R}$, niin f:n käyttäytymistä pisteen $x_0 \in \mathbf{R}$ lähellä voidaan tutkia myös funktion arvosta $f(x_0)$ välittämättä; ei edes tarvitse olla $x_0 \in A$. Tällöin on kyseessä funktion f raja-arvo pisteessä x_0.
- Raja-arvo määritellään (tällä kurssilla) vain sellaisissa pisteissä $x_0 \in \mathbf{R}$, joille jokainen väli $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä, vaikka $\delta > 0$ olisi kuinka pieni tahansa. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jokainen väli $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sisältää ainakin yhden pisteen $a \in A$, $a \neq x_0$. (Tällaisia pisteitä x_0 kutsutaan joukon A kasautumispisteiksi. Esimerkiksi avoimen välin päätepisteet.) Jatkossa oletetaan siis, että x_0 on tällainen piste.

3.5 Funktion raja-arvo I

Määritelmä 3.3

Funktiolla $f\colon A \to \mathbf{R}$ on **raja-arvo** L **pisteessä** $x_0 \in \mathbf{R}$, jos pätee: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x \in A \quad \text{ja} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

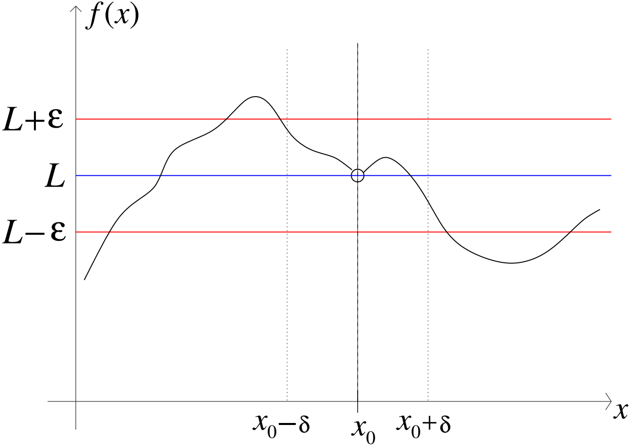
Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Lyhyesti: $x \in A$ ja $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Huomaa: Ehdon $0 < |x - x_0|$ ainoa tarkoitus on rajata mahdollinen funktion arvo $f(x_0)$ pois käsittelystä; ts. ehtoa tutkitaan vain tapauksessa $x \neq x_0$.

Idea: Mitä pienempi $\varepsilon > 0$ on annettu, sitä pienempi $\delta > 0$ täytyy valita; onnistuu aina, jos raja-arvo on olemassa.



3.5 Toispuoleiset raja-arvot

Vastaavalla tavalla saadaan myös **toispuoleiset raja-arvot**

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x),$$

kun epäyhtälö $0 < |x - x_0| < \delta$ korvataan epäyhtälöllä $0 < x - x_0 < \delta$ tai $0 < x_0 - x < \delta$. Nämä voidaan tulkita myös tavallisen raja-arvon erikoistapauksina, kun funktion määrittelyjoukoksi muutetaan $A \cap \,]x_0, \infty[$ tai $A \cap \,]-\infty, x_0[$.

Lause 3.4

Jos funktio f on määritelty joukossa $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$, niin raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

on olemassa täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = L.$$

3.5 Laskusääntöjä

Lause 3.5

Jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \textit{ja} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b,$$

niin

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = a+b, \ \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab, \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b};$$

viimeisen kohdalla oletetaan $b \neq 0$ *(jolloin* $g(x) \neq 0$ *pisteen* x_0 *"lähellä").*

Vastaavat tulokset ovat voimassa myös toispuoleisille raja-arvoille.

3.5 Funktion raja-arvon suppiloperiaate I

Lause 3.6

Jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

ja $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *kaikilla* $0 < |x - x_0| < \delta$, *niin*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Tämäkin tulos on voimassa myös toispuoleisille raja-arvoille.

3.5 Funktion raja-arvon suppiloperiaate II

Esimerkki 3.7

Osoita, että

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ratkaisu: Geometrinen tarkastelu yksikköympyrän avulla (seuraava sivu) johtaa epäyhtälöön

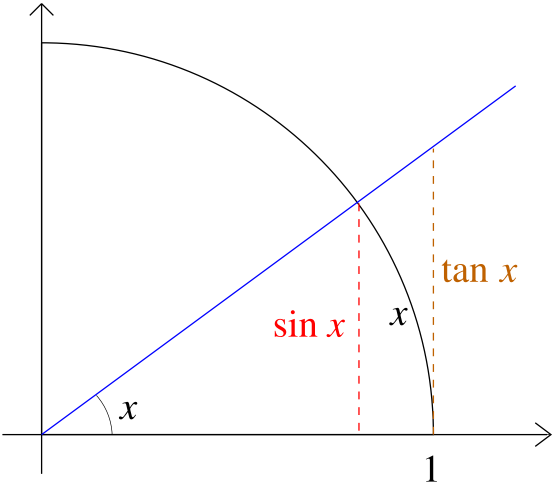
$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

kun $0 < x < \pi/2$, joten

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{kaikilla} \quad 0 < x < \pi/2.$$

Koska $\cos x$ ja lauseke $(\sin x)/x$ ovat parillisia, niin sama epäyhtälö on voimassa kaikilla $0 < |x| < \pi/2$. Koska $\cos x \to \cos 0 = 1$, kun $x \to 0$, niin väite seuraa suppiloperiaatteesta.

3.5 Funktion raja-arvon suppiloperiaate III



$\sin x < x < \tan x$

Lause 3.8

Jos funktion f määrittelyjoukko M_f on väli, niin funktion f jatkuvuus pisteessä $x_0 \in M_f$ on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.5 Funktion jatkaminen

Jos $f\colon A \to \mathbf{R}$ on jatkuva, $x_0 \notin A$ on joukon A kasautumispiste ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, niin voidaan määritellä uusi funktio $\overline{f}\colon \overline{A} \to \mathbf{R}$, $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$, asettamalla

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in A, \\ L, & \text{kun } x = x_0. \end{cases}$$

Tällöin $\overline{f}$ on jatkuva. Usein merkitään hiukan epätäsmällisesti $f = \overline{f}$.

Esimerkki 3.9

Funktio

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

on jatkuva koko reaaliakselilla.

3.5 Raja-arvon yleistykset

Myös seuraavat käsitteet voidaan määritellä täsmällisesti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \text{jne.}$$

Esimerkiksi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

jos pätee: Jokaista $M \in \mathbf{R}$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

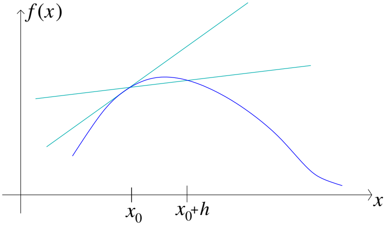
$$f(x) > M \quad \text{aina, kun } x \in A \quad \text{ja} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Raja-arvo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ on tärkeä mm. epäoleellisen integraalin yhteydessä.

4.1 Derivaatta

Erilaisia lähestymistapoja:

- geometrinen (käyrän tangentti sekanttien raja-asentona)



- fysikaalinen (ajasta riippuvan funktion hetkellinen muutosnopeus).

Esimerkki 4.1

Kappaleen 1-ulotteisen liikkeen paikkakoordinaatti on $x = x(t)$ hetkellä t. Sen hetkellinen nopeus on keskinopeuksien raja-arvo:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

4.1 Derivaatan määritelmä

Määritelmä 4.2

Oletetaan, että funktio f on määritelty jollakin välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Sen derivaatta pisteessä x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

jos raja-arvo olemassa. Funktio on derivoituva, jos sillä on derivaatta jokaisessa määrittelyjoukon (= avoin väli) pisteessä.

Huomaa yhteys: $x = x_0 + h \Leftrightarrow h = x - x_0$.

Merkintöjä:

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0}, \quad f' = Df = \frac{df}{dx}.$$

4.1 Korkeamman kertaluvun derivaatat

Jos funktion derivaatta $f'(x)$ on määritelty jollakin avoimella välillä $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, niin voidaan tutkia funktion f' erotusosamäärää pisteessä x_0. Näin saadaan toisen kertaluvun derivaatta

$$f''(x_0) = D^2 f(x_0) = \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}.$$

Jatkamalla samaan tapaan voidaan määritellä korkeamman kertaluvun derivaatat $f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots$
Merkintä:

$$C^n\big(]a,b[\big) = \{f\colon\ ]a,b[\to \mathbf{R} \quad | \quad f \text{ on } n \text{ kertaa derivoituva välillä }]a,b[\\ \text{ja } f^{(n)} \text{ on jatkuva}\}$$

Tällaisia funktioita kutsutaan n kertaa jatkuvasti derivoituviksi.

4.1 Linearisointi ja differentiaali

Derivaatan määritelmä johtaa approksimaatioon

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Oikean puoleinen lauseke on funktion f **linearisointi** eli **differentiaali** pisteessä x_0. Sille käytetään merkintää df.
Linearisoinnin kuvaaja

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

on funktion kuvaajan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ asetettu tangenttisuora. Differentiaalin merkitys tulee paremmin esille vasta usean muuttujan funktioiden yhteydessä.

Myöhemmin käsitellään funktion f approksimointia myös korkeamman asteen polynomien avulla (Taylor-polynomi).

4.1 Derivaatan fysikaalinen tulkinta

- Jos $x = x(t)$ on kappaleen yksiulotteisen liikkeen paikkakoordinaatti hetkellä t, niin sen hetkellinen nopeus on $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t)$. Näistä viimeinen on tavallinen merkintä fysiikassa.
- Vastaavalla tavalla $a(t) = v'(t) = x''(t) = \ddot{x}(t)$ on kappaleen hetkellinen kiihtyvyys.
- Yleisemmin: Ajasta riippuvan funktion $f(t)$ hetkellinen muutosnopeus on $f'(t)$.
- Esimerkki: $f(t) =$ lämpötila hetkellä t, jolloin $f'(t) =$ lämpötilan muutosnopeus hetkellä t (yksikkönä esim. $^\circ$C/s).

4.2 Laskusääntöjä

- Lineaarisuus
  $D\big(f(x)+g(x)\big) = f'(x)+g'(x)$
  $D\big(cf(x)\big) = cf'(x)$, kun $c \in \mathbf{R}$ on vakio
- Tulon derivoimissääntö

$$D\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Osamäärän derivoimissääntö

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \; g(x) \neq 0$$

- Yhdistetyn funktion derivoimissääntö

$$D\big(f(g(x))\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

  Tälle käytetään nimitystä **ketjusääntö** = Chain Rule; nimen tausta liittyy osittaisderivaattoihin, joista lisää kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta 2.

4.2 Eräitä derivaattoja

- $D(\text{vakiofunktio}) = 0$
- $D(x^r) = rx^{r-1}, \quad r \neq 0$
- $D(\sin x) = \cos x,\ D(\cos x) = -\sin x$
- $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, kun $x \neq \pi/2 + n\pi$
- $De^x = e^x$, $D \ln|x| = 1/x$, kun $x \neq 0$
  (näihin palataan myöhemmin)

Esimerkki 4.3

Johda funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0.

Ratkaisu: Erotusosamäärä on sievennettynä

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= 2x_0 + h,\end{aligned}$$

joten rajalla $h \to 0$ saadaan derivaataksi $f'(x_0) = 2x_0$.
Derivaattafunktion lauseke on siis muotoa $f'(x) = 2x$, kun $x \in \mathbf{R}$.

Hankalampi perustelu I

Esimerkki 4.4

Johda funktion $f(x) = \sin x$ derivaatta kohdassa x_0.

Ratkaisu: Erotusosamäärä saadaan yhteenlaskukaavan avulla muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \, \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \, \frac{\cos h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Koska (perustelut aikaisemmin/seuraavalla sivulla)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0,$$

niin derivaataksi saadaan $f'(x_0) = \cos x_0 \cdot 1 + \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0$.

Hankalampi perustelu II

Raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

johdettiin aikaisemmin geometrisesti ja suppiloperiaatteen avulla.
Koska (muista $\sin^2 h + \cos^2 h = 1$)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\
&= -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \to -1 \cdot \frac{0}{2} = 0,
\end{aligned}$$

kun $h \to 0$, niin saadaan jälkimmäinen raja-arvo.

Käytännössä derivaatat voidaan laskea laskusääntöjen ja tunnettujen derivaattojen avulla:

- $D\big(x^3 - 4x^2 + 6\big) = 3x^2 - 8x$
- $D\big(\sqrt{1+5x^2}\,\big) = \dfrac{1}{2}(1+5x^2)^{-1/2}D(1+5x^2) = \dfrac{5x}{\sqrt{1+5x^2}}$
- $$\begin{aligned} D\big(x^2\cos(3x)\big) &= D(x^2)\cos(3x) + x^2 D\big(\cos(3x)\big) \\ &= 2x\cos(3x) + x^2\big(-\sin(3x)\cdot D(3x)\big) \\ &= 2x\cos(3x) - 3x^2\sin(3x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} D\big(\sin(1/x)\big) &= \cos(1/x)D(1/x) \\ &= \cos(1/x)\cdot(-1/x^2) \\ &= -\cos(1/x)/x^2, \text{ kun } x \neq 0 \end{aligned}$$

4.3 Osittaisderivaatta

Useissa sovelluksissa esiintyy kahden tai useamman muuttujan funktioita kuten $u(x,t) = \sin x \cos t$, joita täytyy derivoida eri muuttujien suhteen. Tällöin on kyseessä **osittaisderivaatta**, joka lasketaan tavallisten derivoimissääntöjen avulla tulkitsemalla muut muuttujat vakioiksi tai parametreiksi. Esimerkiksi

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cos t, \;\; u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\sin x \cos t$$

ja

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = -\sin x \sin t, \;\; u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\sin x \cos t$$

yllä mainitussa esimerkissä.

Aiheesta lisää kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta 2.

4.4 Yleisiä tuloksia I

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$.

Lause 4.5

Jos f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \,]a, b[$, niin se on jatkuva pisteessä x_0.

Perustelu: Seuraa derivaatan määritelmästä, koska

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= f'(x_0) + \varepsilon(x_0, h) \\
&\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\,\varepsilon(x_0, h) \\
&\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\,\varepsilon(x_0, h) \\
&\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).
\end{aligned}$$

Tässä $\varepsilon(x_0, h)$ on raja-arvoon liittyvä virhetermi, jolle $\varepsilon(x_0, h) \to 0$, kun $h \to 0$.

Lause 4.6 (Rollen lause)

Jos f on derivoituva paikallisessa ääriarvohdassa $x_0 \in]a, b[$, niin $f'(x_0) = 0$.

Perustelu: Erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat erimerkkiset paikallisessa ääriarvokohdassa, esim. paikalliselle maksimille

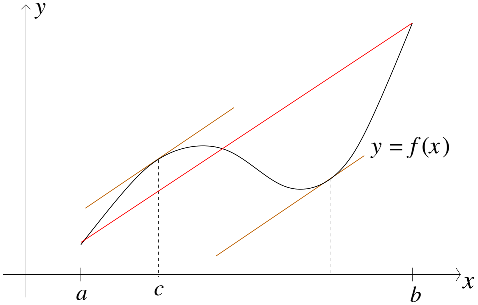
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\text{negatiivinen tai nolla}}{\text{positiivinen}} \leq 0, \text{ kun } h > 0,$$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\text{negatiivinen tai nolla}}{\text{negatiivinen}} \geq 0, \text{ kun } h < 0$$

ja $|h|$ on niin pieni, että $f(x_0)$ on maksimi välillä $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Lause 4.7

Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja lisäksi derivoituva avoimella välillä $]a,b[$, niin on olemassa sellainen piste $c \in\,]a,b[$, että

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad \text{ts.} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

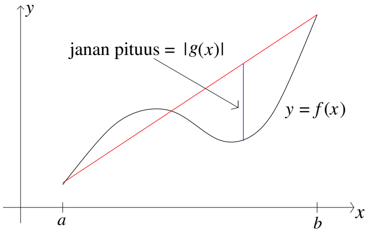


4.4 Väliarvolause II

Väliarvolauseen todistus: Sovelletaan Rollen lausetta apufunktioon

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a),$$

joka toteuttaa $g(a) = g(b) = 0$. Sen paikallisessa ääriarvokohdassa $c \in]a, b[$ pätee $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



4.4 Väliarvolauseen seurauksia

- Jos $f'(x) = 0$ kaikissa avoimen välin pisteissä x, niin f on vakiofunktio tällä välillä.
- Jos $f'(x) \geq 0$ jollakin välillä, niin f on kasvava tällä välillä; jos $f'(x) \leq 0$ jollakin välillä, niin f on vähenevä tällä välillä.
- Jos edellisen kohdan lisäksi $f'(x) = 0$ ainoastaan yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti kasvava/vähenevä.
  Esimerkki: $f(x) = x^3$.

4.4 L'Hospitalin sääntö I

Raja-arvojen laskeminen derivaatan avulla; erilaisia versioita mm. tyyppiä "0/0" tai "∞/∞" oleville raja-arvoille; myös toispuoleisille.
Tärkein tapaus:

Lause 4.8

Oletetaan, että $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *ja funktiot* f, g *ovat derivoituvia jollakin välillä* $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. *Jos*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on olemassa, niin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.4 L'Hospitalin sääntö II

Perustelu:
Erikoistapauksessa $g'(x_0) \neq 0$ perustelu on lyhyt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0)}{\big(g(x) - g(x_0)\big)/(x - x_0)} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

kun $x \to x_0$.

Yleisessä tapauksessa tarvitaan ns. yleistettyä väliarvolausetta, jonka mukaan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

jossakin pisteessä $c \in]x_0, x[$. Tällöin osoittajassa ja nimittäjässä on sama piste c, joten edes derivaattojen jatkuvuutta ei tarvita!

Esimerkki 4.9

Laske raja-arvo $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x}$.

Ratkaisu: Koska $\sin(4x)/x$ on muotoa "$0/0$" kohdassa $x = 0$, niin voidaan (yrittää) soveltaa L'Hospitalin sääntöä:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\cos(4x)}{1} = 4.$$

Koska derivoidulla muodolla on raja-arvo 4, niin lasku on pätevä.
Huom. 1: Jos derivoitu raja-arvo on edelleen muotoa "$0/0$", niin sääntöä voidaan yrittää käyttää toisen (tai useamman) kerran.
Huom. 2: Muoto "$0/0$" on aina tarkistettava:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} \neq \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0.$$

4.4 Ääriarvotehtävät I

Seuraavassa $A \subset \mathbf{R}$ on väli.

- Funktiolla $f : A \to \mathbf{R}$ on paikallinen maksimi/minimi pisteessä $x_0 \in A$, jos x_0 on funktion f maksimi-/minimikohta jollakin välillä $A \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
- Paikallinen ääriarvo = paikallinen maksimi tai minimi; voi esiintyä myös määrittelyvälin päätepisteessä.
- Paikallinen ääriarvo voi tulla
  (i) derivaatan nollakohdassa
  (ii) määrittelyvälin päätepisteessä, tai
  (iii) sellaisessa kohdassa, jossa funktio ei ole derivoituva.
- Jos tiedetään etukäteen, että funktiolla on maksimi/minimi, niin etsitään kaikki mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat (vrt. edellinen), lasketaan niissä funktion arvot ja **valitaan** näistä suurin/pienin.

Esimerkki 4.10

Määritä funktion $f\colon [0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 6x$, suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu: Koska kyseessä on suljetulla välillä jatkuva funktio, niin sillä on maksimi ja minimi. Koska funktio on derivoituva, niin riittää tutkia välin päätepisteet ja ne derivaatan nollakohdat, jotka ovat määrittelyvälin sisällä.
Derivaatan nollakohdat: $f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Koska $-\sqrt{2} \notin [0,2]$, niin lasketaan arvot $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$, $f(2) = -4$, joista voidaan valita funktion pienin arvo $-4\sqrt{2}$ ja suurin arvo 0.

4.4 Kuperuus

- **Kupera** eli **konveksi** alue $D \subset \mathbf{R}^2$: jos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, niin myös niiden välinen yhdysjana $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset D$
- Välillä $I \subset \mathbf{R}$ määritelty funktio on **kupera** eli konveksi, jos sen kuvaajan yläpuolinen tasoalue on kupera; tähän riittää se että kuvaajalle piirretyt sekantit ovat aina kuvaajan yläpuolella, kaavana

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \text{ kun } x, y \in I, t \in [0,1].$$

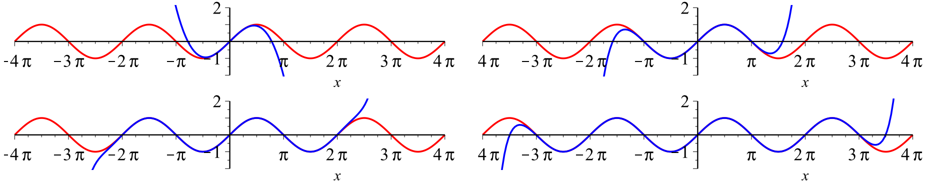
- Erityisesti: jos $f''(x) \geq 0$ koko välillä, niin f on konveksi
- Funktion käännepiste: kohta, jossa kuvaajalla on tangentti ja funktion kuperuussuunta vaihtuu. Esimerkiksi, jos $f''(x)$ vaihtaa merkkiä.
- Jos funktion f derivaatan nollakohdassa x_0 on $f''(x_0) < 0$, niin kyseessä on paikallinen maksimi; jos $f''(x_0) > 0$, niin kyseessä on paikallinen minimi. Tapauksessa $f''(x_0) = 0$ tilannetta täytyy tutkia tarkemmin.

Esimerkki 5.1

Verrataan funktion $\sin x$ kuvaajaa (punainen) polynomien

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

kuvaajiin (sininen), kun $n = 1, 4, 8, 12$.



5.1 Taylor-polynomi I

- Taylor-polynomi $P_n(x; x_0)$ = funktion paras n-asteinen polynomiapproksimaatio (derivoinnin kannalta) pisteen x_0 lähellä. Maclaurin-polynomi: tapaus $x_0 = 0$.
- Jos f on n kertaa derivoituva pisteessä x_0, niin polynomilla

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= P_n(x; x_0) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\
&\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k
\end{aligned}
$$

on pisteessä x_0 samat derivaatat kuin f:llä kertalukuun n saakka.

5.1 Taylor-polynomi II

- Taylorin kaava: Jos derivaatta $f^{(n+1)}$ on olemassa ja se on jatkuva funktio jollakin välillä $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, niin $f(x) = P_n(x; x_0) + E_n(x)$ ja virhetermille $E_n(x)$ pätee

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

jossakin pisteessä $c \in [x_0, x] \subset I$. Jos on olemassa indeksistä n riippumaton vakio M, jolle $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ kaikilla $x \in I$, niin tällöin

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

- Kaavan todistus sivuutetaan (induktio tai integraalin avulla).

5.1 Taylor-polynomi III

- Eräitä Maclaurin-polynomiapproksimaatioita:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 5.2

Kuinka mones polynomi $P_n(x)$ approksimoi funktiota $\sin x$ välillä $[-\pi, \pi]$ niin hyvin, että virheen itseisarvo on alle 10^{-6}?

Ratkaisu: Käytetään Taylorin kaavaa tapauksessa $f(x) = \sin x$ ja $x_0 = 0$. Tällöin $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ indeksistä n ja pisteestä c riippumatta. Lisäksi tutkittavalla välillä pätee $|x - x_0| = |x| \leq \pi$. Vaatimus toteutuu ainakin silloin, kun

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\pi^{n+1} < 10^{-6}.$$

Epäyhtälö täytyy ratkaista kokeilemalla: se toteutuu arvoilla $n \geq 16$. Vaadittu tarkkuus saavutetaan siis polynomilla $P_{16}(x)$, joka on tässä tapauksessa sama kuin $P_{15}(x)$.
Tarkistus kuvaajista: $P_{13}(x)$ ei riitä, joten teoreettinen yläraja on tarkka!

5.2 Newtonin menetelmä I

- Ensimmäisen asteen Taylor-polynomi $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on sama kuin funktion f linearisointi pisteen x_0 suhteen. Sitä voidaan käyttää erilaisissa arvioissa ja numeerisissa menetelmissä.
- Newtonin menetelmä: Yhtälö $f(x) = 0$ ratkaistaan likimääräisesti valitsemalla alkupiste x_0 (esimerkiksi kuvion perusteella) ja määrittelemällä
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
kun $n = 0, 1, 2, \dots$ Näin saadaan lukujono $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, jonka termit yleensä antavat yhä parempia likiarvoja funktion f nollakohdalle.
- Palautuskaava perustellaan geometrisesti etsimällä funktion nollakohtaa sen linearisoinnin (eli tangentin) avulla.

5.2 Newtonin menetelmä II

Esimerkki 5.3

Määritä luvun $\sqrt{2}$ likiarvo käyttämällä Newtonin menetelmää.

Ratkaisu: Käytetään Newtonin menetelmää funktiolle $f(x) = x^2 - 2$ ja alkuarvoa $x_0 = 2$. Palautuskaava tulee muotoon

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

josta saadaan $x_1 = 1{,}5$, $x_2 \approx 1{,}41667$, $x_3 \approx 1{,}4142157$ jne.
Kokeilemalla todetaan, että oikeiden desimaalien lukumäärä suunnilleen kaksinkertaistuu jokaisella askeleella ja x_7 tuottaa jo lähes 100 desimaalia oikein, kunhan välivaiheet lasketaan riittävällä tarkkuudella.

5.3 Taylor-sarja I

- Jos Taylorin kaavan virhetermi $E_n(x)$ lähestyy nollaa, kun n kasvaa, saadaan Taylor-polynomin raja-arvona funktion f Taylor-sarja ($=$ Maclaurin-sarja, jos $x_0 = 0$).
- Taylor-sarja on siis muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Tämä on esimerkki yleisestä **potenssisarjasta**, joita esiintyy monien alkeisfunktioiden yhteydessä.

5.3 Taylor-sarja II

- Taylor-sarja voidaan muodostaa aina, kun funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä x_0 ja ne sijoitetaan ym. kaavaan. Tähän liittyy kuitenkin kaksi ongelmaa:
  - Suppeneeko Taylor-sarja kaikilla muuttujan arvoilla?
    Vastaus: Ei aina; esimerkiksi funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

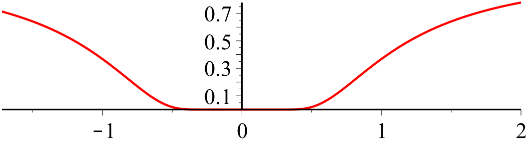
Maclaurin-sarja (= geometrinen sarja) suppenee vain arvoilla $-1 < x < 1$, vaikka funktio on derivoituva kaikilla $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

- Jos sarja suppenee jollakin x, niin onko sarjan summa sama kuin $f(x)$? Vastaus: Ei aina; esimerkiksi funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pätee $f^{(k)}(0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$ (hankala, mutta periaatteessa alkeellinen lasku). Näin ollen sen Maclaurin-sarja on identtisesti nolla ja suppenee kohti arvoa $f(x)$ ainoastaan pisteessä $x = 0$.



Johtopäätös: Taylor-sarjoja pitäisi tutkia tarkasti virhetermien jms. avulla. Käytännössä sarjoja muodostetaan käyttämällä apuna muutamia tunnettuja sarjakehitelmiä.

5.3 Taylor-sarja IV

- Esimerkkejä (eksponenttifunktioon palataan vielä myöhemmin):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1 \\
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbf{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbf{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbf{R} \\
(1+x)^r &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!} x^k, \quad |x| < 1
\end{aligned}
$$

Viimeinen on nimeltään binomisarja ja se on voimassa kaikilla $r \in \mathbf{R}$. Jos $r = n \in \mathbf{N}$, niin sarjan kertoimet ovat nollia summausindeksistä $k = n + 1$ lähtien, ja alkuosan kertoimet ovat muotoa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Vertaa **binomikaavaan:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \cdots + b^n,$$

kun $n \in \mathbf{N}$.

5.4 Potenssisarja I

- Potenssisarja on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$$

  oleva sarja. Piste x_0 on sarjan keskus ja luvut c_k sarjan kertoimia.

- Sarja *suppenee* arvolla x, jos yllä oleva raja-arvo on määritelty. Tämän suhteen on vain kolme erilaista tapausta (Abelin lause):
  - sarja suppenee vain arvolla $x = x_0$ (jolloin sarjassa esiintyy vain vakiotermi c_0)
  - sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$
  - sarja suppenee jollakin välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ (ja mahdollisesti yhdessä tai molemmissa päätepisteissä), mutta hajaantuu muilla x:n arvoilla.

  Luku R on potenssisarjan **suppenemissäde**.
  Sopimus: $R = 0$ tai $R = \infty$ muissa tapauksissa.

Esimerkki 5.4

Millä muuttujan x arvoilla potenssisarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} x^k$ suppenee?

Ratkaisu: Tutkitaan suppenemista suhdetestin avulla, kun $a_k = kx^k/2^k$. Tällöin

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(k+1)x^{k+1}/2^{k+1}}{kx^k/2^k} \right| = \frac{k+1}{2k}|x| \to \frac{|x|}{2},$$

kun $k \to \infty$. Suhdetestin perusteella sarja suppenee, kun $|x|/2 < 1$, ja hajaantuu, kun $|x|/2 > 1$. Rajatapauksissa $|x|/2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$ sarjan yleinen termi ei lähesty nollaa, joten sarja hajaantuu.

Tulos: Sarja suppenee välillä $-2 < x < 2$ ja hajaantuu muulloin.

5.4 Potenssisarja III

- Suppenemisvälillä I tulee siis määriteltyä funktio $f: I \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{1}$$

  joka on nimeltään sarjan **summafunktio**.

- Potenssisarjan summafunktio f on välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ jatkuva ja derivoituva. Lisäksi derivaatan $f'(x)$ voi laskea derivoimalla sarjaa (1) termeittäin:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}.$$

  Huomaa, että vakiotermi c_0 derivoituu pois eli summa alkaa indeksistä $k = 1$. Lisäksi derivoitu sarja suppenee samalla välillä $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$; tämä on hieman yllättävää (?) kertoimen k vuoksi.

Esimerkki 5.5

Määritä potenssisarjan $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ summafunktio.

Ratkaisu: Tutkittava sarja on saatu derivoimalla termeittäin geometrinen sarja, jonka suhdelukuna on muuttuja x. Näin ollen

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots &= D(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Kertomalla tulos puolittain muuttujalla x saadaan mm. todennäköisyyslaskennassa geometriseen jakaumaan liittyvä summakaava

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2},$$

joka on voimassa arvoilla $|x| < 1$.

5.4 Potenssisarja V

- Tapauksessa $[a, b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ potenssisarjan (1) voi myös integroida termeittäin:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b (x - x_0)^k\,dx.$$

Usein integrointi voidaan ulottaa myös suppenemisvälin päätepisteeseen saakka, mutta tämä ei aina pidä paikkaansa. Tilannetta täytyy siis tutkia tapauskohtaisesti.

Esimerkki 5.6

Laske vuorottelevan harmonisen sarjan summa.

Ratkaisu: Sijoitetaan aluksi geometrisen sarjan suhdeluvuksi $q = -x$, jolloin saadaan

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Integroimalla kaavan molemmat puolet välillä $0 \leq x \leq 1$ saadaan haluttu tulos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \ln 2.$$

Tässä integroinnin ulottaminen suppenemisvälin päätepisteeseen $x = 1$ pitäisi perustella tarkemmin. Integraaliin ja logaritmiin palataan myöhemmin kurssilla.

6.1 Funktio I

Tämä luku sisältää tarkennuksia ja lisäyksiä funktioihin liittyviin käsitteisiin. Kaikkia kohtia ei käsitellä luennolla, mutta osaan niistä palataan tarvittaessa myöhemmin.

- Funktio $f\colon A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon a täsmälleen yhden B:n alkion b. Merkitään $b = f(a)$.
- Tässä $A = M_f$ on f:n **määrittelyjoukko** ja B on f:n **maalijoukko**.
- Funktion f **arvojoukko** (eli kuvajoukko) on B:n osajoukko $f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$.
- Esimerkiksi funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, maalijoukko on $\mathbf{R}$, mutta sen arvojoukko on $f[\mathbf{R}] = [0, \infty[$.

6.1 Funktio II

- Edellisen esimerkin funktio voidaan toki määritellä suoraan muodossa $f\colon \mathbf{R} \to [0,\infty[$, $f(x) = x^2$, jolloin arvojoukko on sama kuin maalijoukko. Näin voidaan periaatteessa menetellä kaikkien funktioiden kohdalla, mutta se ei yleensä ole käytännöllistä. Esimerkki: Yritä tehdä sama funktiolle $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^6 + x^2 + x$, $x \in \mathbf{R}$.
- Jos funktion määrittelyjoukko $A \subset \mathbf{R}$, niin kyseessä on yhden muuttujan funktio, joita tällä kurssilla käsitellään.
- Jos $A \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, niin kyseessä on usean muuttujan funktio, joita käsitellään kursseilla Differentiaali- ja integraalilaskenta 2–3.

6.2 Käänteisfunktio I

- Funktio $f: A \to B$ on
  - **injektio**, jos eri pisteissä saadaan eri arvot, ts. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ts. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
  - **surjektio**, jos arvojoukko on sama kuin maalijoukko, ts. $f[A] = B$.
  - **bijektio**, jos se on sekä injektio että surjektio.
- Huom: Funktiosta tulee surjektio, kun maalijoukko kutistetaan mahdollisimman pieneksi, eli jätetään pois kaikki ne pisteet, jotka eivät ole funktion arvoja.
- Toinen tapa määritellä nämä käsitteet perustuu yhtälön ratkaisujen lukumäärän tutkimiseen: Jos $y \in B$ on kiinteä, niin yhtälöllä $y = f(x)$ on
  - korkeintaan yksi ratkaisu $x \in A$, jos f on injektio
  - ainakin yksi ratkaisu, jos f on surjektio
  - täsmälleen yksi ratkaisu, jos f on bijektio.

6.2 Käänteisfunktio II

- Jos $f\colon A \to B$ on bijektio, niin sillä on **käänteisfunktio** $f^{-1}\colon B \to A$, joka määräytyy ehdosta $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
- Käänteisfunktiolle pätee $f^{-1}(f(a)) = a$ kaikilla $a \in A$ ja $f(f^{-1}(b)) = b$ kaikilla $b \in B$.
- Käänteisfunktion kuvaaja on alkuperäisen kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen. Perustelu: piste (a, b) on funktion f kuvaajalla $\Leftrightarrow$ $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow$ piste (b, a) on funktion f^{-1} kuvaajalla. Lisäksi operaation $(a, b) \mapsto (b, a)$ geometrinen tulkinta on peilaus suoran $y = x$ suhteen.
- Jos $A \subset \mathbf{R}$ ja $f\colon A \to \mathbf{R}$ on aidosti monotoninen, niin funktiolla $f\colon A \to f[A]$ on käänteisfunktio.
- Jos yllä A on väli ja f on jatkuva, niin myös f^{-1} on jatkuva joukossa $f[A]$.

6.2 Käänteisfunktio III

- Käänteisfunktion derivaatta: Olkoon $f\colon\ ]a,b[\,\to\,]c,d[$ derivoituva aidosti monotoninen surjektio, jolloin f:llä on käänteisfunktio $f^{-1}\colon\ ]c,d[\,\to\,]a,b[$. Tällöin kuvaajat $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$ ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen ja

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

jos $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Huom: $f'(f^{-1}(x))$ = funktion f derivaatta laskettuna pisteessä $f^{-1}(x)$.

6.3 Trigonometriset funktiot: Kertausta I

- Kulman yksikkö radiaani = rad: kulmaa vastaavan yksikköympyrän osan kaarenpituus.
- π rad = 180 astetta, ts. 1 rad = $180/\pi \approx 57{,}3$ astetta
- Funktiot $\sin x$, $\cos x$ määritellään yksikköympyrän avulla niin, että $(\cos x, \sin x)$, $x \in [0, 2\pi]$, on yksikköympyrän parametrisointi kaarenpituuden x avulla.

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \ (x \neq \pi/2 + n\pi), \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \ (x \neq n\pi) \end{aligned}$$

- Jaksollisuus:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x, \ \cos(x + 2\pi) = \cos x, \\ \tan(x + \pi) &= \tan x \end{aligned}$$

6.3 Trigonometriset funktiot: Kertausta II

- Ominaisuuksia (perustelut yksikköympyrästä!):
  - $\sin 0 = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$
  - $\cos 0 = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$
  - sin ja tan ovat parittomia funktioita, cos on parillinen:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos(-x) &= \cos x, \\ \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned}$$

  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$
- Yhteenlaskukaavat:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

Perustelu geometrisesti tai helpommin vektoreiden ja matriisien avulla. (Kaikkien eri tapausten käsittely geometrisesti on hieman työlästä)

6.3 Trigonometriset funktiot: Kertausta III

- Derivaatat:

$$D(\sin x) = \cos x, \quad D(\cos x) = -\sin x$$

- Edellisestä seuraa, että molemmat funktiot $y(t) = \sin(\omega t)$ ja $y(t) = \cos(\omega t)$ toteuttavat *differentiaaliyhtälön*

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

joka kuvaa ns. harmonista värähtelyä. Tässä muuttuja t on aika ja vakio $\omega > 0$ on värähtelyn kulmataajuus. Kuten myöhemmin nähdään, differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

jossa A, B ovat vakioita. Ne määräytyvät yksikäsitteisesti, jos tunnetaan esimerkiksi alkutila $y(0)$ ja alkunopeus $y'(0)$. Kaikki ratkaisut ovat jaksollisia ja niiden jaksonaika on $T = 2\pi/\omega$.

- Trigonometrisilla funktioilla on käänteisfunktio, jos funktioiden määrittely- ja maalijoukkoja rajoitetaan sopivalla tavalla.
- Sini-funktio
$$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$
on aidosti kasvava bijektio.
- Kosini-funktio
$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$$
on aidosti vähenevä bijektio.
- Tangentti-funktio
$$\tan\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$$
on aidosti kasvava bijektio.

6.3 arcus-funktiot II

- Käänteisfunktiot:

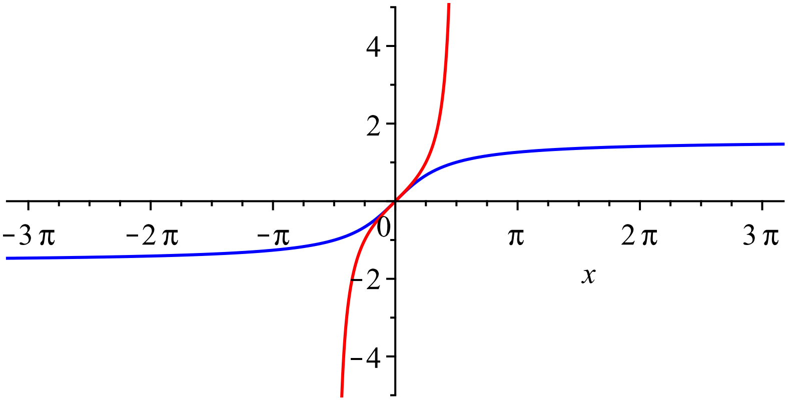
$$
\begin{aligned}
\arctan &: \quad \mathbf{R} \to \,]-\pi/2, \pi/2[, \\
\arcsin &: \quad [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \\
\arccos &: \quad [-1, 1] \to [0, \pi]
\end{aligned}
$$

- Siis:

$$
\begin{aligned}
x &= \tan\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arctan x, \quad \text{kun } \alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[\\
x &= \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin x, \quad \text{kun } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] \\
x &= \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos x, \quad \text{kun } \alpha \in [0, \pi]
\end{aligned}
$$

- Huom: arc$***$ annetaan **radiaaneissa**, ellei kyseessä ole geometrinen sovellus.

6.3 arcus-funktiot III



Funktioiden tan ja arctan kuvaajat.

6.3 arcus-funktiot IV

- Käänteisfunktioiden derivaatat

$$\begin{aligned} D \arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R} \\ D \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \\ D \arccos x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Varsinkin ensimmäinen kaava on tärkeä integraalilaskennassa. Perustelu derivoimalla puolittain yhtälö $\tan(\arctan x) = x$, kun $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \big(1 &+ \tan^2(\arctan x)\big) \cdot D(\arctan x) = Dx = 1 \\ &\Rightarrow \quad D(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Alin rivi myös suoraan käänteisfunktion derivaatan kaavasta.

6.3 Johdanto: Radioaktiivinen hajoaminen

Radioaktiivisen aineen ydinten lukumäärää hetkellä t kuvaa funktio $y(t)$. Lyhyellä aikavälillä Δt hajoavien ydinten lukumäärä on likimain suoraan verrannollinen sekä aikavälin pituuteen että ydinten lukumäärään aikavälin alussa:

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \approx -k \cdot y(t) \cdot \Delta t.$$

Vakio k on aineesta riippuva *hajoamisvakio*. Tästä saadaan

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -ky(t),$$

ja rajalla $\Delta t \to 0$ differentiaaliyhtälö $y'(t) = -ky(t)$.

6.3 Eksponenttifunktio I

- Neperin luku

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$
$$\approx 2{,}718281828459\dots$$

- Eksponenttifunktio exp:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Määritelmä (sarjakehitelmä) perustuu ominaisuuteen $\exp'(x) = \exp(x)$, jonka vuoksi eksponenttifunktio on tärkeä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa.

6.3 Eksponenttifunktio II

- Yhteys erilaisten määritelmien välillä on suoraviivainen, mutta pitkähkö lasku, joka on tällä kurssilla oheislukemista. Päättely etenee esimerkiksi seuraavalla tavalla:
  - Määritellään $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

    $$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

    Sarja suppenee suhdetestin perusteella kaikilla $x \in \mathbf{R}$.
  - Osoitetaan: exp on derivoituva ja toteuttaa $\exp'(x) = \exp(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. (Sarjan derivoiminen termeittäin on koko päättelyn hankalin kohta, vaikka intuitiivisesti helppo ymmärtää.)
  - Se toteuttaa myös ominaisuudet $\exp(0) = 1$,

    $$\exp(-x) = 1/\exp(x) \text{ ja } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

    kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

6.3 Eksponenttifunktio III

- Edellisistä seuraa, että $\exp(p/q) = (\exp(1))^{p/q}$ kaikille rationaaliluvuille $p/q \in \mathbf{Q}$.
- Jatkuvuuden perusteella

$$\exp(x) = (\exp(1))^x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.
- Koska

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

niin eksponenttifunktiolle saadaan muoto e^x.
- Lisäksi edellisistä seuraa, että $\exp\colon \mathbf{R} \to]0,\infty[$ on aidosti kasvava bijektio, jolle

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

6.3 Eksponenttifunktio IV

Jatkossa kirjoitetaan $e^x = \exp(x)$. Ominaisuuksia:

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $D(e^x) = e^x$
- $e^{-x} = 1/e^x$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $e^x e^y = e^{x+y}$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

6.3 DY $y' = ky$

Lause 6.1

Olkoon $k \in \mathbf{R}$ vakio. Kaikki differentiaaliyhtälön

$$y'(x) = ky(x), \ x \in \mathbf{R},$$

toteuttavat funktiot $y = y(x)$ ovat muotoa $y(x) = Ce^{kx}$, jossa C on vakio. Jos funktion y arvo tunnetaan jossakin pisteessä x_0, niin vakiolle C saadaan yksikäsitteinen arvo.

Perustelu:

$$\begin{aligned}
y'(x) = ky(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(y'(x) - ky(x)\big)e^{-kx} = 0 \quad \big| \ \text{koska} \ \ e^{-kx} > 0 \ \ \text{aina} \\
&\Leftrightarrow \quad y'(x)e^{-kx} - ke^{-kx}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(y(x)e^{-kx}\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-kx} = C = \text{vakio} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{kx}.
\end{aligned}$$

6.3 Logaritmi I

- Logaritmifunktio = eksponenttifunktion käänteisfunktio:

$$\ln\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbf{R}$$

- Tarkasti ottaen kyseessä on e-kantainen eli luonnollinen logaritmi. Yleisen a-kantaisen logaritmin määritelmä perustuu kaavaan

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

  kun $a > 0$ ja $y > 0$.
- Muita sovelluksissa esiintyviä logaritmeja ovat Briggsin 10-kantainen logaritmi $\lg x = \log_{10} x$ ja binäärilogaritmi $\mathrm{lb}\, x = \log_2 x$.
- Merkinnällä $\log x$ tarkoitetaan yleensä (esim. tietokoneohjelmissa) luonnollista logaritmia $\ln x$.

6.3 Logaritmi II

Logaritmin ominaisuuksia

- $e^{\ln x} = x$, kun $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\ln(a^b) = b \ln a$, kun $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, kun $a, b > 0$
- $D \ln |x| = 1/x$, kun $x \neq 0$

Nämä seuraavat vastaavista exp-funktion ominaisuuksista.
Esimerkiksi: Sijoittamalla $x = \ln a$ ja $y = \ln b$ kaavaan

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad \text{saadaan} \quad ab = e^{\ln a + \ln b},$$

joten $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

6.3 Eulerin kaava

- Imaginaariyksikkö i: olio, joka toteuttaa $i^2 = -1$. Kompleksiluvut muotoa $z = x + iy$, jossa $x, y \in \mathbf{R}$. Katso tarkemmin erillistä monistetta kompleksiluvuista.
- Kun eksponenttifunktion sarjakehitelmään sijoitetaan muuttujan paikalle ix ja ryhmitellään reaaliset termit erikseen, niin saadaan **Eulerin kaava**
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$
- Seurauksena on kaava $e^{i\pi} + 1 = 0$, jota jotkut pitävät matematiikan hienoimpana kaavana. Se sitoo toisiinsa tärkeimmät luvut 0, 1, i, e ja π sekä kolme laskutoimitusta.
- Kaavojen $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ avulla voidaan johtaa myös esitykset
$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \ \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \ x \in \mathbf{R}.$$

6.3 Hyperboliset funktiot I

- Hyperbolinen sini *sinus hyperbolicus* sinh, hyperbolinen kosini *cosinus hyperbolicus* cosh ja hyperbolinen tangentti tanh:

$$\begin{aligned}
\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
\cosh\colon \mathbf{R} \to [1,\infty[,\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh\colon \mathbf{R} \to]-1,1[,\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}$$

- Ominaisuuksia: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; kaikilla trigonometrisilla kaavoilla on hyperbolinen vastine, joka seuraa yhteyksistä $\sinh(ix) = i \sin x$, $\cosh(ix) = \cos x$. Kaavoissa $\sin^2$-termien merkki vaihtuu, muut pysyvät samoina.
- Derivaatat: $D \sinh x = \cosh x$, $D \cosh x = \sinh x$.

6.3 Hyperboliset funktiot II

- Hyperboliset käänteisfunktiot eli area-funktiot; area ja lyhenne ar viittaa käänteisfunktioiden geometriseen tulkintaan eräänä hyperbeliin liittyvänä pinta-alana:

$$\begin{aligned}\sinh^{-1} x &= \operatorname{ar}\,\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),\ x \in \mathbf{R}\\ \cosh^{-1} x &= \operatorname{ar}\,\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1\end{aligned}$$

- Käänteisfunktioiden derivaatat:

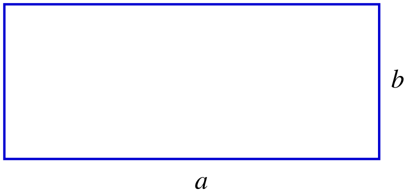
$$\begin{aligned}D\sinh^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbf{R}\\ D\cosh^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1\end{aligned}$$

7.1 Pinta-ala: Suorakulmio

Seuraavassa tarkastellaan umpinaisten tasokäyrien rajaamia joukkoja. Tasojoukon pinta-ala määritellään palauttamalla se yksinkertaisemman joukon pinta-alaan. Joukon pinta-alaa ei voi "laskea", ellei pinta-alaa ole ensin yleisesti määritelty (vaikka koulumatematiikassa näin yleensä menetelläänkin).

Lähtökohta: Suorakulmion pinta-ala on (määritelmän mukaan) *kanta* $\times$ *korkeus*:

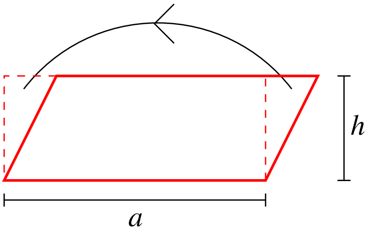
$$A = ab.$$



7.1 Suunnikas

Suunnikkaan pinta-ala on (määritelmän mukaan) *kanta* $\times$ *korkeus*:

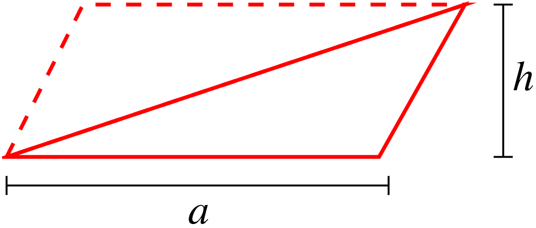
$$A = ah.$$



7.1 Kolmio

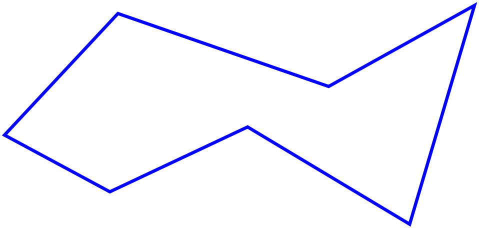
Kolmion pinta-ala on (määritelmän mukaan)

$$A = \frac{1}{2}ah.$$



7.1 Monikulmio

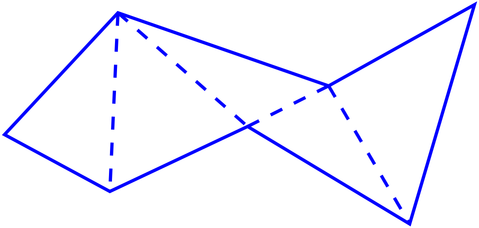
Monikulmio on tasoalue, jota rajaa umpinainen (ja itseään leikkaamaton) murtoviiva.



Murtoviiva koostuu peräkkäisistä janoista, joille
edellisen päätepiste = *seuraavan alkupiste*.
Se on **umpinainen**, jos
viimeisen päätepiste = *ensimmäisen alkupiste*.

7.1 Monikulmion pinta-ala

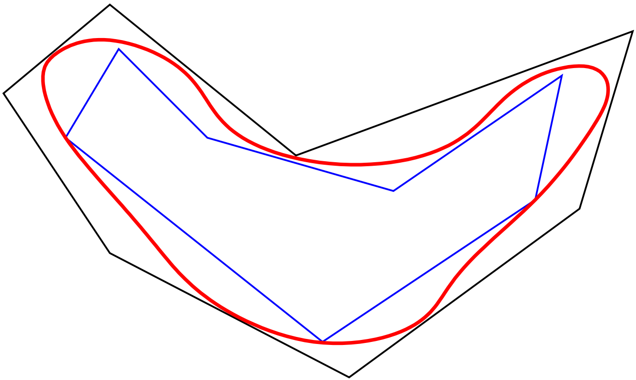
Monikulmion pinta-ala saadaan jakamalla monikulmio kolmioihin (= monikulmion kolmiointi) ja laskemalla kolmioiden pinta-alojen summa.



Lause: Kolmioiden pinta-alojen summa ei riipu kolmioinnin valinnasta.

7.1 Yleinen tasojoukko

Muodostetaan rajoitetulle tasoalueelle D sisämonikulmioita M_s ja ulkomonikulmioita M_u: $M_s \subset D \subset M_u$.



Aina pätee: $A(M_s) \leq A(M_u)$.

7.1 Pinta-alan määritelmä

Määritelmä 7.1

Rajoitetulla tasojoukolla D on pinta-ala, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sisämonikulmio M_s ja ulkomonikulmio M_u, joiden pinta-alojen erotus on pienempi kuin ε:

$$A(M_u) - A(M_s) < \varepsilon.$$

Tällöin kaikkien lukujen $A(M_s)$ ja $A(M_u)$ välissä on yksikäsitteinen luku $A(D)$, joka on (määritelmän mukaan) joukon D pinta-ala.

Yllätys: Vaikka joukkoa D rajoittaisi jatkuva umpinainen tasokäyrä, ei sillä aina ole pinta-alaa! Syy: Reunakäyrä voi olla niin "kiemurteleva", että sen "pinta-ala" > 0. Ensimmäinen esimerkki [W.F. Osgood, 1903].

7.1 Ympyrän pinta-ala

Esimerkki 7.2

Johda R-säteisen ympyrän pinta-alan kaava $A = \pi R^2$ tarkastelemalla sen sisä- ja ulkopuolelle asetettujen säännöllisten n-kulmioiden pinta-alojen raja-arvoja, kun $n \to \infty$.

Ratkaisu jätetään (vapaaehtoiseksi) harjoitustehtäväksi; siinä tarvitaan mm. raja-arvoa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

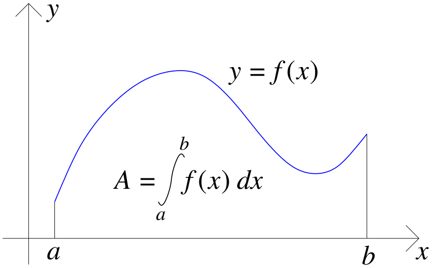
8.1 Määrätty integraali I

Geometrinen tulkinta: Funktiolle $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ pätee $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$. Kuinka suuren pinta-alan käyrä $y = f(x)$ rajaa yhdessä x-akselin kanssa välillä $[a,b]$?

Vastauksen tähän kysymykseen antaa **määrätty integraali**

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

jonka määritelmässä ehtoa $f(x) \geq 0$ ei tosin tarvita lainkaan.



8.1 Määrätty integraali II

- Tällä kurssilla integraali määritellään kaikille paloittain jatkuville funktioille; yleisemmin sitä voidaan tutkia myös rajoitettujen funktioiden tapauksessa, jolloin puhutaan **Riemann-integraalista**.
- Paloittain jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia, mutta toisaalta kaikki rajoitetut funktiot eivät ole. Tämä hankaloittaa yleisen tapauksen käsittelyä.
- Vielä yleisempi integraalin käsite on **Lebesgue-integraali**, jota käsitellään kurssilla MS-E1280 Measure and integral. Sen avulla voidaan mm. systemaattisesti selvittää, millaisille tasojoukoille pinta-ala voidaan järkevällä tavalla määritellä.

8.1 Jatkuvan funktion integraali I

Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva. Välin $[a,b]$ jakoon

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

liittyy sitä vastaava funktion f yläsumma

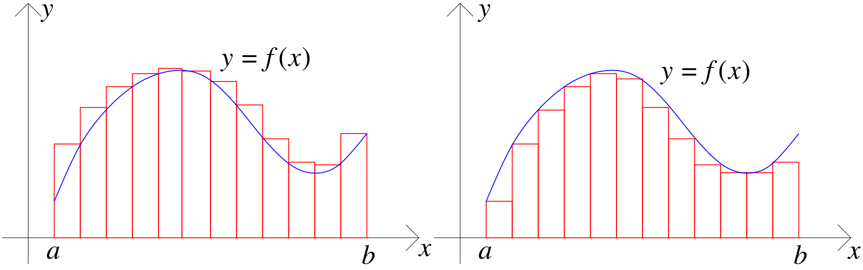
$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),\ M_k = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\},$$

ja alasumma

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),\ m_k = \min\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Nämä ovat positiivisen funktion tapauksessa erään ulko- ja sisämonikulmion (= pylväsdiagrammit) pinta-aloja.

8.1 Jatkuvan funktion integraali II



Punaisten pylväiden pinta-alojen summa on (tasavälistä jakoa vastaava) yläsumma S vasemmanpuoleisessa kuvassa ja alasumma s oikeanpuoleisessa kuvassa.

Aina pätee:
(i) Kun jakopisteitä lisätään (sanotaan: jakoa tihennetään), niin s kasvaa ja S pienenee;
(ii) $s \leq S$, vaikka ne laskettaisiin eri jakopisteillä.
Perustelu: (i) Kuviosta (tai muulla tavoin) nähdään, miten ala- ja yläsumma muuttuvat, kun lisätään yksi jakopiste.
(ii) Jos ylä- ja alasumman laskemiseen käytetään samoja jakopisteitä, niin väite on selvä, koska $m_k \leq M_k$ kaikilla k. Jos jakopisteet eivät ole samat, niin tarkastellaan tihennettyä jakoa ottamalla mukaan molempien jakojen kaikki pisteet. Tämän jälkeen väite seuraa kohdasta (i).

8.1 Integraalin määritelmä

Määritelmä 8.1

Funktio f on integroituva välillä $[a, b]$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen jako, jossa

$$S - s < \varepsilon.$$

Funktion f integraali $I \in \mathbf{R}$ on tällöin se yksikäsitteinen luku, jolle $s \leq I \leq S$ kaikissa jaoissa; merkitään

$$\int_a^b f(x)\, dx = I.$$

Positiivisen funktion tapauksessa tämä vastaa täsmälleen sitä vaatimusta, että jakoihin liittyvien pylväsdiagrammien avulla lasketut ulko- ja sisämonikulmioiden pinta-alat saadaan "mielivaltaisen" lähelle toisiaan, kun valitaan riittävän tiheä jako.

Lause 8.2

Integraali on määritelty kaikille jatkuville funktioille ja se voidaan laskea raja-arvona

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

käyttämällä tasavälisiä jakopisteitä $x_k = a + k\Delta x$, *jossa* $\Delta x = (b-a)/n$ *on askelpituus ja* $0 \le k \le n$.

Yleisemmin: Edellisessä summassa arvon $f(x_k)$ tilalla voi olla mikä tahansa arvo $f(z_k)$, kun $x_{k-1} \le z_k \le x_k$, eikä jaon tarvitse olla tasavälinen. Ainoa vaatimus: Jakovälien max-pituus $\to 0$, kun $n \to \infty$. Tässä tapauksessa puhutaan integraalin laskemisesta **Riemannin summien** avulla. Monissa sovelluksissa integraaliin päädytään juuri Riemannin summien kautta.

8.1 Integroituvuus II

Integroituvuuden perustelu: Yleinen tapaus on hieman hankala, joten käsittelemme vain erikoistapauksen: Oletetaan, että on olemassa sellainen vakio $L \geq 0$, että $|f'(x)| \leq L$ kaikilla $x \in]a, b[$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan niin tiheä tasavalinen jako, että $\Delta x < \varepsilon / L(b-a)$. Olkoon $f(y_k) = m_k$ ja $f(z_k) = M_k$ sopiville pisteille $y_k, z_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Väliarvolauseen perusteella

$$M_k - m_k = f'(c_k)|z_k - y_k| \leq L\,\Delta x < \varepsilon/(b-a).$$

Tämän jaon ylä- ja alasumman erotukselle pätee

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x < \varepsilon/(b-a) \sum_{k=1}^{n} \Delta x = \varepsilon.$$

Koska tämä on voimassa kaikilla $\varepsilon > 0$, niin integroituvuus seuraa.

8.1 Sopimuksia

Sopimus:

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x)\,dx &= 0,\\ \int_b^a f(x)\,dx &= -\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Tällöin pätee

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

kaikilla a, b, c järjestyksestä riippumatta (Piirrä kuvio!).

8.1 Paloittain jatkuva funktio

Määritelmä 8.3

Funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ on paloittain jatkuva, jos sillä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia

$$a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_m \leq b,$$

joissa kaikissa toispuoliset raja-arvot ovat olemassa ja äärellisiä (ts. $\pm\infty$ ei sallita).

Määritelmästä seuraa, että jokaisella yksittäisellä välillä $[c_{k-1}, c_k]$ funktio f voidaan muokata jatkuvaksi muuttamalla päätepistearvoiksi ko. toispuoliset raja-arvot.

Määritelmä 8.4

Jos $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on paloittain jatkuva, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx,$$

kun käytetään edellisen sivun merkintöjä, $c_0 = a$, $c_{m+1} = b$ ja f tulkitaan jatkuvaksi jokaisella välillä $[c_{k-1}, c_k]$ erikseen.

Käytännössä integraalin laskeminen täytyy tehdä useammassa osassa yllä olevan kaavan tapaan myös silloin, kun funktio f on määritelty paloittain (jatkuvuudesta riippumatta).

8.2 Integraalin ominaisuuksia

Paloittain jatkuvien funktioiden integraalille pätee

- Lineaarisuus: Jos $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, niin

$$\int_a^b \big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\big)\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Positiivisuus: Jos $h(x) \geq 0$ kaikilla x, niin $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \geq 0.$
- Yleisemmin: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- Erityisesti: Koska $\pm f(x) \leq |f(x)|$, niin

$$\pm \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8.2 Diff-int-laskennan peruslause I

Lause 8.5

Keskiarvoperiaate: Jos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *on jatkuva, niin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \ \ \textit{jollakin } c \in [a, b], \ \textit{ts.}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \overline{f} = \textit{funktion } f \ \textit{keskiarvo välillä } [a, b].$$

Perustelu seuraavalla kalvolla.

Keskiarvoperiaatteen perustelu: Olkoot m ja M funktion f minimi ja maksimi välillä $[a, b]$. Kun integraalin määritelmässä käytetään vain yhtä jakoväliä $[a, b]$, niin vastaavat alasumma on $m(b-a)$ ja yläsumma $M(b-a)$. Tästä seuraa, että

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Luku $\overline{f}$ on siis jatkuvan funktion minimin ja maksimin välissä, joten se on funktion arvo $f(c)$ jollakin $c \in [a, b]$.

8.2 Diff-int-laskennan peruslause III

Lause 8.6

Analyysin peruslause: *Jos* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *on jatkuva, niin*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

kaikilla $x \in \,]a, b[$.

Perustelu seuraavalla kalvolla.

Perustelu: Merkitään $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Jos $x, x+h \in]a,b[$, niin keskiarvoperiaatteen mukaan jollakin $c \in [x, x+h]$ pätee

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{h} f(c)(x+h-x) \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

Kun $h \to 0$, niin $c \to x$ ja jatkuvuuden nojalla $f(c) \to f(x)$. Väite seuraa tästä.

8.2 Integraalifunktio I

Määritelmä 8.7

Jos $F'(x) = f(x)$ jollakin avoimella välillä, niin F on funktion f **integraalifunktio**.

- Peruslauseen mukaan kaikilla jatkuvilla funktioilla f on integraalifunktio
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$
Sitä ei aina voida esittää alkeisfunktioiden avulla, vaikka f olisi alkeisfunktio; esim. $f(x) = e^{-x^2}$. Tällaisia integraalifunktioita (ja muita vastaavia) kutsutaan **erikoisfunktioiksi**.

8.2 Integraalifunktio II

- Integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen, mutta eri integraalifunktiot poikkeavat toisistaan vain vakiolla; merkitään

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \;\; C \in \mathbf{R} \;\; \text{vakio},$$

jos $F'(x) = f(x)$.
Perustelu: Jos $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ kaikilla x, niin funktion $F_1(x) - F_2(x)$ derivaatta on identtisesti nolla, joten se on vakio.

Lause 8.8

Jos $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin sen määrätty integraali voidaan laskea (päätepisteissäkin jatkuvan) integraalifunktion G avulla:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathop{/}_{a}^{b} G(x) = G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Perustelu: Koska myös $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on funktion f integraalifunktio, niin jatkuvuuden nojalla $F(x) - G(x) = C =$ vakio välillä $x \in [a,b]$. Sijoittamalla $x = a$ saadaan $C = -G(a)$. Näin ollen

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) = G(x) - G(a),$$

josta väite seuraa sijoittamalla $x = b$.

8.2 Integraalifunktio IV

Tärkeimmät integraalifunktiot saadaan suoraan derivoimissäännöistä:

$$\begin{aligned}
\int x^r\,dx &= \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ \ r \neq -1 \\
\int x^{-1}\,dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x\,dx &= e^x + C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C
\end{aligned}$$

Esimerkki 8.9

Laske integraalit $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$ ja $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin(\pi x)\,dx$.

Ratkaisu: Ensimmäinen integraalifunktio on $-e^{-x}$, joten integraalin arvo on

$$\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = -e^{-1} + e^{1} = 2\sinh 1.$$

Toinen integraalifunktio on $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$, joten integraalin arvo on

$$\int_{0}^{1} \sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Esimerkki 8.10

Laske integraali $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$.

Ratkaisu: Integraalifunktion oikea muoto voisi olla $F(x)=a(25-9x^2)^{1/2}$; tarkistetaan kerroin a derivoimalla:

$$D\big(a(25-9x^2)^{1/2}\big)=a\cdot\frac{1}{2}\cdot(-18x)(25-9x^2)^{-1/2}=\frac{-9ax}{\sqrt{25-9x^2}},$$

joten valinnalla $a=-1/9$ saadaan oikea integraalifunktio. Näin ollen

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx=-\frac{1}{9}\Big/_0^1(25-9x^2)^{1/2}=-\frac{1}{9}\big(\sqrt{16}-\sqrt{25}\,\big)=\frac{1}{9}.$$

Toinen tapa: Käytetään myöhemmin käsiteltävää *sijoitusmenetelmää*.

Peruslauseen avulla saadaan seuraava yleisempi derivoimiskaava:

Lause 8.11

Jos f on jatkuva ja funktiot a ja b ovat derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x).$$

Perustelu: Olkoon F funktion f integraalifunktio. Tällöin

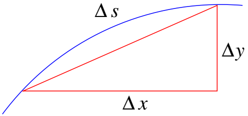
$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big).$$

Väite seuraa tästä käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä, koska $F' = f$.

8.3 Geometrisia sovelluksia I

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x)\,dx$ on funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Yleisemmin: $\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$



Idea: Lyhyellä välillä $[x, x + \Delta x]$ kaarenpituusalkio on muotoa $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2}\,\Delta x \approx \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\Delta x$.

8.3 Geometrisia sovelluksia II

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

  Idea: Kun pieni pala kuvaajaa (kaarenpituus Δs) pyörähtää, niin vastaava pinta-alkio pyörähdyspinnalla on

$$\Delta A \approx \text{piiri} \cdot \text{leveys} = 2\pi |f(x)| \cdot \Delta s.$$

  Tarkempi arvio saadaan approksimoimalla pinta-alkiota katkaistulla kartiolla, mutta se johtaa samaan lopputulokseen.

- Jos kappaletta leikataan yz-tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on

$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$

8.3 Geometrisia sovelluksia III

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Syy: Poikkileikkaus kohdassa x on $f(x)$-säteinen ympyrä, joten $A(x) = \pi f(x)^2$.

- Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin saadun kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx.$$

Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$.

- Kun monotoninen käyrä $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, pyörähtää y-akselin ympäri, niin vastaavan pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

8.4 Epäoleellinen integraali

Kaksi eri perustyyppiä:

- Tyyppi I: Integroimisvälinä $[a, \infty[$ tai $]-\infty, b]$ tai koko $\mathbf{R}$.
- Tyyppi II: Funktio $f\colon\ ]a,b[\to \mathbf{R}$ ei ole rajoitettu tai sillä ei ole toispuoleisia raja-arvoja päätepisteissä.
- Jos ongelmia on molemmissa päätepisteissä tai integroimisvälin sisällä, niin integroimisväli jaetaan niin moneen osaan, että kussakin osassa vain yksi ongelmakohta: vaaditaan, että jokainen erikseen antaa äärellisen tuloksen, jolloin koko integraali = osien summa.

Esimerkki 8.12

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

jos molemmat oikean puolen integraalit suppenevat (kuten myöhemmissä esimerkeissä osoitetaan).

8.4 Tyyppi I I

Määritelmä 8.13

Olkoon $f : [a, \infty[\to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva. Tällöin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion f **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $[a, \infty[$.

Vastaavasti funktiolle $f :]-\infty, b] \to \mathbf{R}$ määritellään

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^b f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen.

Esimerkki 8.14

Laske epäoleellinen integraali $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

Ratkaisu: Koska

$$\int_0^R e^{-x}\,dx = -\Big/_{\!0}^{R} e^{-x} = 1 - e^{-R} \to 1,$$

kun $R \to \infty$, niin epäoleellinen integraali suppenee ja

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Esimerkki 8.15

Funktiolle $f(x) = x$ pätee

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 0,$$

koska kaikki integraalit ovat nollia. Yleisemmin sama pätee kaikille parittomille funktioille $f(x)$.

Integraalin määritelmä koko reaaliakselin yli yllä olevaa raja-arvoa käyttämällä on periaatteessa mahdollinen, mutta johtaa hieman kummallisiin tuloksiin. Sille (ja muille samantapaisille variaatioille) käytetään nimitystä Cauchyn pääarvointegraali, mutta se ei ole integraalin "virallinen" määritelmä.

8.4 Integraali koko reaaliakselin yli II

Määritelmä 8.16

Jos $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on paloittain jatkuva, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx,$$

jos **molemmat** oikean puolen integraalit suppenevat.

Kuitenkin pätee: Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Syy: Positiivisen funktion tapauksessa ei voi tapahtua esimerkin 8.15 tapaista $\pm\infty$ kumoutumista, joka voi muuten sekoittaa asiaa. Tämä kaava **ei siis päde** yleisesti, vrt. tapaus $f(x) = x$.

8.4 Tyyppi II

Perustapaus $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva, mutta sillä ei äärellistä raja-arvoa, kun $x \to a+$. Tällöin määritellään

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo on olemassa ja äärellinen.

Esimerkki 8.17

Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Ratkaisu: Koska

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\Big/_{\varepsilon}^{1} \sqrt{x} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2,$$

kun $\varepsilon \to 0+$, niin integraali suppenee ja sen arvo on 2.

Epäoleellisen integraalin suppenemista voidaan tutkia majoranttiperiaatteen avulla, josta seuraavassa eräs versio.

Lause 8.18

Olkoon $|f(x)| \leq g(x)$ *välillä* $a < x \leq b$*. Jos epäoleellinen integraali*

$$I = \int_a^b g(x)\,dx$$

suppenee, niin myös

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee ja sen itseisarvo on korkeintaan I*.*

Esimerkki 8.19

Koska

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ välillä } 0 < x \leq 1$$

ja

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2.

Esimerkki 8.20

Vastaavasti

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} < \frac{1}{\sqrt{x}(0+x)} = \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ kun } x \geq 1.$$

Koska $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = 2$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2.

Huomataan: Sopivan majorantin valinta riippuu sekä funktiosta että integroimisvälistä!

8.5 Integroimismenetelmiä

Helpoimmat integraalit voi laskea suoraan peruskaavoja käyttämällä. Osa hankalammista tapauksista palautuu näihin, jos integraalista onnistuu tunnistamaan "sisäfunktion derivaatan".
Systemaattisempia menetelmiä ovat

- Osittaisintegointi
- Sijoitusmenetelmä
- Osamurtohajotelmat
- Numeerinen integrointi[2]

Näitä käsitellään seuraavilla sivuilla.

[2] Oheislukemista tällä kurssilla.

8.5 Osittaisintegrointi I

Lause 8.21

Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia funktioita välillä $[a, b]$ *(eli käytännössä hieman suuremmalla avoimella välillä). Tällöin*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \mathop{/}_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Vastaavasti integraalifunktioille pätee

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Perustelu: Tulon derivoimissääntö, integrointi ja termien ryhmittely.
Idea: Toimii silloin, kun funktion $f(x)g'(x)$ integrointi on helpompaa kuin alkuperäisen funktion $f'(x)g(x)$.

Esimerkki 8.22

Laske integraali

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx.$$

Ratkaisu: Kokeillaan osittaisintegrointia ja valitaan $f'(x) = \sin x$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = -\cos x$ (vakiota ei tässä tarvita, mutta ei se väärinkään ole) ja $g'(x) = 1$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= \Big/_{0}^{\pi} (-\cos x) \cdot x - \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot 1 \, dx \\ &= -\pi \cos \pi + 0 + \Big/_{0}^{\pi} \sin x = \pi. \end{aligned}$$

Huom: Jos f ja g valitaan esimerkissä toisin päin, niin osittaisintegrointi johtaa entistä hankalampaan integraaliin.

8.5 Sijoitusmenetelmä I

Lause 8.23

Jos f on jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva suljetulla välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du,$$

kun $A = g(a)$, $B = g(b)$.

Käytännössä: Sijoitus $u = g(x)$, jolloin

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

Rajojen muutos: $x = a \Rightarrow u = g(a) = A$, $x = b \Rightarrow u = g(b) = B$.
Perustelu: Seuraa yhdistetyn funktion derivoimissäännöstä integroimalla.
Huomaa, että sijoituksen jälkeen **ei tarvitse** enää palata alkuperäiseen muuttujaan x (paitsi integraalifunktiota laskettaessa; kts. alla).

Muunnos $u = g(x)$ voidaan (usein) kirjoittaa myös käänteisfunktion avulla:

$$\begin{aligned} x &= g^{-1}(u) \Rightarrow \\ dx &= (g^{-1})'(u)\,du = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(u)\big)}\,du = \frac{1}{g'(x)}\,du, \end{aligned}$$

joten tulos $du = g'(x)\,dx$ on sama kuin aikaisemmin. On suositeltavaa kirjoittaa muunnos aina molempiin suuntiin, koska rajojen laskeminen on helpompaa alkuperäistä muotoa käyttämällä, mutta differentiaalin muuttuminen on (yleensä) helpompi laskea käänteisen muodon avulla. (Adams & Essex -kirjassa nämä käsitellään erikseen kohdissa 5.6 ja 6.3, mikä on tavallaan turhaa.)

Esimerkki 8.24

Laske integraali $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$.

Ratkaisu: Neliöjuuri hankaloittaa integroimista, joten sijoitetaan $x = t^2$, kun $t \geq 0$. Tällöin $dx = 2t\,dt$ ja käänteisestä muodosta $t = \sqrt{x}$ saadaan (hieman helpommin): kun $x = 0$, niin $t = \sqrt{0} = 0$; kun $x = \pi^2$, niin $t = \sqrt{\pi^2} = \pi$. Näin ollen

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\pi} 2t\sin t\,dt = 2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = 2\pi.$$

(Viimeinen integraali laskettiin aikaisemmin osittaisintegroimalla esimerkissä 8.22)

8.5 Sijoitusmenetelmä IV

Myös integraalifunktio voidaan usein laskea sijoitusmenetelmän avulla, jolloin sijoituksen ja integroinnin jälkeen palataan takaisin alkuperäiseen muuttujaan x, toisin kuin määrätyn integraalin kohdalla.
Menetelmän idea tulee parhaiten esille konkreettisessa esimerkissä.

Esimerkki 8.25

Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Ratkaisu: Sijoitetaan $x = t^2$, $t > 0$, eli $t = \sqrt{x}$, jolloin saadaan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,dt = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$$

8.5 Osamurtohajotelma I

Kaikki rationaalifunktiot $R(x) = P(x)/Q(x)$ voidaan integroida osamurtohajotelmien avulla.
Ensimmäinen vaihe: Jakokulmassa jakamalla (tai muuten) palautetaan tilanne siihen, että $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Esimerkki 8.26

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} &= \frac{(x+1)-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \\
\frac{x^2}{x^2-1} &= \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} \\
\frac{x^3}{x^2-1} &= \frac{x^3-x}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

8.5 Osamurtohajotelma II

Osamurtohajotelmaa voidaan käyttää integroinnissa seuraavalla tavalla.

Esimerkki 8.27

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\,dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Toinen vaihe: Jaetaan nimittäjässä oleva polynomi $Q(x)$ joko 1. tai 2. asteen reaalisiin tekijöihin. Näin voidaan aina tehdä (ainakin periaatteessa); kts. Kompleksiluvut-moniste.

Suurimmassa osassa käytännön sovelluksia tarvitaan vain helpointa tulosta

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kun kertoimet A, B valitaan sopivalla tavalla.

8.5 Osamurtohajotelma III

Esimerkki 8.28

Muodosta lausekkeen $\dfrac{2x+3}{(x-4)(x+5)}$ osamurtohajotelma.

Ratkaisu: Hajotelma on muotoa

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella $(x-4)(x+5)$, jolloin saadaan

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-4).$$

Kertoimet A ja B saadaan tästä kahdella eri tavalla (seuraava kalvo): 1. tapa on usein nopeampi, mutta 2. tapa myös todistaa, että hajotelma on oikein. Jos hajotelman lähtökohta on puutteellinen, niin 1. tapa tuottaa väärän vastauksen, joka paljastuu 2. tavalla laskettaessa.

8.5 Osamurtohajotelma IV

$$\text{Yhtälö:} \quad 2x + 3 = A(x+5) + B(x-4).$$

Tapa 1: Sijoittamalla $x = 4$ saadaan $8 + 3 = A \cdot 9 + B \cdot 0$, joten $A = 11/9$. Sijoittamalla $x = -5$ saadaan $-10 + 3 = A \cdot 0 + B \cdot (-9)$, joten $B = 7/9$.

Tapa 2: Kirjoitetaan yhtälö muodossa $2x + 3 = (A+B)x + (5A - 4B)$ ja verrataan x:n kertoimia ja vakioita yhtälön eri puolilla. Näin saadaan yhtälöpari $A + B = 2$ ja $5A - 4B = 3$, josta saadaan $A = 11/9$ ja $B = 7/9$.

Huom: Polynomit ovat samat vain silloin, kun niillä on samat kertoimet. Huomaa, että tarkoituksena on valita kertoimet A, B niin, että yhtälö toteutuu kaikilla x.

8.5 Osamurtohajotelma V

Esimerkki 8.29

Muodosta lausekkeen $\dfrac{1}{x^2(x+3)}$ osamurtohajotelma.

Ratkaisu: Laskemalla (luotettavalla) tavalla 2 huomataan, että muotoa

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x^2}$$

oleva hajotelma ei toimi. Oikea hajotelma onkin muotoa

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}.$$

Kertomalla lausekkeella $x^2(x+3)$ saadaan yhtälö

$$1 = Ax^2 + B(x+3) + Cx(x+3) = (A+C)x^2 + (B+3C)x + 3B.$$

Kertoimia vertaamalla saadaan yhtälöt $A + C = 0$, $B + 3C = 0$ ja $3B = 1$, joista ratkeaa helposti $B = 1/3$, $C = -1/9$ ja $A = 1/9$.

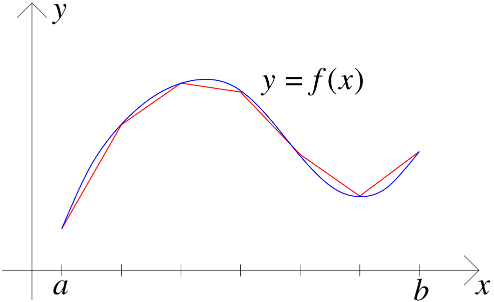
8.5 Numeerinen integrointi* I

Hankalien integraalien likiarvoja voidaan joskus laskea Taylor-polynomien avulla. Tämä edellyttää kuitenkin sitä, että integroitava funktio on annettu jonkin lausekkeen avulla. Joissakin sovelluksissa funktiosta tunnetaan vain sen arvot tietyissä pisteissä: $y_k = f(k\Delta x)$ (esim. mittausdata). Tällöin integraalilla ei ole mitään yksiselitteistä oikeaa arvoa, mutta sitä voidaan approksimoida seuraavilla menetelmillä. Niitä voidaan tietysti käyttää myös hankalien integraalien likiarvon laskemisessa.

- Yksinkertaisin tapa on puolisuunnikas- eli trapetsisääntö, jossa funktion kuvaajaa approksimoidaan murtoviivalla:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right),$$

jossa $h = (b-a)/n$ on askelpituus, $n \in \mathbf{N}$ jakovälien lukumäärä, $x_k = a + kh$, $0 \le k \le n$, ovat jakopisteet ja $y_k = f(x_k)$.

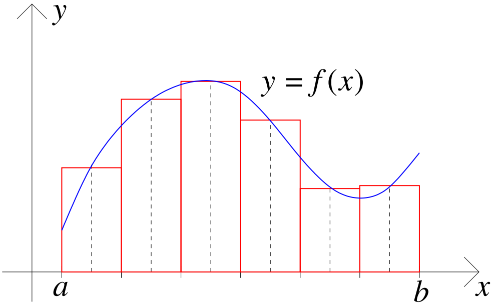


8.5 Numeerinen integrointi* III

Muita approksimaatioita ovat mm.

- Keskipistesääntö ("pylväsdiagrammi-approksimaatio")

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)),$$
$$m_k = (x_{k-1} + x_k)/2,$$

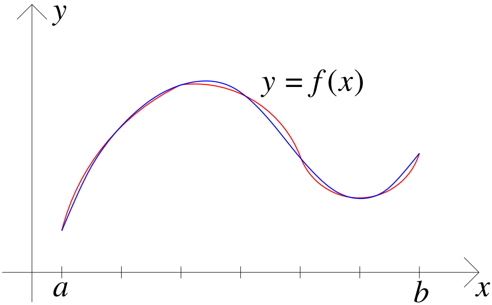


8.5 Numeerinen integrointi* IV

- Simpsonin sääntö

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n),$$

jossa funktiota interpoloidaan 2. asteen polynomilla kahdella peräkkäisellä jakovälillä; jakovälien lukumäärän n täytyy olla parillinen.



9.1 Differentiaaliyhtälö

- Differentiaaliyhtälö (lyh. DY, engl. ODE = Ordinary Differential Equation) on yhtälö, joka sisältää tuntemattoman funktion, esimerkiksi $y = y(x)$, ja sen derivaattoja $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$.
- Differentiaaliyhtälön **kertaluku** on korkeimman yhtälössä esiintyvän derivaatan kertaluku n.

Esimerkki 9.1

(i) Differentiaaliyhtälön $y' + 3y = \sin(x)$ kertaluku on 1.
(ii) Differentiaaliyhtälön $y'' + 5y' - 6y = e^x$ kertaluku on 2.

DY:ssä esiintyvän funktion muuttujaa ei yleensä kirjoiteta näkyviin: ajatellaan, että DY määrää funktion $y = y(x)$ implisiittisesti.
Vertaa: Ympyrän yhtälö $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = y(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

- Tarkemmin: Kertalukua n oleva differentiaaliyhtälö funktiolle $y(x)$ on muotoa
$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{2}$$
kun F on jokin $(n+2)$:sta muuttujasta riippuva lauseke.
- DY:illä mallinnetaan jatkuvalla tavalla muuttuvia ilmiöitä, jonka vuoksi muuttuja x on yleensä jollakin avoimella välillä $I \subset \mathbf{R}$.
- Lisäksi yhtälöön voi liittyä alku- tai reunaehtoja tämän välin päätepisteissä.
- DY:n (2) ratkaisu on sellainen n kertaa derivoituva funktio $y(x)$, jolle yhtälö (2) toteutuu kaikilla $x \in I$. Huomaa kuitenkin: Eri ratkaisuilla voi olla erilainen määrittelyväli I.

9.1 Differentiaaliyhtälön ratkaisu II

Esimerkki 9.2

Differentiaaliyhtälön $xy^2 + y' = 0$ kertaluku on 1. Sen ratkaisuja ovat mm.

- $y_0(x) = 0,\ x \in \mathbf{R}$; ("triviaaliratkaisu")
- $y_1(x) = 2/x^2,\ x > 0$;
- $y_2(x) = 2/x^2,\ x < 0$;
- $y_3(x) = 2/(x^2+3),\ x \in \mathbf{R}$.

Ratkaisujen tarkistamiseen riittää derivointi ja sijoitus yhtälöön.

Varsinainen ongelma on tietysti käänteinen: Miten ratkaisut löydetään? Tähän ei ole olemassa mitään yleispätevää menetelmää edes 1. kertaluvun DY:ille! Sen vuoksi jatkossa tarkastellaan sellaista tyyppiä olevia yhtälöitä, joille ratkaisun lauseke voidaan selvittää. Näitä DY-tyyppejä esiintyy myös monissa käytännön sovelluksissa!

Esimerkki 9.3

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä $\sin(y' + y) = 2$ ei ole lainkaan ratkaisuja.

Jos 1. kertaluvun DY voidaan kirjoittaa muotoon $y' = f(x, y)$, niin tilanne muuttuu: Alkuehdon $y(x_0) = y_0$ toteuttavia ratkaisuja on yleensä täsmälleen yksi, ja vaikkei sen lauseketta voida aina muodostaa, saadaan silloinkin ratkaisun likiarvoja ja ratkaisun kuvaaja (eli ratkaisukäyrä) selville numeerisia menetelmiä käyttämällä.

On syytä muistaa, että useimmissa sovelluksissa ratkaisun eksplisiittinen lauseke ei ole lainkaan tarpeen: kuvaaja tms. riittää hyvin!

9.1 Suuntakenttä I

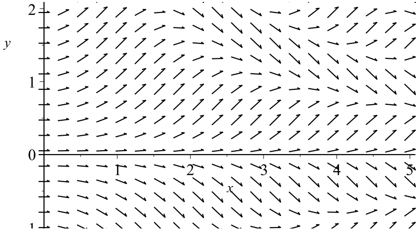
Differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ geometrinen tulkinta:

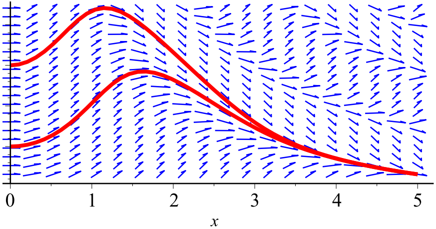
- Jos ratkaisukäyrä $y = y(x)$ kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta, niin yhtälön mukaan $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$, ts. ratkaisukäyrien tangenttien kulmakertoimia voidaan laskea suoraan yhtälöstä, vaikka ratkaisuja ei tunneta!
- Yhtälöä voidaan siis havainnollistaa xy-tason vektorikentällä $\mathbf{i} + f(x_k, y_k)\mathbf{j}$, kun se piirretään sopiviin hilapisteisiin (x_k, y_k).
- Ratkaisukäyrät ovat sellaisia käyriä, jotka mahdollisimman hyvin seuraavat tätä vektorikenttää, ja periaatteessa näitä käyriä voi piirtää hyvin alkeellisilla välineillä.

Esimerkki 9.4

Hahmotellaan differentiaaliyhtälön $y' = \sin(xy)$ ratkaisukäyriä suuntakentän avulla.

Esim: $x_0 = 1,\ y_0 = \pi/2 \Rightarrow y'(1) = \sin(1 \cdot \pi/2) = 1.$





9.2 Separoituva DY I

Aikaisemmin käsitelty DY $y' = ky$ on helpoin tapaus separoituvasta DY:stä, jonka yleinen muoto on

$$y' = f(x)g(y).$$

Tässä f ja g ovat jatkuvia yhden muuttujan funktioita.
(Huom: Funktion f merkitys ei ole sama kuin yleisessä muodossa $y' = f(x, y)$.)

Separoituvaa tyyppiä olevalle DY:lle on olemassa systemaattinen ratkaisumenetelmä, mutta välivaiheissa voi tulla ongelmia hankalien integraalien tai käänteisfunktioiden vuoksi.

9.2 Separoituva DY II

Käytännössä separoituva DY ratkaistaan seuraavalla tavalla, joka voidaan myös perustella täsmällisesti. (Välivaiheet ovat konkreettisissa laskuissa selvästi yksinkertaisemmat kuin näillä yleisillä merkinnöillä!)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad H(y) = F(x) + C \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = H^{-1}(F(x) + C).
\end{aligned}
$$

Tässä on H on funktion $h(s) = 1/g(s)$ integraalifunktio.
Tuloksena saadaan DY:n yleinen ratkaisu, jossa on mukana vakio $C \in \mathbf{R}$.

9.2 Separoituva DY III

Jos mukana on alkuehto $y(x_0) = y_0$, niin voidaan oikaista ilman yleistä ratkaisua:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \\
&\Leftrightarrow \quad H(y) - H(y_0) = F(x) - F(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = H^{-1}\big(F(x) - F(x_0) + H(y_0)\big).
\end{aligned}
$$

Toinen tapa: Kiinnitetään yleisen ratkaisun vakio C alkuehdon avulla.

Huom: Molemmissa tavoissa integroidaan yhtälön vasen ja oikea puoli eri muuttujien suhteen! Separointimenetelmän oikeutus voidaan perustella täsmällisesti ilman dy/dx-pyörittelyä sopivan muuttujanvaihdon avulla (luennot).

Esimerkki 9.5

Ratkaise DY $y' = x/y$ sekä yleisesti että alkuehdolla $y(0) = 5$.

Ratkaisu: DY on separoituva: $f(x) = x$ ja $g(y) = 1/y \neq 0$. Saadaan siis

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{y} \quad &\Leftrightarrow \quad y\,dy = x\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int y\,dy = \int x\,dx + C \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \\
&\Leftrightarrow \quad y = y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2C}.
\end{aligned}
$$

Jos $y(0) = 5$, niin $\pm\sqrt{0 + 2C} = 5$, joten täytyy valita $+$-merkki ja lisäksi $2C = 25$. Ratkaisuksi saadaan

$$
y(x) = \sqrt{x^2 + 25}, \; x \in \mathbf{R}.
$$

9.2 Separoituva DY V

Esimerkki 9.6

Ratkaise DY $y' = x/y$ alkuehdolla $y(0) = 5$.

Ratkaisu: Jos yleistä ratkaisua ei tarvita, niin alkuehto voidaan ottaa huomioon jo integroinnissa.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{y} \quad & \Leftrightarrow \quad y\,dy = x\,dx \\
& \Leftrightarrow \quad \int_5^y s\,ds = \int_0^x t\,dt \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(y^2 - 25) = \frac{1}{2}(x^2 - 0) \\
& \Leftrightarrow \quad y = y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 25}.
\end{aligned}
$$

Lopuksi täytyy vielä alkuehdon $y(0) = 5 > 0$ perusteella valita $+$-merkki. Huomaa, että symboleita x ja y ei tässä tavassa kannata käyttää integroimismuuttujina, koska ne esiintyvät integraalien ylärajoina.

9.2 Separoituvan DY:n erikoisratkaisut I

- Separoimalla lasketusta yleisestä ratkaisusta jää yleensä pois sellaisia ratkaisuja, jotka liittyvät funktion $g(y)$ nollakohtiin. Syy: Lausekkeella $g(y(x))$ jakaminen edellyttää, ettei se ole nolla.
- Jokaista funktion g nollakohtaa α vastaa DY:n $y' = f(x)g(y)$ vakioratkaisu $y(x) \equiv \alpha$, koska tällöin $y'(x) \equiv 0 = g(\alpha) \equiv g(y(x))$.
- Näitä ratkaisuja kutsutaan yhtälön triviaali- tai erikoisratkaisuiksi.
- Mikäli seuraavan lauseen ehdot ovat voimassa, niin separoituvan DY:n kaikki ratkaisut saadaan joko yleisestä ratkaisusta tai erikoisratkaisuista.

9.2 Separoituvan DY:n erikoisratkaisut II

Lause 9.7

Tarkastellaan alkuarvotehtävää $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$.
(i) Jos f *on jatkuva (kahden muuttujan funktio), niin ainakin yksi alkuehdon toteuttava ratkaisu on olemassa jollakin pisteen* x_0 *sisältävällä välillä.*
(ii) Jos lisäksi f *on jatkuvasti derivoituva muuttujan* y *suhteen, niin alkuehdon toteuttava ratkaisu on yksikäsitteinen.*
(iii) Yksikäsitteisyys on voimassa myös silloin, kun kohdan (i) lisäksi f *on jatkuvasti derivoituva muuttujan* x *suhteen ja* $f(x_0, y_0) \neq 0$.

Lauseen todistus perustuu ns. Picard-Lindelöf-iterointiin, jonka muotoiluun osallistui suomalainen matemaatikko Ernst Lindelöf (1870-1946).

9.2 Separoituvan DY:n erikoisratkaisut III

Separoituville yhtälöille saadaan lauseen perusteella seuraava tulos.

Lause 9.8

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y' = f(x)g(y)$, *kun* f *on jatkuva ja* g *jatkuvasti derivoituva.*
(i) Jokaista funktion g *nollakohtaa* α *vastaa triviaaliratkaisu* $y(x) \equiv \alpha =$ *vakio.*
(ii) Yhtälön kaikki muut ratkaisut (= yleinen ratkaisu) saadaan yllä esitetyllä tavalla separoimalla muuttujat ja integroimalla.

Lauseen perustelu seuraa alla olevista kohdista, jotka ovat voimassa yleisemminkin lauseen 9.7(ii) tilanteessa:

- Yhtälön ratkaisukäyrät (ratkaisujen kuvaajat, integraalikäyrät) eivät koskaan "pääty kesken", vaan ne joko törmäävät yhtälön määrittelyalueen reunaan tai katovat $\pm$ äärettömyyteen.

9.2 Separoituvan DY:n erikoisratkaisut IV

- Yhtälön määrittelyalueen jokaisen pisteen (x_0, y_0) kautta kulkee yksikäsitteinen ratkaisukäyrä.
- Erityisesti: ratkaisukäyrät eivät voi leikata toisiaan eikä yksittäinen ratkaisukäyrä voi haarautua kahteen tai useampaan osaan.
- Separoituvan DY:n muut ratkaisukäyrät eivät siis voi leikata triviaaliratkaisukäyriä $y = \alpha$, joten kaikille muille ratkaisuille ehto $g(y(x)) \neq 0$ on automaattisesti voimassa!

Esimerkki 9.9

Ratkaise DY $y' + p(x)y = 0$ separointimenetelmän avulla.

Ratkaisu: Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y_0(x) \equiv 0$. Muut ratkaisut eivät saa arvoa 0, joten niille pätee:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y' = -p(x)y \\
\Leftrightarrow \quad & \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + C_1 \\
\Leftrightarrow \quad & \ln|y| = -P(x) + C_1 \\
\Leftrightarrow \quad & |y| = e^{C_1 - P(x)} \\
\Leftrightarrow \quad & y = y(x) = \pm e^{C_1} e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}.
\end{aligned}
$$

Tässä lauseke $\pm e^{C_1}$ on korvattu yksinkertaisemmalla vakiolla $C \in \mathbf{R}$ (triviaaliratkaisu $\Rightarrow$ myös $C = 0$ käy).

9.3 Lineaarinen 1. kertaluvun DY II

Yleinen lineaarinen 1. kertaluvun DY $y' + p(x)y = r(x)$ on harvinainen tapaus DY:iden maailmassa: sille voidaan johtaa ratkaisukaava! Oletetaan, että $p(x)$ ja $r(x)$ ovat jatkuvia jollakin välillä $x \in I$.

- Valitaan jokin integraalifunktio $P(x) = \int p(x)\,dx$ ja kerrotaan yhtälö puolittain **integroivalla tekijällä** $e^{P(x)}$.
  Idea: Edellisen esimerkin perusteella tämä operaatio kumoaa DY:n ratkaisun eksponentiaalisen osan ainakin tapauksessa $r(x) \equiv 0$.
- Tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$y'(x)e^{P(x)}+y(x)p(x)e^{P(x)} = r(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(y(x)e^{P(x)}\right) = r(x)e^{P(x)}.$$

- Tästä integroimalla saadaan

$$y(x)e^{P(x)} = \int r(x)e^{P(x)}\,dx + C.$$

9.3 Lineaarinen 1. kertaluvun DY III

- Näin saadaan yleinen ratkaisu

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int r(x)e^{P(x)}\, dx.$$

- Kaikkiin välivaiheisiin voi kirjoittaa $\Leftrightarrow$, joten ratkaisukaava antaa kaikki mahdolliset ratkaisut ja ne on määritelty välillä I.
- Huom: Integraalifunktiossa $P(x)$ ei tarvita vakiota, koska se muuttaisi ainoastaan ratkaisukaavan vakiota C.
- Ratkaisukaavaa ei kannata opetella ulkoa; vain menetelmän idea!

Esimerkki 9.10

Ratkaise DY $xy' - 2y = 2$ alkuehdolla a) $y(1) = 0$; b) $y(0) = 0$.

Ratkaisu: Muodosta $y' - (2/x)y = 2/x$ nähdään, että kyseessä on lineaarinen DY. Sen integroiva tekijä on

$$e^{-\int (2/x)\,dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln(1/x^2)} = \frac{1}{x^2}.$$

Tällä kertomalla päästään muotoon

$$(1/x^2)y'(x) - (2/x^3)y(x) = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3},$$

joten $y(x) = x^2(-1/x^2 + C) = Cx^2 - 1$ on DY:n yleinen ratkaisu. Alkuehdosta $y(1) = 0$ saadaan $C = 1$, mutta alkuehdosta $y(0) = 0$ seuraa ristiriita $-1 = 0$. Ratkaisu on siis a-kohdassa $y(x) = x^2 - 1$, mutta b-kohdan alkuehdon toteuttavaa ratkaisua ei ole.
(Mieti, miksei tulos ole ristiriidassa yleisen teorian kanssa!)

9.3 Eulerin menetelmä I

- Tehtävänä on määrittää yhtälön $y' = f(x, y)$ ja alkuehdon $y(a) = y_0$ toteuttavan ratkaisun likiarvo pisteessä $x = b$.
- Käytännössä vastaavia likiarvoja täytyy laskea useissa välin $[a, b]$ pisteissä, joten niiden avulla voidaan myös hahmotella ratkaisun kuvaaja.
- Valitaan askelten lukumäärä n, joka määrää **askelpituuden** $h = \Delta x = (b - a)/n$.
- Määritellään välin $[a, b]$ tasaväliset jakopisteet $x_k = a + kh$, $0 \leq k \leq n$, jolloin $x_0 = a$ ja $x_n = b$.
- Jokaista jakopistettä vastaa tarkan ratkaisun approksimaatio $y_k \approx y(x_k)$, joista ainoastaan $y_0 = y(x_0) = y(a)$ tunnetaan.

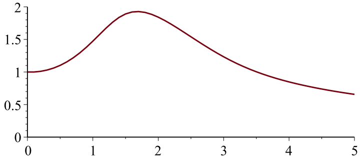
9.3 Eulerin menetelmä II

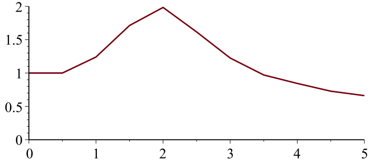
- Kuvion perusteella pisteestä (x_k, y_k) kannattaa edetä ratkaisukäyrän tangentin suuntaan, joten seuraava approksimaatio lasketaan edellisen avulla muodossa $y_{k+1} = y_k + hy'(x_k) = y_k + hf(x_k, y_k)$, $0 \leq k \leq n-1$.
- Tällöin siis $y_n \approx y(b)$ ja approksimaation tarkkuus näyttäisi paranevan jakovälien lukumäärän n kasvaessa. Eulerin menetelmä voidaan siis kiteyttää palautuskaavaan

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \ 0 \leq k \leq n-1.$$

Eulerin menetelmä differentiaaliyhtälölle $y' = \sin(x \cdot y)$

```
> x[0] := 0 : y[0] := 1 : n := 50 :  dx := 5.0/n : # askelpituus on siis 0,1
> for k from 0 to n − 1 do
   x[k + 1] := x[k] + dx;
   y[k + 1] := y[k] + dx·sin(x[k]·y[k])
  od:
> plot([seq([x[k], y[k]], k = 0 ..n)], view = [0 ..5, 0 ..2], scaling = constrained)
```





Vasemmalla askelpituus $h = \Delta x = 0{,}1$, oikealla $h = 0{,}5$.

10.1 Lineaarinen DY

Käytännössä hyvin harvoja korkeamman kertaluvun DY:itä voidaan ratkaista eksplisiittisesti, elleivät ne ole lineaarisia.

- Kertalukua n oleva lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x),$$

  jossa jatkuvat funktiot $a_k(x)$ ja $r(x)$ tunnetaan.
- Yhtälö on **homogeeninen** (lyh. HY), jos $r(x) \equiv 0$, muuten **epähomogeeninen** (lyh. EHY).
- Se on **vakiokertoiminen**, jos jokainen $a_k(x) =$ vakio; sen sijaan funktion $r(x)$ ei tarvitse olla vakio.
- Huom: Kerroin $a_n(x)$ voidaan jakaa pois, mutta sen nollakohdat vaikuttavat usein ratkaisun määrittelyjoukkoon.

Oletetaan, että kerroinfunktiot $a_k(x)$ ovat jatkuvia välillä $x \in I$ ja $a_n(x) \neq 0$ välillä $x \in I$. Lineaarisen homogeenisen DY:n ratkaiseminen perustuu seuraaviin kohtiin:

(i) Jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön ratkaisuja, niin myös $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ on ratkaisu, kun C_1, C_2 ovat vakioita. Sama yleistyy myös useammalle ratkaisulle, eli ratkaisujen lineaarikombinaatiot ovat ratkaisuja.

(ii) Yhtälöllä on välillä I määritellyt **perusratkaisut** $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, joiden avulla kaikki muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

kun $C_1, \ldots, C_n$ ovat vakioita. Sanotaan: $y_1, \ldots, y_n$ muodostavat **perusjärjestelmän**.

(iii) Ratkaisusta tulee yksikäsitteinen, jos vaaditaan **alkuehdot** $y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$.

(iv) Jollakin tavalla löydetyt ratkaisut $y_1(x), \dots, y_n(x)$ muodostavat perusjärjestelmän, jos ne ovat **lineaarisesti riippumattomia** välillä I.

Määritelmä 10.1

Välillä $I \subset \mathbf{R}$ määritellyt funktiot $y_1, \dots, y_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia (LRT), jos pätee:

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Kahden funktion $y_1,\ y_2$ tapauksessa LRT tarkoittaa käytännössä sitä, ettei suhde $y_2(x)/y_1(x)$ ole vakio.

Yllä mainittujen kohtien todistukset ovat pitkähköjä ja sivuutetaan tällä kurssilla.

10.2 DY $y'' + py' + qy = 0$ I

Vakiokertoimisen lineaarisen ja homogeenisen DY:n $y'' + py' + qy = 0$ yleinen ratkaisu voidaan selvittää täydellisesti kaikilla vakioiden $p, q \in \mathbf{R}$ arvoilla.

Ratkaisun idea:

- Sijoitetaan yhtälöön yrite $y(x) = e^{\lambda x}$.
- Tulos johtaa ns. **karakteristiseen yhtälöön**

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

  jossa **karakteristisen polynomin** $P(\lambda)$ kertoimet ovat samat kuin DY:ssä.
  Huom: Tämän vuoksi karakteristisen yhtälön voi jatkossa kirjoittaa suoraan DY:n perusteella ilman välivaiheita!
- Ratkaistaan karakteristisen yhtälön juuret $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$.
- Perusjärjestelmä saadaan käsittelemällä erikseen kolme tapausta:

(i) Jos juuret ovat erisuuret ja reaaliset, niin

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ ja } y_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

(ii) Jos kyseessä on (reaalinen) kaksoisjuuri $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, niin

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \text{ ja } y_2(x) = xe^{\lambda x}.$$

Perustelu: Integroivan tekijän menetelmä toimii (vain!) tässä tapauksessa.

(iii) Jos juuret ovat muotoa $\lambda = a \pm bi$, $b \neq 0$, niin

$$y_1(x) = e^{ax} \cos(bx) \text{ ja } y_2(x) = e^{ax} \sin(bx).$$

Perustelu: Eulerin kaavan mukaan

$$e^{(a \pm bi)x} = e^{ax} e^{\pm ibx} = e^{ax} \big(\cos(bx) \pm i \sin(bx)\big),$$

josta voidaan "arvata" sopivat reaaliset ratkaisut (tai perustelu kompleksikertoimisen lineaarikombinaation avulla).

Esimerkki 10.2

Ratkaise DY $y'' + y' - 6y = 0$ alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

Ratkaisu: Karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, jonka juuret ovat $\lambda_1 = -3$ ja $\lambda_2 = 2$. Yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x},$$

jolloin $y'(x) = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x}$. Alkuehdoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + C_2 \\ 5 = y'(0) = -3C_1 + 2C_2, \end{cases}$$

josta $C_1 = -C_2 = -1$.
Alkuehdot toteuttava ratkaisu on siis $y(x) = e^{2x} - e^{-3x}$.

10.2 Eulerin lineaarinen DY I

Eulerin lineaarinen DY on muotoa

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

Sen perusratkaisut saadaan muotoa $y(x) = x^r$ olevaa yritettä käyttämällä. Yritteen sijoittaminen johtaa 2. asteen yhtälöön

$$r^2 + (a-1)r + b = 0,$$

jonka juurten $r_1,\ r_2$ avulla perusjärjestelmä saadaan seuraavalla tavalla:

(i) Jos juuret ovat erisuuret ja reaaliset, niin
$y_1(x) = |x|^{r_1}$ ja $y_2(x) = |x|^{r_2}$.

(ii) Jos kyseessä on (reaalinen) kaksoisjuuri $r = r_1 = r_2$, niin
$y_1(x) = |x|^r$ ja $y_2(x) = |x|^r \ln|x|$.

(iii) Jos juuret ovat muotoa $r = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$, niin
$y_1(x) = |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|)$ ja $y_2(x) = |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|)$.

10.3 Epähomogeeninen lineaarinen DY I

Lause 10.3

Epähomogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{3}$$

yleinen ratkaisu on muotoa

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x),$$

kun y_1 ja y_2 ovat vastaavan homogeenisen yhtälön perusratkaisut ja y_0 on jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.

Yksittäisratkaisuksi kelpaa siis mikä tahansa yhtälön $y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 = r(x)$ toteuttava funktio $y_0(x)$.

Lauseen perustelu: Olkoot y_0, y_1 ja y_2 kuten lauseessa. Tarkoituksena on osoittaa, että mikä tahansa epähomogeenisen DY:n ratkaisu $y(x)$ on väitettyä muotoa. Olkoon siis $y(x)$ jokin ratkaisu. Lyhyen laskun perusteella apufunktio $Y(x) = y(x) - y_0(x)$ toteuttaa vastaavan homogeenisen DY:n

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = 0,$$

joten se voidaan esittää perusratkaisujen y_1 ja y_2 avulla. On siis olemassa vakiot C_1 ja C_2, joille $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ kaikilla x. Yhtälöstä

$$y(x) - y_0(x) = Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

seuraa, että alkuperäinen ratkaisu $y(x)$ voidaan esittää väitetyssä muodossa. $\square$

10.3 Epähomogeeninen lineaarinen DY III

Jos yhtälössä (3) kertoimet p ja q ovat vakioita, niin yksittäisratkaisu löydetään käytännössä **yritteellä**, joka on muotoa "$r(x)$ yleisillä kertoimilla" tai joskus hieman hankalampi. Kertoimet saadaan selville yhtälöön sijoittamalla, mikäli yrite oli oikean tyyppinen. Joissakin erikoistapauksissa yritteeseen täytyy lisätä ylimääräisiä x-kertoimia.

Seuraavan kalvon taulukossa on annettu yritteen yleinen muoto vakiokertoimisille toisen kertaluvun yhtälöille, kun $r(x)$ on jokin alkeisfunktio. Jos $r(x)$ koostuu useista eri tyyppisistä osista, niin yritteeseen täytyy ottaa mukaan kaikkia eri osia vastaavat termit.
Vastaavan homogeenisen differentiaaliyhtälön karakteristinen polynomi on siis $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$.

10.3 Epähomogeeninen lineaarinen DY IV

$r(x)$ sisältää	yritteeseen tulee mukaan
n-asteisen polynomin	$A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$ ($+A_{n+1}x^{n+1}$, jos $q = P(0) = 0$)
$\sin kx$, $\cos kx$	$A\cos kx + B\sin kx$, jos $P(ik) \neq 0$
$\sin kx$, $\cos kx$	$Ax\cos kx + Bx\sin kx$, jos $P(ik) = 0$
$e^{cx}\sin kx$, $e^{cx}\cos kx$	$Ae^{cx}\cos kx + Be^{cx}\sin kx$, jos $P(c+ik) \neq 0$
e^{kx}	Ae^{kx}, jos $P(k) \neq 0$
e^{kx}	Axe^{kx}, jos $P(k) = 0$ ja $P'(k) \neq 0$
e^{kx}	Ax^2e^{kx}, jos $P(k) = P'(k) = 0$

Huom: Toisen asteen polynomin nollakohdista täytyy muistaa:

- $P(k) = 0$ ja $P'(k) \neq 0 \Leftrightarrow$ luku k on P:n yksinkertainen nollakohta
- $P(k) = P'(k) = 0 \Leftrightarrow$ luku k on P:n kaksinkertainen nollakohta.
- $P(ik) \neq 0 \Leftrightarrow$ kompleksiluku ik ei ole polynomin P nollakohta; ts. $\sin kx$ ja $\cos kx$ eivät ole homogeenisen yhtälön ratkaisuja.

Esimerkki 10.4

Määritä DY:n $y'' + y' - 6y = r(x)$ yleinen ratkaisu, kun a) $r(x) = 12e^{-x}$; b) $r(x) = 20e^{2x}$.

Ratkaisu: Ratkaisut ovat muotoa $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + y_0(x)$.
Sijoittamalla a-kohdassa yrite $y_0(x) = Ae^{-x}$ saadaan
$(A - A - 6A)e^{-x} = 12e^{-x}$, joka toteutuu arvolla $A = -2$.
Sen sijaan b-kohdassa muotoa Be^{2x} oleva yrite ei toimi, koska se on osa vastaavan HY:n yleistä ratkaisua ja tuottaa pelkkää nollaa DY:n vasemmalle puolelle sijoitettuna. Oikea yrite on b-kohdassa muotoa $y_0(x) = Bxe^{2x}$. Sijoitus johtaa yhtälöön

$$(4B + 2B - 6B)xe^{2x} + (4B + B)e^{2x} = 20e^{2x},$$

joka toteutuu arvolla $B = 4$.
Näiden avulla voidaan kirjoittaa DY:iden yleiset ratkaisut.

Esimerkki 10.5

Määritä DY:n $y'' + y' - 6y = 12e^{-x}$ ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

Ratkaisu: Edellisen esimerkin perusteella yleinen ratkaisu on muotoa $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - 2e^{-x}$, jolloin $y'(x) = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x} + 2e^{-x}$. Alkuehdoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + C_2 - 2 \\ 6 = y'(0) = -3C_1 + 2C_2 + 2, \end{cases}$$

josta $C_1 = 0$, $C_2 = 2$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on $y(x) = 2e^{2x} - 2e^{-x}$.

Esimerkki 10.6

RLC-piirissä on kytketty sarjaan vastus (resistanssi R), käämi (induktanssi L) ja kondensaattori (kapasitanssi C) sekä lähdejännite $E(t)$. Piirissä kulkevan sähkövirran voimakkuutta $y = y(t)$ voidaan mallintaa differentiaaliyhtälöllä $Ly'' + Ry' + y/C = E'(t)$. Määritä piirissä kulkeva sähkövirta (keinotekoisilla) lukuarvoilla $y'' + 10y' + 61y = 370 \sin t$.

Ratkaisu: Karakteristinen yhtälö on muotoa $\lambda^2 + 10\lambda + 61 = 0$, jonka ratkaisut ovat

$$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{-144}}{2} = -5 \pm 6i.$$

Homogeenisen osan perusratkaisuiksi saadaan $y_1(t) = e^{-5t} \cos(6t)$ ja $y_2(t) = e^{-5t} \sin(6t)$.
Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisua varten kokeillaan yritettä $y_0(t) = A \cos t + B \sin t$. Sijoittamalla tämä lauseke epähomogeeniseen

yhtälöön saadaan ehto $(60A + 10B)\cos t + (60B - 10A)\sin t = 370\sin t$. Tämä yhtälö toteutuu kaikilla t (vain silloin), kun

$$\begin{cases} 60A + 10B = 0 \\ 60B - 10A = 370, \end{cases}$$

josta ratkeaa $A = -1$ ja $B = 6$. Epähomogeenisen DY:n yleinen ratkaisu on siis muotoa

$$y(t) = e^{-5t}(C_1\cos(6t) + C_2\sin(6t)) - \cos t + 6\sin t.$$

Huom: Ratkaisun eksponentiaaliset termit pienenevät nopeasti kohti nollaa, joten lyhyen ajan kuluttua jäljellä on käytännössä vain termi $-\cos t + 6\sin t$.