**Tiistai/Keskiviikko**

- Harjoitustehtävät (ratkaistaan laskuharjoituksessa)

H1. Osoita, että positiivinen sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n-1})^n = (\frac{1}{1})^1 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{3}{5})^3 + \ldots = 1 + \frac{4}{9} + \frac{27}{125} + \ldots$ suppenee ja että sen summa $s \in ]1.5, 2.5[$, joten $s \approx 2$, pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun.

H2. Tutki, suppeneeko vai hajaantuuko sarja:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\frac{1}{n})$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n^2})$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^3})$.

H3. a) Määritä, millä $x$:n arvoilla potenssisarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n^2} = \frac{x}{3 \cdot 1} + \frac{x^2}{9 \cdot 4} + \frac{x^3}{27 \cdot 9} + \frac{x^4}{81 \cdot 16} + \ldots$ suppenee.
b) Määritä jokin $N$ niin, että summan $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^2}$ ja osasumman $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n \cdot n^2}$ erotuksen itseisarvo $|s - s_N|$ on $< 1/100$?

H4. Osoita, että jatkuvalla funktiolla $p(x) = x^3 - 2x - 5$ on (vähintään) yksi nollakohta avoimella välillä $]2, 3[$ ja approksimoi tämä nollakohta laskimen, jatkuvien funktioiden väliarvolauseen ja välin puolittamisen avulla niin, että virheen itseisarvo on $< 1/100$.
(Etsimme lukua $a$, jolle pätee $f(a) = 0$, mutta kelpuutamme luvun $b$, jos $|a - b| < 1/100$. Sen sijaan ei välttämättä riitä, että löydämme luvun $c$, jolle pätee $|f(c)| < 1/100$.)

**Torstai/Perjantai**

- Kotitehtävät (ratkaistaan etukäteen kotona ja esitetään taululla laskuharjoituksessa)

K1. Määritä, millä $x$:n arvoilla sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{8^n} \cdot x^{3n}$ suppenee ottamalla käyttöön apumuuttajan $t = x^3$.

K2. Funktio $f$, joka on määritelty origosymmetrisessä joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$, sanotaan *parilliseksi*, jos $f(-x) = f(x)$. Funktio $g$, joka on määritelty origosymmetrisessä joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$, sanotaan *parittomaksi*, jos $g(-x) = -g(x)$. Olkoon funktio $h$ määritelty origosymmetrisessä joukossa. Silloin $h(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(-x)) + \frac{1}{2}(h(x) - h(-x)) = f(x) + g(x)$,
a) Osoita, että $f(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(-x))$ on parillinen ja $g(x) = \frac{1}{2}(h(x) - h(-x))$ on pariton funktio.
b) a)-kohdasta seuraa, että jokaista funktiota $h$, joka on määritelty origosymmetrisessä joukossa, voidaan kirjoittaa parillisen ja parittoman funktion summana ainakin yhdellä tavalla. Osoita, että tämä on *ainoa* tapa, miten funktio $h$ voidaan kirjoittaa parillisen ja parittoman funktion summana.

K3. Olkoon $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 5$. Laske raja-arvo $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ suoraan raja-arvona.
(Tässä lasketaan itse asiassa funktion $f$ *derivaatta*. Myöhemmin käytämme erilaisia derivoimissääntöjä, jolloin derivaatta saadaan yleensä ilman raja-arvon käyttöä.)

- Palautustehtävät (lasketaan ennen laskuharjoitusta, sen aikana sekä jälkikäteen ja palautetaan teräskaappeihiin A6-8 laskutuvan Y190c ulkopuolella viimeistään klo 12:00 seuraavan viikon tiistaina)

P1 Olkoon $g(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$. Laske raja-arvo $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ suoraan raja-arvona.
(Tässäkin laskettaan itse asiassa funktion $g$ *derivaatta* suoraan määritelmästä.)

P2 Tässä tehtävässä osoitetaan, että funktion $h(x) = x^n$ derivaatta $h'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$, kun $n$ on luonnollinen luku. Identiteettifunktion $I(x) = x = x^1$ derivaatta $I'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$ (tämä seuraa määritelmästä), joten väite pätee, kun $n = 1$. Osoita nyt induktiolla, että väite pätee myös, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$. Käyttä apunasi seuraava tietoa: Jos funktioilla $f$ ja $g$ on derivaatta pisteessä $x$, niin myös tulofunktiolla $f \cdot g$ (jolla pätee, että $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$) on derivaatta kyseisessä pisteessä $x$ ja että $(f \cdot g)'(x) = \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

P3 Identiteettifunktiolle $I$ pätee, että $(h \circ I)(x) = h(I(x)) = h(x)$ ja $(I \circ h)(x) = I(h(x)) = h(x)$, joten $h \circ I = h = I \circ h$.
a) Olkoot $f(x) = 2x - 3$ ja $g(x) = (x + 3)/2$. Piirrä niiden kuvaajat eri väreillä samaan kuvaan ja osoita, että $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x = I(x)$ ja $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = I(x), \forall x \in \mathbb{R}$, eli että $f \circ g = I_{\mathbb{R}} = g \circ f$. $f$ ja $g$ ovat toistensa *käänteisfunktiot*.
b) Osoita, että funktiot $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}, f(x) = \frac{3-x}{x-2}$ ja $g : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}, g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ ovat toistensa käänteisfunktiot niin, että $f \circ g = I_{\mathbb{R}\backslash\{-1\}}$ ja $g \circ f = I_{\mathbb{R}\backslash\{2\}}$. Piirrä niiden kuvaajat eri väreillä samaan kuvaan.

- Stack-tehtävien aiheet (linkki tehtäviin löytyy kurssin MyCourses-sivuilta ja ne tulee ratkaista kyseisen viikon sunnuntaihin klo 24:00 mennessä)
S1. Sarjan summa
S2. Suppeneminen/hajaantuminen
S3. Potenssisarjan suppenemisväli
S4. Funktioiden raja-arvot