5 Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Edellä on jo käsitelty monia funktioita, joissa lähtö- (ja/tai) maalijoukko on useampi- kuin 1-ulotteinen:

<u>Esim.</u>

A-, B- ja C-raaka-ainemäärien yhdistelmien $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in D = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$

yhteys paino-N:n määrä-hinta-yhdistelmien $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3) \in B = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$

kanssa,

jonka määrittelee lineaarikuvaus A:D → B, $\bar{y} = A\bar{x}$, missä

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 340 & 60 \\ 10 & 60 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 40x_1 + 340x_2 + 60x_3 \\ 10x_1 + 60x_2 + 20x_3 \end{bmatrix}.$$

Tällaisen funktion tutkimisessa muutosnopeuden mittaamisesta ei ole hyötyä, mutta sen sijaan seuraavassa tilanteessa (**optimointiongelma**n ratkaisemisessa) tarvitaan derivaatan käsitteen yleistämistä usean muuttujan (selittäjän) funktioille:

<u>Esim.</u> Arktinen Kala- yhtiön tuotannon kulurakenne on hyvin joustava ja yhtiön tuotantoon sijoittamat panokset

työkustannuksiin (x_1) ja pääomakustannuksiin (x_2) voivat vaihdella paljon kuukausittain.

Ekonomisti E selvitti (miten?) tuotannon arvoa kuvaavan (Cobb-Douglas-) tuotantofunktion

f:$\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x_1,x_2) = 2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62}$, missä

x_1 = työpanos (M€), x_2 = pääoma (M€) ja $f(x_1,x_2)$ = tuotannon arvo (M€)

(Huom. eksponenttien summa ... !?)

Tämä malli ennustaa, että (esim.) sijoitetulla työpanoksella x_1 = 20 M€ ja pääomalla x_2 = 10 M€

f(20,10) = … $\approx$ 29.67 M€,

joten tuotanto on tällä panosten jaolla 0.33 M€ tappiollista.

Mallin avulla halutaan ja myös voidaan selvittää, voidaanko tilannetta parantaa paremmalla panosten jaolla:

- Kuinka kannattaa jakaa **lisäpanos** (esim.) 0.2 M€ työpanoksen x_1 ja pääoman x_2 kesken?

- (Jos työpanoksen ja pääoman osuutta voidaan vapaasti muuttaa,)

miten **kokonaispanos** (esim. edellä 30 M€) kannattaa jakaa työn x_1 ja pääoman x_2 kesken, jotta tuotannon arvo maksimoituu?

Nyt kummankin selittäjän x_1 ja x_2 arvoja voidaan muuttaa ja myös tuotannon arvon $f(x_1,x_2)$ muutosnopeutta on mitattava kahteen suuntaan.

Funktion f: $A \rightarrow \mathbf{R}$ lähtöjoukko $A \subset \mathbf{R}^n$ ulotteisuus n voi olla mikä tahansa, mutta tässä tarkastellaan lähinnä kahden (selittävän) muuttujan funktioita.

Osittaisderivaatta

Esim. (jatkoa) Jos sijoitetun pääoman tasoksi kiinnitetään (esim.)

$x_2 = 10$ M€ ja työpanoksen x_1 annetaan vaihdella vapaasti,

tuotantofunktio f muuttuu yhden muuttujan funktioksi

$t_{10}:\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $t_{10}(x_1) = f(x_1, 10)$

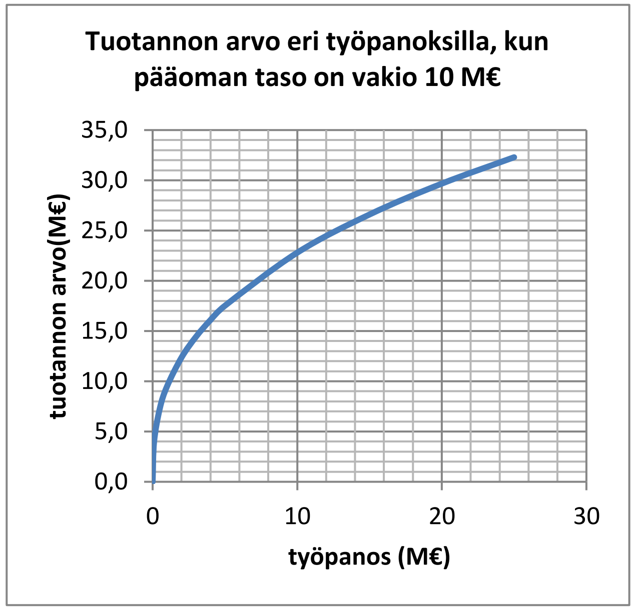
$= \ldots$

$= 9.505\, x_1^{0.38}$, missä

$t_{10}(x_1)$ = tuotannon arvo (M€), x_1 = työpanos (M€)

ja sijoitettu pääoma $x_2 = 10$M€ koko ajan olipa työpanoksen arvo mikä tahansa.

x_1	$t_{10}(x_1)$
0	0,0
0,1	4,0
0,5	7,3
1	9,5
2	12,4
3	14,4
4	16,1
5	17,5
10	22,8
15	26,6
20	**29,7**
25	32,3
30	34,6



- Kun x_1 on ? , tuotanto on tappiollista, mutta

- Sitten ?

- Kun x_1 on ”liian suuri, tuotanto on taas ?

Tätä funktiota voidaan käsitellä samalla tavalla kuin aikaisempia yhden muuttujan funktioita:

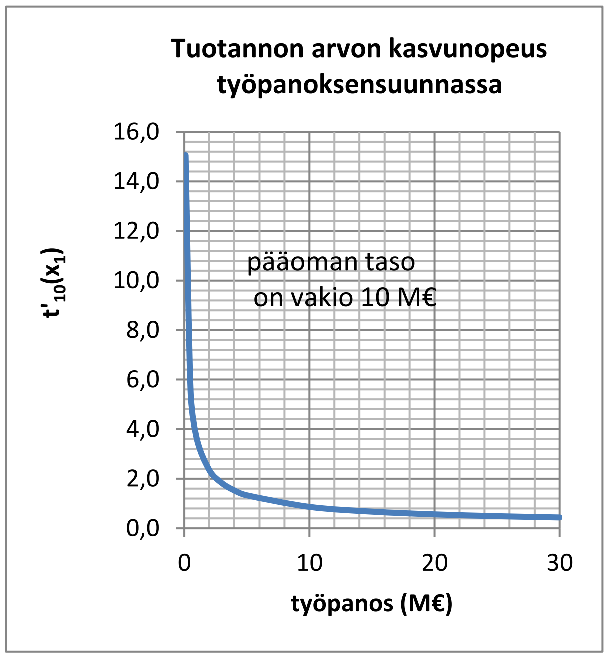
Tuotannon arvon **muutosnopeus työn määrän x_1 suunnassa** (, kun pääoma on tasolla x_2 = 10 M€) on derivaatta

$t'_{10}(x_1) = D(2.28 \cdot x_1^{0.38} \cdot 10^{0.62})$ $\qquad$ $(= D(9.505\, x_1^{0.38})$

$= \ldots$

$= 3.612\, x_1^{-0.62}$

x_1	$t'_{10}(x_1)$
0,1	15,1
0,5	5,6
1	3,6
2	2,4
3	1,8
4	1,5
5	1,3
10	0,9
15	0,7
20	0,6
25	0,5
30	0,4



Tätä sanotaan funktion f **osittaisderivaataksi** x_1:n suhteen (tässä erikoistapauksessa, missä pääoma on kiinnitetty tasoon x_2= 10 M€).

- Kun x_1 on ”pieni”, tuotannon arvon kasvunopeus

$t'_{10}(x_1) > 1$ ja lisäpanokset Δx_1 ovat kannattavia.

$(t'_{10}(x_1)\cdot \Delta x_1 > \Delta x_1)$

- Kun x_1 on pääomapanokseen nähden ”jo liian suuri”,

on kasvunopeus $t'_{10}(x_1) <$?

ja lisäpanokset työn suunnassa eivät kannata.

.

Samalla tavalla saadaan tuotantofunktion f osittaisderivaatta pääoman x_2 suhteen:

Olkoon työpanos koko ajan (esim.) tasolla $x_1 = 20$ M€

ja x_2 = sijoitettu pääoma (M€) vaihtelee.

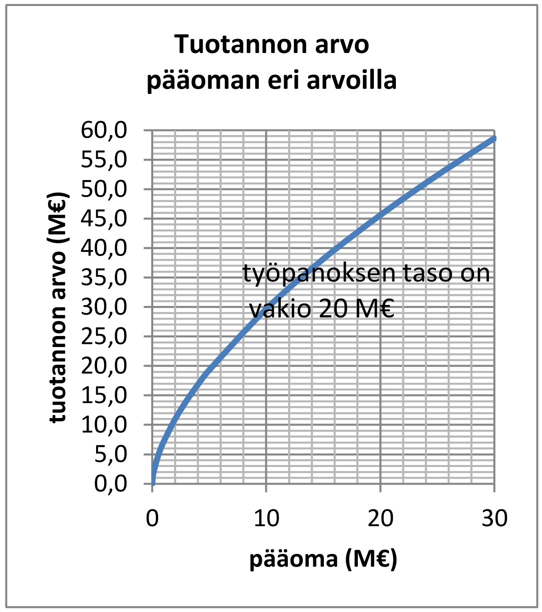
Silloin tuotannon arvoa kuvaa funktio

$k_{20}:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $k_{20}(x_2) = f(20, x_2)$

$= \ldots$

$= 7.117\, x_2^{0.62}$

x_2	$k_{20}(x_2)$
0	0,0
0,1	1,7
0,5	4,6
1	7,1
2	10,9
3	14,1
4	16,8
5	19,3
10	**29,7**
15	38,1
20	45,6
25	52,4
30	58,6



- "Liian pienellä" pääoman määrällä x_2 tuotanto $f(20, x_2)$ on ?

- Yli ? pääomapanoksella tuotanto alkaa ?

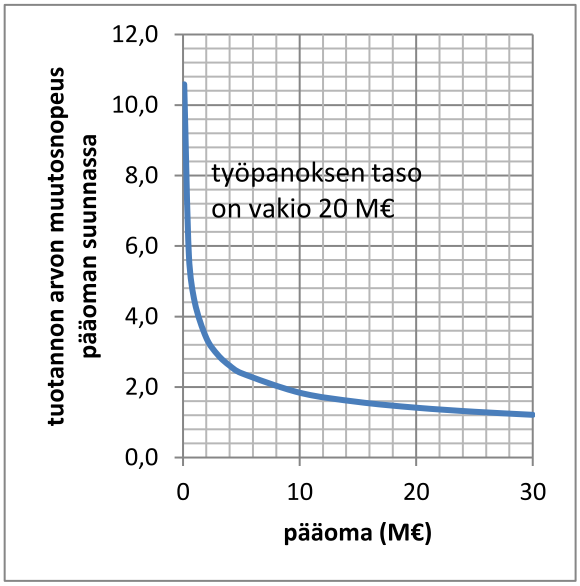
Tuotannon arvon **muutosnopeus pääoman x_2 suunnassa** (työpanoksen tasolla $x_1 = 20$ M€) on

$k'_{20}(x_2) = D(2.28 \cdot 20^{0.38} \cdot x_2^{0.62})$ (=$D(7.117\, x_2^{0.62})$)

= ...

$= 4.413\ x_2^{-0.38}$

x_2	$k'_{20}(x_2)$
0,1	10,6
0,5	5,7
1	4,4
2	3,4
3	2,9
4	2,6
5	2,4
10	1,8
15	1,6
20	1,4
25	1,3
30	1,2



- Kasvunopeus eli **rajatuottavuus** vähenee, mutta

lisäpanokset pääomaan ovat ? ($k'_{20}(x_2) >$?)

Kuitenkin ennen pitkää rajatuottavuus pienenee alle yhden, jos pääomaa kasvatetaan ”liikaa” työpanoksen tasoon (tässä $x_1 = 20$ M€) nähden. (Kokeile esim. $k'_{20}(100)$.)

Yleisesti:

Jos n:n muuttujan reaaliarvoisen funktion $f:A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}^n$)

- kaikki muuttujat paitsi x_k on kiinnitetty (”ajatellaan vakioiksi”),

- niin f on pelkästään yhden muuttujan x_k funktio,

- ja se voidaan derivoida ”tavallisella tavalla” (, jos se on derivoituva).

Näin saadaan funktion f ***osittaisderivaatta muuttujan x_k suhteen***,

josta käytetään merkintöjä

$D_k f(x_1, \ldots, x_n)$ tai $D_{x_k} f(x_1, \ldots, x_n)$ tai $\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k}$ (tai $f_k(x_1, \ldots, x_n)$)

<u>Esim.</u> (jatkoa) Arktinen Kala C-D -tuotantofunktio

$f:\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x_1,x_2) = 2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62}$, missä

x_1 = työpanos (M€), x_2 = pääoma (M€) ja $f(x_1,x_2)$ = tuotannon arvo (M€)

Osittaisderivaatat:

Tuotannon arvon muutosnopeus työpanoksen x_1 suunnassa,

kun pääoma on tasolla x_2

"vakio" ↓

$D_1f(x_1,x_2) = D_{\mathbf{1}}(2.28\cdot \mathbf{x_1^{0.38}}\cdot x_2^{0.62})$

$= 2.28\cdot\mathbf{0.38\cdot x_1^{0.38-1}}\cdot x_2^{0.62}$

$= 0.8664\ x_1^{-0.62}x_2^{0.62}$

Tuotannon muutosnopeus pääoman x_2 suunnassa

kun työpanos on tasolla x_1

"vakio" ↓

$D_2f(x_1,x_2) = D_{\mathbf{2}}(2.28\cdot x_1^{0.38}\cdot \mathbf{x_2^{0.62}})$

$= \ldots$

$= 1.4136\ x_1^{0.38}x_2^{-0.38}$

Tuotantofunktion f osittaisderivaattoja $D_1f(x_1,x_2)$ ja $D_2f(x_1,x_2)$ sanotaan myös työpanoksen ja pääoman **rajatuottavuuksiksi**.

Derivointisäännöt ovat (”sopivasti soveltaen”) vastaavat kuin yhden muuttujan funktioilla.

Esim. f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 3xy^2 - 2y^2 + 4x - 5y + 1$

”vakioita”

↙ ↓ ↘

$$D_1f(x,y) = D_1(3xy^2 - 2y^2 + 4x - 5y + 1)$$

$$= 3\cdot 1\cdot y^2 - 0 + 4\cdot 1 - 0 + 0$$

$$= 3y^2 + 4$$

$$D_2f(x,y) = D_2(3xy^2 - 2y^2 + 4x - 5y + 1)$$

$$= \ldots$$

$$= 6xy - 4y - 5$$

Esim. Funktio $f: A \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^y$ $(A \subset \mathbf{R}^2)$

on potenssifunktio x:n suhteen

ja eksponenttifunktio y:n suhteen, jolloin

”vakio”

↙

$D_1 f(x,y) = D_1\, x^y = y \cdot x^{y-1}$

$D_2 f(x,y) = D_2\, x^y = x^y \cdot \ln x$ $(x>0)$

”vakio” ↑

Yhdistetyn funktion derivointisääntö usean muuttujan funktiolle on vastaavanlainen kuin yhden selittäjän tapauksessa. Nyt kuitenkin yhdistetyn funktion muutosnopeus riippuu useamman kuin yhden sisäfunktion muutoksista, kun selittäjää x_k muutetaan ”vähän”. Tämän (sinänsä tärkeän tapauksen) käsittely sivuutetaan tässä.

Gradientti

Esim. (jatkoa) Arktinen Kala C-D–tuotantofunktio

Työpanokseen on sijoitettu x_1 = 20 M€ ja pääomapuolelle x_2 = 10 M€.

Tuotantoon sijoitetaan lisäpanos (esim. 0.2 M€).

Miten se kannattaa jakaa työn ja pääoman välillä, jotta tuotannon arvo f kasvaa parhaiten?

Työpanoksen suuntainen osittaisderivaatta tällä työpanoksen ja pääoman tasolla on

$$D_1 f(20, 10) = 0.8664 \cdot 20^{-0.62} \cdot 10^{0.62} \approx 0.564$$

Jos työpanosta kasvatetaan esim. 0.1 M€, saadaan osittaisderivaatan avulla arvio tuotannon arvon muutokselle

$$\Delta_1 f(20,10) \approx 0.564 \cdot 0.1 \text{M€} = 0.0564 \text{ M€} \quad (< ?)$$

Siis 0.1 M€ lisäpanostus työn suuntaan on kannattamaton.

Osittaisderivaatta pääoman x_2 suunnassa on

$D_2 f(20, 10) =$ … ≈ 1.840

Nyt mallin mukaan (esim.) 0.1 M€:n lisäpanoksella pääoman suuntaan

tuotannon arvon muutos on

$\Delta_2 f(20,10) \approx$ 1.840 · 0.1 M€ = 0.184 M€ (> ?)

ja lisäys on ? .

Jos sekä työn x_1 että pääoman x_2 arvoja muutetaan, muutos on 2-ulotteinen eli vektorisuure.

Kumpikin muutos aiheuttaa tuotannon arvolle oman ”muutospaineensa”.

Yhteenveto tuotannon arvon ”muutospyrkimyksistä” voidaan koota vektoriksi

työn rajatuottavuus
↙

$$\nabla f(20{,}10) = \begin{bmatrix} 0.564 \\ 1.840 \end{bmatrix},$$

jota sanotaan funktion f **gradientiksi**.

↖
pääoman rajatuottavuus

Oletetaan, että funktiolla f: A → **R** (A⊂**R**^{n})

on olemassa osittaisderivaatat D_1f, …, D_nf joukossa B⊂A.

Funktion f ***gradientti***, josta käytetään merkintää ∇f tai grad f on funktio

$$\boldsymbol{\nabla f : B \to R^n,\ \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} D_1 f(x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ D_n f(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}}$$

"Muutospaineet"
←
f:n arvoon

<u>Esim.</u> Arktinen Kala C-D –tuotantofunktion gradientti on

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0.8664\, x_1^{-0.62} x_2^{0.62} \\ 1.4136 x_1^{0.38} x_2^{-0.38} \end{bmatrix}$$

ja edellä

(esim.) $\nabla f(20,10) = \begin{bmatrix} 0.564 \\ 1.840 \end{bmatrix}$.

Edellä laskettiin myös:

- Jos työpanosta x_1 = 20 M€ lisätään esim. 0.1 M€ (”vähän”),

niin tuotannon arvo kasvaa (vain) 0.0564 M€

- ja jos pääomaa x_2 = 10 M€ lisätään esim. 0.1 M€ (”vähän”),

niin tuotannon arvo kasvaa 0.184 M€ eli yli lisäpanoksen.

Kun molempia muutetaan, **kokonaismuutoksesta** saadaan (karkea) arvio gradientin ja muutosvektorin skalaaritulon avulla:

Jos tehdään ”pieni” muutos muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arvoihin

$x_1 \rightarrow x_1 + \Delta x_1,\ x_2 \rightarrow x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n \rightarrow x_n + \Delta x_n$

eli pisteestä $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ siirrytään vektorin $\bar{h} = [\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n]$ suuntaan, saadaan funktion f arvon muutokselle Δf arvio (skalaaritulona)

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx \bar{h} \bullet \text{grad } f = [\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n] \begin{bmatrix} D_1 f(x_{1,} \ldots, x_n) \\ D_2 f(x_{1,} \ldots, x_n) \\ \cdot \\ D_n f(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

<u>Esim.</u> (jatkoa) Jos lisäpanos 0.2 M€ jaetaan tasan työn ja pääoman keskken, niin tuotannon arvo kasvaa likimain

$$\Delta f(20, 10) \approx [0.1, 0.1] \begin{bmatrix} 0.564 \\ 1.840 \end{bmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$= 0.240 \text{ M€} \ (> 0.2)$$

Tässä

- gradienttivektori (0.564, 1.840)   (”kasvupyrkimysten” yhteenveto)

- ja muutosvektori (0.1, 0.1)

ovat melko erisuuntaisia. Piirrä kuva!

Panosten jako työn ja pääoman välillä ei ilmeisesti ole optimaalinen.

Muutosvektorin $\bar{h}$ ja gradienttivektorin gradf välisen kulman ∝ cosini

on ≈ ?

↓

$$\cos\propto = \frac{\bar{h} \cdot \mathrm{grad}\, f}{|\bar{h}|\, |\mathrm{grad}\, f|}$$

joten

$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx |\bar{h}|\ |\mathrm{grad} f| \cos\propto$

$\cos\propto = 1$, kun $\propto = 0$, joten

f:n muutos on suurimmillaan, kun muutos tehdään gradientin suuntaan.

Silloin ”osamuutosten” suhde on osittaisderivaattojen suhde.

Esim. Kun kokonaislisäpanos 0.2 M€ jaetaan osittaisderivaattojen suhteessa, saadaan

panosten jako

$\Delta x_1 = \frac{0.564}{0.564+1.840} \cdot 0.2$ = 0.047 M€

$\Delta x_2 = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \cdot \qquad\qquad$ = 0.153 M€

ja

"max" $\Delta f(20, 10) \approx [0.047, 0.153] \begin{bmatrix} 0.564 \\ 1.840 \end{bmatrix}$

= …

= 0.308 M€. (Vrt. aikaisempaan tasajakoon.)

Mikään ei sinänsä takaa, että näinkään saadaan optimaalinen jako. Gradientti on vain yhteenveto funktion f "hetkellisistä muutospyrkimyksistä" ja f arvot voivat muuttua jossain muussa tapauksessa miten tahansa lähtöpisteen (tässä (20,10)) ympäristössä.

Jos muutosvektorin tilalle otetaan kokonaispanokset x_1 ja x_2, saadaan

$$[x_1, x_2]\begin{bmatrix} D_1 f(x_1,x_2) \\ D_2 f(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \overset{\boxed{\substack{\text{työ} \\ \downarrow}}}{x_1} \cdot \underset{\boxed{\substack{\uparrow \\ \text{työn} \\ \text{raja}- \\ \text{tuott.}}}}{D_1 f(x_1,x_2)} + \overset{\boxed{\substack{\text{pää}- \\ \text{oma} \\ \downarrow}}}{x_2} \cdot \underset{\boxed{\substack{\uparrow \\ \text{pääoman} \\ \text{raja}- \\ \text{tuott.}}}}{D_2 f(x_1,x_2)}$$

$= x_1(2.28 \cdot 0.38 \cdot x_1^{-0.62} x_2^{0.62}) + x_2(2.28 \cdot x_1^{0.38} \cdot 0.62 \cdot x_2^{-0.38})$

$= \ldots$

$= f(x_1,x_2)$

Siis kun tuotannon arvon muodostumista tarkastellaan C-D – mallin kautta, tuotannon arvo hahmotetaan ”rakentuvan” tuotannontekijöistä rajatuottavuuksien suhteessa.

Vastaavalla tavalla kuin edellä yhden muuttujan funktiolla tässä saadaan

osittaisderivaatan D_i $f(x_1, x_2, …, x_n)$ avulla vastaus kysymykseen:

Kuinka suuri on

funktion f arvon absoluuttinen muutos $\Delta f(x_1, x_2, …, x_n)$, kun

muuttujalle x_i tehdään Δx_i:n suuruinen absoluuttinen muutos.

Myös usean muuttujan funktioilla on hyödyllistä tarkastella vastaavia suhteellisia muutoksia samalla tavalla kuin yhden muuttujan funktioilla:

Suhteellinen muutosnopeus muuttujan x_i suunnassa on

$$\boxed{\begin{matrix}\text{u. f}\\ \downarrow\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}\text{s. f}\\ \downarrow\end{matrix}} \qquad\qquad \boxed{\begin{matrix}\text{absoluuttinen}\\ \text{muutosnopeus}\\ \downarrow\end{matrix}}$$

$$D_i \ln f(x_1, x_2, …, x_n) = \quad … \quad = \frac{D_i f(x_1, …, x_n)}{f(x_1, …, x_n)}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\uparrow\\ \text{"taso"}\end{matrix}}$$

Esim. (jatkoa) Tuotannon arvon $f(x_1,x_2) = 2.28\, x_1^{0.38}x_2^{0.62}$

suhteellinen muutosnopeus

työpanoksen x_1 suunnassa:

$$D_1 \ln f(x_1, x_2) = \frac{D_1 f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{0.8664\, x_1^{-0.62} x_2^{0.62}}{2.28 x_1^{0.38} x_2^{0.62}}$$

$$= \frac{0.38}{x_1}$$

Siis

- kääntäen verrannollinen työpanoksen määrään

- eikä riipu pääoman x_2 tasosta (!)

pääoman x_2 suunnassa:

$$D_2 \ln f(x_1, x_2) = \frac{D_2 f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{0.62}{x_2}$$

Tässä vastaavalla tavalla

- ? ? pääoman määrään

- eikä ? ? tasosta (!)

Jos taas työpanos x_1 = 20 M€ ja pääoma x_2 = 10 M€, saadaan

ei "vaikuta"
↓

D_1 Inf(20, 10) = $\frac{0.38}{20}$ = 0.019 = 1.9 %

Siis mallin mukaan hyvin karkea arvio on, että

1 M€ lisää työhön → tuotannon arvo kasvaa 1.9 %

(kaikilla pääoman tasoilla!)

$$\boxed{\text{ei "vaikuta"} \atop \downarrow}$$

D_2 lnf(20, 10) = $\frac{0.62}{10}$ = 0.062 = 6.2 %,

jonka mukaan

(kaikilla ? tasoilla!)

1 M€ lisää ? → tuotannon arvo ? 6.2 %.

Tässä 1 M€:n lisäys ei ole kovin ”pieni” ja arviot ovat hyvin karkeita.

Osittaisjousto

Yhden muuttujan funktiolla jousto **Ef(x) =** $\frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{f(x)}} \cdot \mathbf{x}$

vastaa kysymykseen: $\boxed{\uparrow \atop \mathrm{Dlnf(x)}}$

”Jos muuttujan x arvo kasvaa 1 %, kuinka monta %

funktion f arvo muuttuu?

Funktion f: A → **R** (A⊂**R**^{n}) arvon suhteellista muutosta,

kun muuttujan x_k arvoon tehdään 1 %:n muutos

mittaa vastaavalla tavalla ***osittaisjousto*** muuttujan x_k suhteen:

$$\boldsymbol{E_i\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{D_i f(x_1, \ldots, x_n)}{f(x_1, \ldots, x_n)}\, x_i}$$

Esim. (jatkoa) Tuotannon arvon $f(x_1,x_2) = 2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62}$

osittaisjousto

työpanoksen x_1 suunnassa:

$$E_1\, f(x_1, x_2) = \frac{D_1 f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}\, x_1$$

$= \dfrac{0.8664\, x_1{}^{-0.62} x_2{}^{0.62}}{2.28 x_1{}^{0.38} x_2{}^{0.62}} \cdot x_1$

$= 0.38$

Osittaisjousto työpanoksen x_1 suunnassa

- on vakio

- ja riippumaton sekä työpanoksen x_1 että pääoman x_2 tasosta. (!)

Siis mallin mukaan

1 % lisää työhön → 0.38 % lisää tuotantoa.

Pääoman x_2 suunnassa:

$E_2\, f(x_1, x_2) = \dfrac{D_2 f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}\, x_2$

$= \ldots$

$= 0.62$

Myös pääoman suunnassa jousto

- on …

- ja … sekä … että … tasosta. (!)

Mallin mukaan

? lisää ? → ? lisää ?

Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat

Tässä rajoitutaan 2. kertaluvun osittaisderivaattojen tarkasteluun, jotka mittaavat funktion f: A → **R** (A⊂$\mathbf{R}^n$) arvon **muutoksen kiihtyvyyttä**.

Esim. (jatkoa) Tuotannon arvon $f(x_1,x_2) = 2.28\ x_1^{0.38}x_2^{0.62}$

osittaisderivaatta x_1:n suhteen on

$D_1f(x_1,x_2) = 0.8664\ x_1^{-0.62}x_2^{0.62}$

Tämä **muutosnopeutta työpanoksen x_1 suunnassa** kuvaava funktio

voidaan derivoida uudelleen x_1:n suhteen:

merkintä ↓

$(D_{11}f(x_1,x_2) =)\ \ D_1(D_1f(x_1,x_2)) = D_1\ (0.8664\ \mathbf{x_1^{-0.62}}x_2^{0.62})$

$= 0.8664\cdot(-0.62)\ \mathbf{x_1^{-0.62-1}}\ x_2^{0.62}$

$= -0.5372\ x_1^{-1.62}x_2^{0.62}$

Tämä funktio mittaa tuotannon arvon $f(x_1,x_2)$

työpanoksen x_1 suuntaisen kasvun $D_1f(x_1,x_2)$ **kiihtyvyyttä**.

Jos taas (esim.) x_1 = 20 M€ ja x_2 = 10 M€, näillä panoksilla on

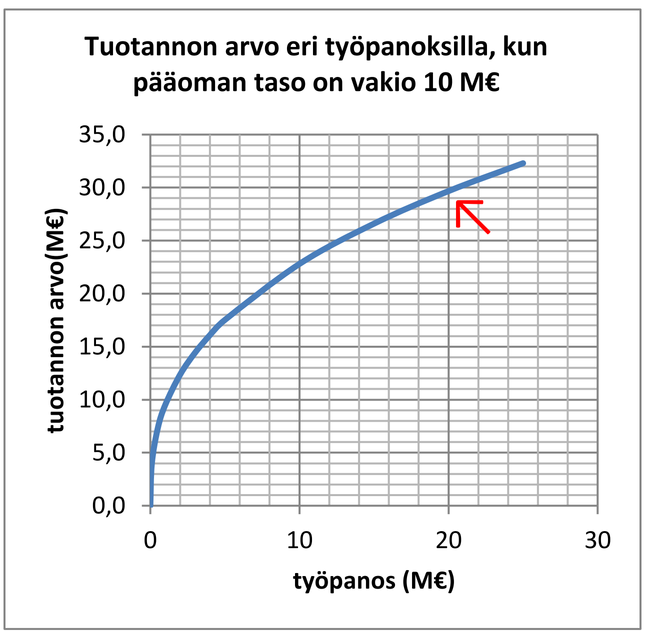
- ”taso” f(20,10) = 29.67 M€,

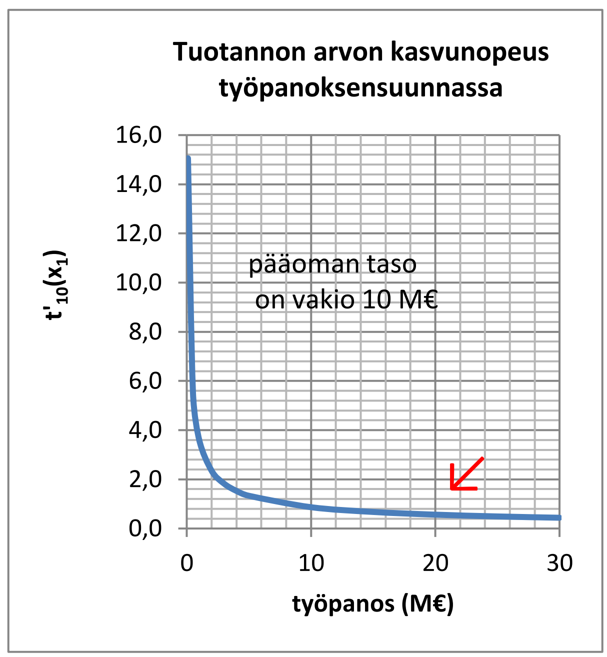
- ”kasvunopeus työn suunnassa” $D_1f(20,10) \approx 0.56$ (huom. < 1) ja

- ”kasvun kiihtyvyys” $D_{11}f(20,10) = -0.5372\ 20^{-1.62}\ 10^{0.62}$

$$\approx -0.017$$

Vrt. kuviohin. ”vaimeasti hidastuvaa kasvua”





Työpanoksen x_1 suunnassa

- tuotannon arvo f kasvaa ja — muutosnopeus $D_1f(20,10) > 0$
- kasvu on hidasta — $D_1f(20,10) \approx 0.56$ on ”pieni”
- ja hidastuvaa — kasvunopeus pienenee edelleen

$$D_{11}f(20,10) = -0.0175$$

Siis ”pieni” lisäys työpanokseen ”vaikuttaa” tuotannon kasvunopeutta pienentävästi.

(Mallin mukaan) esim. lisäys $\Delta x_1 = 0.1$ M€

- kyllä ”kasvattaa” tuotannon arvoa

$$0.56 \cdot 0.1 \approx 0.056 \text{ M€ verran,}$$

mutta

- ”pienentää” kasvunopeutta

$$-0.0175 \cdot 0.1 \approx -0.00175 \text{ verran.}$$

Tuotantofunktion f osittaisderivaatta pääoman x_2:n suhteen on

$D_2f(x_1,x_2) = 1.4136\ x_1^{0.38}x_2^{-0.38}$

ja tämä **muutosnopeutta pääoman x_2 suunnassa** kuvaava funktio

voidaan derivoida vastaavalla tavalla uudelleen x_2:n suhteen:

$\boxed{\text{merkintä } \downarrow}$

$(D_{22}f(x_1,x_2) =)\ \ D_2(D_2f(x_1,x_2)) = D_2(1.4136\ x_1^{0.38}\mathbf{x_2^{-0.38}}\ )$

$= \ldots$

$= -0.5372\ x_1^{0.38}x_2^{-1.38}$

Tämä funktio mittaa puolestaan

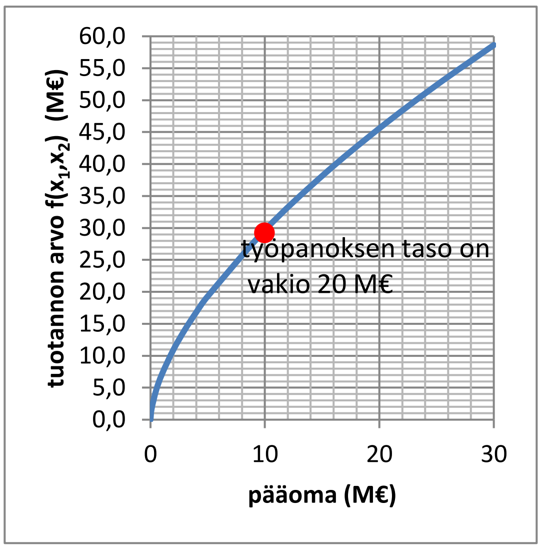
tuotannon arvon $f(x_1,x_2)$ pääoman x_2 suuntaisen kasvun $D_2f(x_1,x_2)$ kiihtyvyyttä.

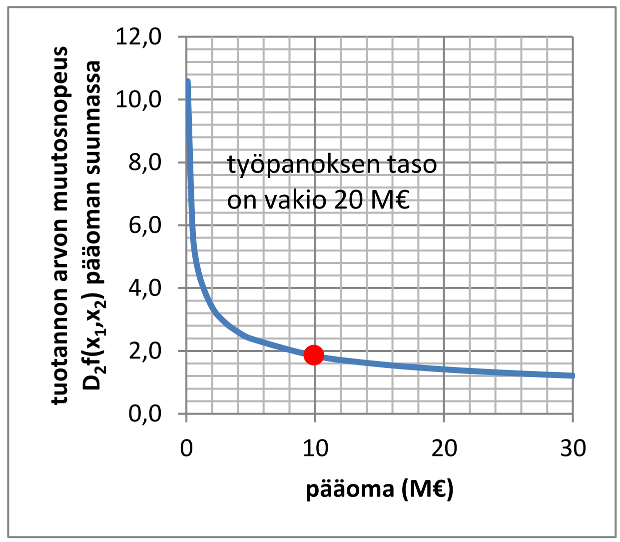
Jos taas x_1 = 20 M€ ja x_2 = 10 M€, niin

- ” taso” f(20,10) = 29.67 M€,

- ”kasvunopeus pääoman suunnassa” $D_2 f(20,10) \approx 1.840$ (> 1) ja

- ”kiihtyvyys” $D_{22} f(20,10) = -0.0699$





Myös pääoman suuntaan

- tuotannon arvo f kasvaa ja — muutosnopeus $D_2 f(20,10) > 0$

- kasvu on voimakkaampaa kuin työn suunnassa — $D_2 f(20,10) \approx 1.84 > D_1 f(20,10) \approx 0.56$

- ja kasvu on hidastuvaa ja hidastuminen voimakkaampaa kuin työn suunnassa

- kasvunopeus pienenee edelleen
$D_{22}f(20,10) = -0.0699$

Kasvunopeutta työpanoksen x_1 suunnassa kuvaava osittaisderivaatta x_1:n suhteen

$D_1f(x_1,x_2) = 0.8664\, x_1^{-0.62}x_2^{0.62}$

voidaan derivoida uudelleen myös pääoman x_2 suhteen:

merkintä
↓

$(D_{21}f(x_1,x_2) =)\ D_2(D_1f(x_1,x_2)) = D_2(0.8664\, x_1^{-0.62}\mathbf{x_2^{0.62}})$

$= 0.8664\, x_1^{-0.62} \cdot 0.68\, \mathbf{x_2^{0.62-1}}$

$= 0.5372\, x_1^{-0.62}x_2^{-0.38}$

Myös tämä funktio mittaa

- mihin suuntaan ja kuinka voimakkaasti

työpanoksen suuntainen kasvunopeus $D_1f(x_1,x_2)$ muuttuu,

- mutta nyt ajatellaan, että **pääoman x_2** arvoa suurennetaan

samalla ”vähän”.

Jos x_1 = 20 M€ ja x_2 = 10 M€, niin

$D_{21}f(20, 10) = 0.5372 \cdot 20^{-0.62} \cdot 10^{-0.38} \approx 0.0350$

Tämä tarkoittaa, että

- jos pääomaa x_2 kasvatetaan 10 M€:sta ”vähän”, esim. 0.1 M€ verran,

- niin tuotannon arvon kasvunopeus työn $D_1f(x_1,x_2)$ suunnassa (!)

suurenee $0.035 \cdot 0.1 \approx 0.0035$ verran.

Siis ”pieni” lisäys pääoman suunnassa

”työntää” tuotannon arvon kasvun työpanoksen suunnassa

”paremmalle kasvu-uralle”:

x_1	$D_1f(x_1,10)$ $<$	$D_1f(x_1,10.1)$
0,1	15,056	15,149
0,5	5,551	5,585
1	3,612	3,634
2	2,350	2,365
3	1,828	1,839
4	1,529	1,539
5	1,332	1,340
10	0,866	0,872
15	0,674	0,678
20	**0,564**	**0,567**
25	0,491	0,494
30	0,438	0,441

Toisin päin:

Kun **kasvunopeutta pääoman x_2 suunnassa** kuvaava osittaisderivaatta x_2:n suhteen

$D_2f(x_1,x_2) = 1.4136\, x_1^{0.38}x_2^{-0.38}$

derivoidaan uudelleen työpanoksen x_1 suhteen, saadaan

merkintä
↓

$(D_{12}f(x_1,x_2) =)\ D_1(D_2f(x_1,x_2)) = D_1\,(1.4136\ \mathbf{x_1^{0.38}}x_2^{-0.38})$

$= \ldots$

$= 0.5372\ x_1^{-0.62}x_2^{-0.38} \qquad = D_{21}f(x_1,x_2) \qquad (!)$

Tämä sama ”muutoksen muutosta” mittaava funktio siis kertoo myös toisin päin

- mihin suuntaan ja kuinka paljon

? suuntainen ? $D_2f(x_1,x_2)$ muuttuu,

- kun ? arvoa suurennetaan samalla ”vähän”.

(Vrt. edellä olevaan.)

$D_{12}f(x_1,x_2) = 0.5372\, x_1^{-0.62} x_2^{-0.38} > 0$

kaikilla työpanoksen x_1 ja pääoman x_2 tasoilla.

Siis ”pieni” lisäys myös työpanoksen suunnassa

”siirtää” tuotannon arvon kasvun pääoman suunnassa

”paremmalle kasvu-uralle”.

Yleisin merkinnöin:

Oletetaan, että funktiolla $f:A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}^n$)

on **1. kertaluvun osittaisderivaatat**

$D_k f(x_1, \ldots, x_n) \quad \left(= \dfrac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k}\right)$ kaikilla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $k = 1,\ldots, n$.

Jokainen näistä määrittelee (muutosnopeutta x_k:n suunnassa kuvaavan) funktion $D_k f : A \to \mathbf{R}$

Jos nämä funktiot ovat taas derivoituvia joukossa $B \subset A$, voidaan määrätä

2. kertaluvun osittaisderivaatat

$$D_{ij}f(x_1, \ldots, x_n) = D_i(\, D_j f(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\boxed{\begin{matrix}\uparrow\\ \mathbf{2.}\\ \downarrow\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}\uparrow\\ \mathbf{1.}\\ \downarrow\end{matrix}}$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}\right)$$

(toisella tavalla merkittynä)

Jos i = j, käytetään merkintää

$$\frac{\partial^2 f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i\, \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial {x_i}^2}$$

Edellisessä esimerkissä nähtiin ja voidaan yleisesti todistaa,

että **derivointijärjestys ei vaikuta tulokseen**:

$\mathbf{D_{ij}f(x_1, \ldots, x_n)}$ (= $D_i(D_j f(x_1, \ldots, x_n)) = D_j(D_i f(x_1, \ldots, x_n))$) = $\mathbf{D_{ji}f(x_1, \ldots, x_n)}$

Jos funktiolla f:A → **R** (A⊂ $\mathbf{R^n}$) on 2. kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, ne voidaan järjestää matriisiksi

$$\boldsymbol{H(x)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D_{11}f(x)} & \boldsymbol{D_{12}f(x)} & \ldots & \boldsymbol{D_{1n}f(x)} \\ \boldsymbol{D_{21}f(x)} & \boldsymbol{D_{22}f(x)} & \ldots & \boldsymbol{D_{2n}f(x)} \\ & \ldots & & \\ & \ldots & & \\ \boldsymbol{D_{n1}f(x)} & \boldsymbol{D_{n2}f(x)} & \ldots & \boldsymbol{D_{nn}f(x)} \end{bmatrix}$$

Tätä (symmetristä) matriisia sanotaan ***Hessen matriisiksi***.

<u>Esim.</u> (jatkoa) Tuotannon arvon osittaisderivaattojen Hessen matriisi on

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -0.5372{x_1}^{-1.62}{x_2}^{0.62} & 0.5372{x_1}^{-0.62}{x_2}^{-0.38} \\ 0.5372{x_1}^{-0.62}{x_2}^{-0.38} & -0.5372{x_1}^{0.38}{x_2}^{-1.38} \end{bmatrix}$$

ja

H(20, 10) = $\begin{bmatrix} -0.0175 & 0.0350 \\ 0.0350 & -0.0699 \end{bmatrix}$

- Päälävistäjällä ovat ”tavalliset” kiihtyvyydet

- ja muut alkiot kuvaavat eri suuntaisten muutosnopeuksien ”muutospyrkimystä” toisen muuttujan suunnassa.

Hessen matriisi kokoaa yhteen funktion f derivaattarakenteen ja sitä tarvitaan mm. optimointitehtävissä ääriarvon laadun tutkimisessa.

Ääriarvojen määräämisestä usean muuttujan funktiolle

Esim. (jatkoa) Edellä on tutkittu erityisesti tuotantopanosten jaolla x_1 = 20 M€ ja x_2 = 10 M€ tuotantofunktiota

f:$\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x_1,x_2) = 2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62}$, missä

x_1 = työpanos (M€), x_2 = pääoma (M€) ja $f(x_1,x_2)$ = tuotannon arvo (M€)

Näyttää siltä, että Arktinen Kala on jakanut kokonaispanoksen

20 + 10 M€ huonosti tuotannontekijöiden kesken.

Miten tämä summa kannattaa jakaa työn ja pääoman kesken, jotta tuotannon arvo maksimoituu?

Tässä maksimointitehtävässä on rajoitteena $x_1 + x_2 = 30$ M€.

Ensin on kuitenkin selvitettävä, miten optimointitehtävä ratkaistaan ilman rajoitteita.

Rajoittamaton optimointi

Esim. Synteettisen kalan rehun tuotannossa tarvitaan tuotantoprosessia säätelemään kemikaaleja A ja B.

Prosessissa jää rehuun lievästi myrkyllistä ainetta. Määrän riippuvuutta näistä kemikaaleista kuvaa

(havaintoihin perustuva ja tilastollisen analyysin avulla saatu) malli

$f: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x,y) = 17.8x^2 + 71.2y^2 - 89.0x - 320.4y + 523.7$,

missä

x= A:n määrä (kg/t), y= B:n määrä (kg/t) ja f(x,y) = myrkyn määrä (g/t).

On selvitettävä, millä A:n ja B:n määrillä myrkyn määrä on pienin mahdollinen?

- Jos B-aineen määrä y vakioidaan mille tahansa tasolle,

f on muuttujan x suhteen yhden muuttujan funktio

ja sen kuvaaja (leikkauspinta y:n kohdalla f:n 3-ulotteisella kuvaajalla)

on (tässä) ylöspäin aukeava paraabeli.

Jos esim. y= 0, niin

$f(x,0) = 17.8x^2 + 71.2 \cdot 0^2 - 89.0x - 320.4 \cdot 0 + 523.7$

$= 17.8x^2 - 89.0x + 523.7$ Piirrä kuvaaja!

- Jos x ”pysäytetään” vakioksi, käy (tässä) samalla tavalla y:n suhteen.

On selvitettävä, missä on piste (x_0, y_0), jossa tällaisten paraabelien alin kohta on yhtä aikaa?

Silloin ”lähestyttäessä” pistettä (x_0, y_0) ja ”kuljettaessa sen ohi”

- x-akselin suunnassa

1) ensin f vähenee → 2) x_0:n kohdalla minimi → 3) sitten f kasvaa

ja muutosnopeuden on oltava

1) ensin $D_x f(x,y_0) < 0$, 2) $D_x f(x_0,y_0) = 0$ ja 3) sitten $D_x f(x,y_0) > 0$

- ja y-akselin suunnassa f:n muutosten on oltava samanlaisia.

1. kertaluvun osittaisderivaattojen tutkiminen ei kuitenkaan riitä, mutta ääriarvon olemassaolo ja laatu voidaan selvittää 2. kertaluvun osittaisderivaattojen avulla.

Yhden muuttujan funktiolla $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

- **voi olla** ääriarvo pisteessä x_0, jos $f'(x_0) = 0$.

- Jos x_0:n ohi kuljettaessa, derivaatan f' merkki muuttuu

  - negatiivisesta → positiiviseksi, niin x_0 on min-piste ja

  - ? → ? , niin x_0 on max-piste.

- Myös jos $f''(x_0) > 0$ → minimi ja

  jos $f''(x_0) < 0$ → ?

Usean muuttujan funktion $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ääriarvopisteet määrätään hyvin samalla tavalla:

Oletetaan, että osittaisderivaatat $D_1f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, D_nf(x_1, \ldots, x_n)$

ovat olemassa joukossa $A \subset \mathbf{R}^n$.

- Jos pisteessä $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on

$$\mathbf{D_1f(x_1, \ldots, x_n) = D_2f(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = D_nf(x_1, \ldots, x_n) = 0},$$

piste x on **ääriarvokelpoinen** piste eli siinä voi olla ääriarvo.

- Jos 2. kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa, **Hessen matriisin avulla** voidaan tutkia,

  - onko $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ todella ääriarvopiste ja

  - onko siinä minimi vai maksimi:

Voidaan osoittaa, että piste $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on

- **minimipiste**, jos $[y_1 \ \ldots. \ \ y_n]$ H(x) $\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} > 0$ kaikilla $(y_1, \ \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$

eli H(x) on **positiivisesti definiitti**.

- Jos $[y_1 \ \ldots. \ \ y_n]$ H(x) $\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} < 0$ kaikilla $(y_1, \ \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$

eli H(x) on **negatiivisesti definiitti**, niin x on **maksimipiste**.

Matriisin definiittisyyden yleinen tutkiminen sivuutetaan tässä ja **rajoitutaan kahden muuttujan funktioihin**, joille voidaan osoittaa), että seuraava tulos on voimassa:

Oletetaan, että funktiolla $f: A \to \mathbf{R}$, jossa $A \subset \mathbf{R}^2$ on olemassa 2. kertaluvun osittaisderivaatat.

- Jos piste $x = (x_1, x_2)$ on ***ääriarvokelpoinen*** eli

$$\boldsymbol{D_1 f(x_1, x_2) = D_2 f(x_1, x_2) = 0} \text{ ja}$$

- jos Hessen matriisin $H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} D_{11}f(x_1, x_2) & D_{12}f(x_1, x_2) \\ D_{21}f(x_1, x_2) & D_{22}f(x_1, x_2) \end{bmatrix}$

1) determinantti $\boldsymbol{\det H(x_1, x_2) > 0}$ ja 2) $\boldsymbol{D_{11} f(x) > 0}$,

niin (x_1, x_2) on ***minimipiste***.

- Jos $\boldsymbol{\det H(x_1, x_2) > 0}$ ja $\boldsymbol{D_{11} f(x) < 0}$, niin (x_1, x_2) on ***maksimipiste***.

Esim. (jatkoa) Myrkyn määrä

$f:\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x,y) = 17.8x^2 + 71.2y^2 - 89.0x - 320.4y + 523.7$,

x= A:n määrä (kg/t), y= B:n määrä (kg/t) ja f(x,y) = myrkyn määrä (g/t).

Osittaisderivaatat:

$D_1f(x,y) = D_1(17.8\mathbf{x^2} + 71.2y^2 - 89.0\mathbf{x} - 320.4y + 523.7)$

$= \ldots$

$= 35.6x - 89.0$

$D_2f(x,y) = D_2(17.8x^2 + 71.2\mathbf{y^2} - 89.0x - 320.4\mathbf{y} + 523.7)$

$= \ldots$

$= 142.4y - 320.4$

$D_1f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$

$D_2f(x,y) = 0 \quad\quad\quad \ldots$

ja ääriarvokelpoinen piste on x = 2.5 ja y = 2.25 (kg/t).

$D_{11}f(x,y) = D_1(D_1f(x,y)) = D_1(35.6x – 89.0) = 35.6$

$D_{22}f(x,y) = D_2(D_2f(x,y)) = D_2($? $) =$

$D_{21}f(x,y) = D_2(D_1f(x,y)) = D_2(35.6x – 89.0) = 0 = D_{12}f(x,y)$

$H(2.5,2.25) = \begin{bmatrix} 35.6 & 0 \\ 0 & 142.4 \end{bmatrix}$

$\det H(2.5,2.25) = \begin{vmatrix} 35.6 & 0 \\ 0 & 142.4 \end{vmatrix} =$ … $= 5069.44 > 0$

ja $D_{11}f(2.5,2.25) = 35.6 > 0$,

joten (2.5,2.25) (kg/t) on minimipiste.

Myrkyn minimimäärä on f(2.5,2.25) = 52 g/t.

Näillä A:n ja B:n määrillä x = 2.5 kg/t ja y = 2.25 kg/t myrkkyhaitta minimoituu.

Jos prosessia säätelemään kuitenkin tarvitaan kemikaaleja A ja B

(esim.) yhteensä 7 kg/t,

on ratkaistavana

Sidottu ääriarvotehtävä (Lagrange´n menetelmä)

Esim. (jatkoa) On ratkaistava **kohdefunktion**

$f:\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x,y) = 17.8x^2 + 71.2y^2 - 89.0x - 320.4y + 523.7$,

x= A:n määrä (kg/t), y= B:n määrä (kg/t) ja f(x,y) = myrkyn määrä (g/t)

minimi

side-ehdolla $x + y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad g(x,y) = x + y - 7 = 0$

On siis määrättävä sellainen arvopari (x_1, x_2), että

- f saa ääriarvon (min tai max), kun
- rajoituksena on funktion g: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ määrittelemä side-ehto $g(x_1,x_2) = 0$.

Voidaan osoittaa, että funktion $f: A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}^2$) sidottu ääriarvopiste saadaan selville seuraavalla tavalla:

1) Kohdefunktiosta f ja side-ehdosta g tehdään ***Lagrange´n funktio***

$$L: R^3 \to R,\ L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\, g(x_1, x_2)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

λ on ”apumuuttuja”, joka ”huolehtii”, että ratkaisu toteuttaa side-ehdon.

Lagrange´n funktiossa

Lagrange′n funktion ääriarvo

↙ ↓ ↘

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\, g(x_1, x_2)$$

↗ on myös tämän ääriarvo,	↖ kun tämä toteutuu	eli	$g(x_1,x_2) = 0$

2) Määrätään osittaisderivaatat x_1:n, x_2:n ja λ:n suhteen.

3) Ratkaistaan ***ääriarvokelpoinen piste yhtälöryhmästä***

$D_{\mathbf{1}}\, L(\mathbf{x_1}, x_2, \lambda) = 0$, $D_{\mathbf{2}}\, L(x_1, \mathbf{x_2}, \lambda) = 0$ *ja* $D_{\mathbf{3}}\, L(x_1, x_2, \boldsymbol{\lambda}) = 0$.

4) Lagrangen funktion 2. kertaluvun osittaisderivaattojen ja

side-ehdon g 1. kertaluvun osittaisderivaattojen avulla muodostetaan

reunustettu Hessen matriisi:

g:n gradientti

$$\boldsymbol{H(x_1,x_2,\lambda)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{D_1 g(x_1,x_2)} & \boldsymbol{D_2\big(g(x_1,x_2)\big)} \\ \boldsymbol{D_1 g(x_1,x_2)} & \boldsymbol{D_{11} L(x_1,x_2,\lambda)} & \boldsymbol{D_{12} L(x_1,x_2,\lambda)} \\ \boldsymbol{D_2 g(x_1,x_2)} & \boldsymbol{D_{21} L(x_1,x_2,\lambda)} & \boldsymbol{D_{22} L(x_1,x_2,\lambda)} \end{bmatrix}$$

g:n gradientti

Jos ***det*** $\boldsymbol{H(x_1,x_2,\lambda) < 0}$, niin (x_1,x_2) on ***minimipiste*** ja

jos ***det*** $\boldsymbol{H(x_1,x_2,\lambda) > 0}$, niin (x_1,x_2) on ***maksimipiste***.

Esim. (jatkoa) On minimoitava myrkyn määrä

$f:\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x,y) = 17.8x^2 + 71.2y^2 - 89.0x - 320.4y + 523.7$,

kun A:ta ja B:tä on yhteensä 7 kg/t

$x + y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad g(x,y) = x + y - 7 = 0$

ja **Lagrange´n funktio** on

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y) = ?$

Osittaisderivaatat:

$D_1 L(\mathbf{x}, y, \lambda) = D_1(17.8x^2+71.2y^2-89.0x-320.4y+523.7+ \lambda(x+y-7))$

$= 17.8\cdot 2x+0 -89.0\cdot 1-0+07+ \lambda(1+0-0)$

$= 35.6x - 89.0 + \lambda$

$D_2 \, L(x, y, \lambda) = \ldots$

$= 142.4y - 320.4 + \lambda$

$D_3 \, L(x, y, \lambda) = x + y - 7$

Ääriarvokelpoinen piste saadaan yhtälöryhmästä

(1) $35.6x - 89.0 + \lambda = 0$

(2) $142.4y - 320.4 + \lambda = 0 \qquad \Leftrightarrow \; \ldots$

(3) $x + y - 7 = 0$

…

$x = 4.3$ kg/t ja $y = 2.7$ kg/t (ja $\lambda = -64.08$).

$D_{11} \, L(x, y, \lambda) = D_1(35.6x - 89.0 + \lambda) = 35.6$

$D_{21} \, L(x, y, \lambda) = \ldots \qquad = 0 = D_{12} \, L(x, y, \lambda)$

$D_{22} \, L(x, y, \lambda) = \ldots \qquad = 142.4$

$D_1 \, g(x,y) = D_1 \, (x + y - 7) = 1$

$D_2 \, g(x,y) = \ \ldots \qquad = 1$

H = H(4.3,2.7,-64.08) = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 35.6 & 0 \\ 1 & 0 & 142.4 \end{bmatrix}$ ja

$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 35.6 & 0 \\ 1 & 0 & 142.4 \end{vmatrix}$ (+ - +)

= …

= - 178,

joten x = 4.3 kg/t ja y = 2.7 kg/t on minimipiste (jossa x + y = 7 kg) ja minimiarvo on f(4.3,2.7) = 124.09 g/t.

Esim. (jatkoa) Rahaa on 30 M€.

- Miten se kannattaa jakaa työn ja pääoman kesken, jotta tuotannon arvo maksimoituu,

- kun tuotannon arvon riippuvuutta näistä tuotannontekijöistä kuvaa

$f: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x_1,x_2) = 2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62}$, missä

x_1 = työpanos (M€), x_2 = pääoma (M€) ja $f(x_1,x_2)$ = tuotannon arvo (M€)?

Tässä maksimointitehtävässä on rajoitteena

$x_1 + x_2 = 30$ M€ $\Leftrightarrow$

Lagrange´n funktio on

$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\, g(x_1, x_2) =$

$= 2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62} + \lambda(x_1 + x_2 - 30)$

Osittaisderivaatat:

$D_\mathbf{1}\, L(\mathbf{x_1}, x_2, \lambda) = D_1(2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62} + \lambda(x_1 + x_2 - 30)$

$= 2.28 \cdot 0.38\, x_1^{0.38-1} x_2^{0.62} + \lambda(1 + 0 - 0)$

$= 2.28 \cdot 0.38\, x_1^{-0.62} x_2^{0.62} + \lambda$

$(= 1.4136\, x_1^{-0.62} x_2^{0.62} + \lambda)$

$D_\mathbf{2}\, L(x_1, \mathbf{x_2}, \lambda) = D_2(2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62} + \lambda(x_1 + x_2 - 30)$

$= 2.28 x_1^{0.38} \cdot 0.62 \cdot x_2^{-0.38} + \lambda$

$D_\mathbf{3}\, L(x_1, x_2, \boldsymbol{\lambda}) = D_3(2.28\, x_1^{0.38} x_2^{0.62} + \lambda(x_1 + x_2 - 30)$

$= x_1 + x_2 - 30$

Ääriarvokelpoinen piste:

(1) $2.28 \cdot 0.38\, x_1^{-0.62} x_2^{0.62} + \lambda = 0$

(2) $2.28 x_1^{0.38} \cdot 0.62 \cdot x_2^{-0.38} + \lambda = 0$

(3) $x_1 + x_2 - 30 = 0$

(3) $\Leftrightarrow$ $x_2 = 30 - x_1$ (sijoitetaan (1) ja (2))

(4) $2.28 \cdot 0.38\, x_1^{-0.62} (30 - x_1)^{0.62} + \lambda = 0$

(5) $2.28 x_1^{0.38} \cdot 0.62 \cdot (30 - x_1)^{-0.38} + \lambda = 0$

$\Leftrightarrow$

$2.28 \cdot 0.38\, x_1^{-0.62} (30 - x_1)^{0.62} + \lambda = 2.28 x_1^{0.38} \cdot 0.62 \cdot (30 - x_1)^{-0.38} + \lambda$

…

$x_1^{-1}(30 - x_1)^1 = \frac{0.62}{0.38}$, josta saadaan

…

$x_1 = 11.4$ M€ ja $x_2 = 30 - 11.4 = 18.6$ M€ ja ($\lambda = -1.1736$)

On varsin selvää(?), että tämä on maksimipiste, mutta Hessen matriisin avulla tämä varmistuu:

$D_{11}\, L(x_1, x_2, \lambda) = D_1(0.8664\, x_1^{-0.62} x_2^{0.62} + \lambda)$

$= \ldots$

$= -0.5372 x_1^{-1.62} x_2^{0.62}$

$D_{21}\, L(x_1, x_2, \lambda) = D_2(0.8664\, x_1^{-0.62} x_2^{0.62} + \lambda)$

$= \ldots$

$= 0.5372 x_1^{-0.62} x_2^{-0.38} = D_{12}\, L(x_1, x_2, \lambda)$

$D_{22}\, L(x_1, x_2, \lambda) = D_2(1.4136\, x_1^{0.38} x_2^{-0.38} + \lambda)$

$= \ldots$

$= -0.5372 x_1^{0.38} x_2^{-1.38}$

$D_1\, g(x_1, x_2) = D_1(x_1 + x_2 - 30) = 1$

$D_2\, g(x_1,x_2) = D_2(x_1 + x_2 - 30) = 1$

$D_{11}\, L(11.4, 18.6,(-1.1736)) = -0.0638$

$D_{21}\, L(11.4, 18.6,(-1.1736)) = 0.0391 = D_{12}\, L(11.4, 18.6,(-1.1736))$

$D_{22}\, L(11.4, 18.6,(-1.1736)) = -0.0240$

$$H = H(11.4, 18.6,(-1.1736)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0.0638 & 0.0391 \\ 1 & 0.0391 & -0.0240 \end{bmatrix}$$

$|H| = \ldots$

$= 0.166 > 0$, joten ? .

Kun kokonaispanoksesta **30 M€** jaetaan työlle $x_1 = 11.4$ M€ ja

pääomalle $x_2 = 18.6$ M€, tuotannon arvo maksimoituu ja

$f_{max}(11.4, 18.6) =$ **35.2 M€** ($>$ 30 M€ !)