Tiistai/Keskiviikko

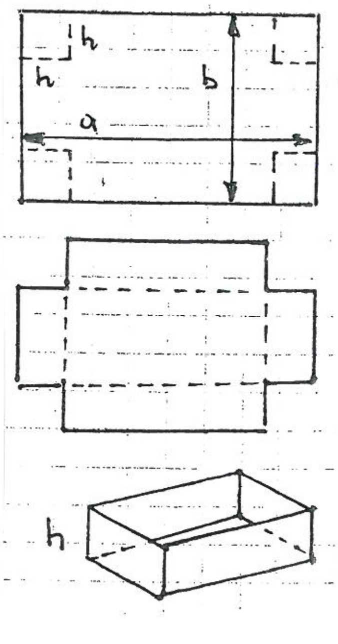
- Harjoitustehtävät (ratkaistaan laskuharjoituksessa)

H1. Calvin on täyttämässä pallonmuodoista ilmapalloa vedellä niin että tilavuuden kasvunopeus on vakio f (yksikkö: dm^3/min). Kuinka nopeasti kasva pallon pinta-ala (yksikkö: dm^2/min) ja säde (yksikkö: dm/min) hetkellä, jolloin pallon pinta-ala on A_0 (yksikkö: dm^2)? Anna vastaukset käyttämällä suureita f ja/tai A_0.
(Jos pallon säde on r, niin sen tilavuus on $\frac{4\pi}{3}r^3$ ja pallokuoren pinta-ala on $4\pi r^2$.)

H2. Olkoot funktiot f ja g riittävästi monta kertaa jatkuvasti derivoituvia. Jos $h_1 = f+g$, niin $h_1'(x) = (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$ (summan derivaatta) $\Rightarrow h_1''(x) = f''(x)+g''(x)$ ja $h_1'''(x) = f'''(x)+g'''(x)$.
a) Jos $h_2 = f \cdot g$, niin $h_2'(x) = (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (tulon derivaatta). Kirjoita $h_2''(x)$ ja $h_2'''(x)$ funktioiden f, g ja niiden derivaattojen avulla.
b) Jos $h_3 = f \circ g$, niin $h_3'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (ketjusääntö; yhdistetyn funktion derivaatta). Kirjoita $h_3''(x)$ ja $h_3'''(x)$ funktioiden f, g ja niiden derivaattojen avulla.

H3. Funktion $f(x) = e^x$ määrittelyjoukko on koko $\mathbb{R}$, joka on origosymmetrinen, joten e^x voidaan kirjoittaa muotoon $e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, missä $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (hyperbolinen cosini, *cosinus hyperbolicus*) on parillinen funktio ja $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (hyperbolinen sini, *sinus hyperbolicus*) on pariton funktio.
a) Osoita, että $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$, $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$ ja että $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
b) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja aidosti kasvava funktio, jonka arvojoukko on $\mathbb{R}$, joten sillä on käänteisfunktio $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*area sinus hyperbolicus; arsinh*), joka on myös jatkuva ja aidosti kasvava.
Osoita, että $sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

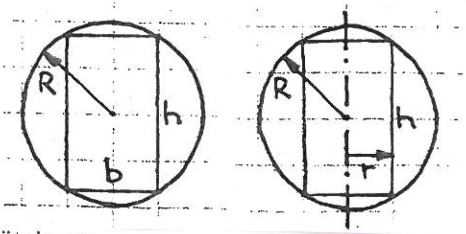
H4. Meillä on suorakaiteen muotoinen peltipala, jonka sivut ovat $a = 8dm$ ja $b = 5dm$. Leikkaamme nurkista pois neliönmuotoiset palat, joiden sivut ovat h. Sen jälkeen käännämme sivut ylös, jolloin saamme kannettoman laatikon, jonka korkeus on h. Mikä h:n arvo maksimoi laatikon tilavuuden ja kuinka suuri on tämä maksimaalinen tilavuus?



Torstai/Perjantai

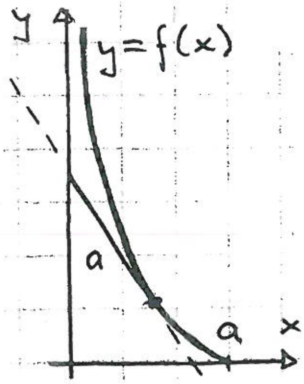
- Kotitehtävät (ratkaistaan etukäteen kotona ja esitetään taululla laskuharjoituksessa)

K1. a) Määritä parametri a niin että raja-arvo $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}$ on joku reaaliluku $b\in\mathbb{R}$ ja määritä myös tämä luku $b=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}$ sillä a:n arvolla.
b) Funktio $g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\sqrt{1+ax}}{x^2}$, $0<|x|<1/|a|$; $g(0)=b$, missä a ja b ovat a)-osasta, on jatkuva origossa $x=0$, koska sen raja-arvo on myös sen arvo origossa. Laske $g'(0)$ derivaatan määritelmän avulla.



K2. a) Osoita, että kaikista suorakaiteista, jotka mahtuvat R-säteiseen ympyrään, on suurin pinta-ala neliöllä, jonka sivu $s=\sqrt{2}R$.
b) Määritä säde r ja korkeus h ympyrän muotoisella lieriöllä, joka mahtuu R-säteisen pallon sisään ja jonka tilavuus on suurin.

K3. Käyrää $y=f(x)=a\cdot\ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x})-\sqrt{a^2-x^2}$, $0<x\le a$ kutsutaan usein koirakäyräksi. Osoita, että sillä osalla käyrän tangenttisuorasta, joka on sivuamispisteen ja y-akselin välissä, on aina pituus a.

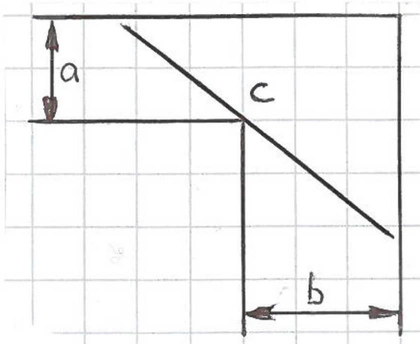


- Palautustehtävät (lasketaan ennen laskuharjoitusta, sen aikana sekä jälkikäteen ja palautetaan teräskaappeihiin A6-8 laskutuvan Y190c ulkopuolella viimeistään klo 12:00 seuraavan viikon tiistaina)

P1 Laske seuraavat raja-arvot (mikäli ne ovat olemassa):
a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$, b) $\lim_{y\to 1}(\frac{y}{y-1}-\frac{1}{\ln y})$, c) $\lim_{u\to 0}(1+\tan u)^{1/u}$,
d) $\lim_{v\to 0}(\frac{\sin v}{v})^{1/v^2}$.

P2 Hopeasepällä on hopealangan pätkä, jonka pituus on L. Hän sahaa sen kahteen osaan, taivuttaa yhdestä osasta ympyrän, toisesta osasta neliön ja juottaa ne yhteen.
a) Millä neliön sivun s ja ympyrän halkaisijan d suhteella s/d neliön ja ympyrän yhteenlaskettu pinta-ala minimoidaan?
b) Millä suhteella s/d tämä pinta-ala maksimoidaan?

P3 Kaksi pitkä käytävää, joiden leveydet ovat a ja b, muodostavat suoran kulman. Määritä pisimmän mahdollisen tangon pituus c, jota voidaan kantaa vaakatasossa kulman ympäri.



- Stack-tehtävien aiheet (linkki tehtäviin löytyy kurssin MyCourses-sivuilta ja ne tulee ratkaista kyseisen viikon sunnuntaihin klo 24:00 mennessä)
  S1. Funktion derivointi
  S2. Funktioiden derivointi
  S3. Ääriarvokohdat ja niiden tyypit
  S4. l'Hôpital
  S5. l'Hôpital