Tiistai/Keskiviikko

- Harjoitustehtävät (ratkaistaan laskuharjoituksessa)

H1. Olkoon $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^5 + x + 1$, jolloin $p(-1) = -1$, $p(0) = 1$ ja $p(1) = 3$.
a) p on jatkuva, joten sillä on (ainakin) yksi nollakohta välillä $]-1, 0[$. Approksimoi tätä nollakohtaa Newtonin menetelmän avulla iteroimalla kolme kertaa ja käyttämällä alkuarvoa $x_0 = -0.5$.
b) $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$, joten p:n arvojoukko on koko $\mathbb{R}$ ja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on surjektio.
Osoita, että p on aidosti kasvava ja siksi myös injektio.
c) Koska $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bijektio, sillä on myös käänteisfunktio $p^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on myös bijektio, jatkuva ja aidosti kasvava ja joka toteuttaa $p^{-1}(-1) = -1$, $p^{-1}(1) = 0$ ja $p^{-1}(3) = 1$.
Laske käänteisfunktion derivaatta pisteessä 3, eli $\frac{d(p^{-1})}{dx}(3) = (p^{-1})'(3)$.

H2. Muodosta funktion $f(x) = x \cdot \ln(1 + 2x)$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x; 0)$, eli Taylor-polynomi, jonka keskus on $x_0 = 0$.

H3. a) Approksimoi lukua $\sqrt[3]{9}$ soveltamalla Newtonin menetelmää apufunktioon $g(x) = x^3-9$ käyttämällä alkuarvoa $x_0 = 2$ ja iteroimalla kolme kertaa.
b) Approksimoi lukua $\sqrt[3]{9}$ muodostamalla funktion $h(x) = x^{1/3}$ kolmannen asteen Taylor-polynomi $P_3(x; 8)$, jonka keskus on $x_0 = 8$ ja käyttämällä approksimaatiota $h(9) \approx P_3(9; 8)$.

H4. Funktion $\exp(t) = e^t$ Maclaurin-sarja on $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$. Sarja suppenee kaikkialla kohti lukua e^t. Käytä tätä sarjaa approksimoidaksesi lukuja a) $e^{-1/2}$ ja b) $e^{2/3}$ niin, että virheen itseisarvo on $< \frac{1}{1000}$. Selitä myös, miten voi olla varma siitä, että virhe ei ole suurempi.

Torstai/Perjantai

- Kotitehtävät (ratkaistaan etukäteen kotona ja esitetään taululla laskuharjoituksessa)

K1. Olkoon $p_n(x)$ polynomi, jonka aste on n ja a eräs sen nollakohta, joten $p_n(a) = 0$. Osoita Taylor-polynomin avulla että $p_n(x) = (x - a) \cdot q(x)$, missä $q(x)$ on polynomi, jonka aste on $n - 1$.

K2. Olkoon $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_0$ reaaliluku, joka ei ole ei-negatiivinen kokonaisluku.
Muodosta funktion $f(t) = (1 + t)^r$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(t; 0)$.

K3. Funktio $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$; $g(0) = 1$ on kaikkialla jatkuva. Approksimoi lukua $\int_0^{1/2} g(x)dx$ käyttämällä funktion $\sin x$ Maclaurin-sarjaa niin, että virheen itseisarvo on $< \frac{1}{1000}$. Selitä myös, miten voi olla varma siitä, että virhe ei ole suurempi.

- Palautustehtävät (lasketaan ennen laskuharjoitusta, sen aikana sekä jälkikäteen ja palautetaan teräskaappeihin A6-8 laskutuvan Y190c ulkopuolella viimeistään klo 12:00 seuraavan viikon tiistaina)

P1 Funktio $f(x) = \ln(1+x^2)-\sqrt{1 + 2x^2}$ on parillinen, joten sillä on paikallinen ääriarvo origossa $x = 0$. Käytä tunnettuja Maclaurin-sarjoja selvittääksesi, onko origo paikallinen maksimi tai minimi.

P2 Kun $x \in]-1, 1[$, niin $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathbb{R}$, jolloin $\arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ja $\arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Osoita että jos $x \in]-1, 1[$, niin $\arcsin(x) = \arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$. (Vihje: tan on aidosti kasvava funktio välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, joten jos $u, v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ja $\tan(u) = \tan(v)$, niin $u = v$.)

P3 Funktio $h(x) = \frac{e^x-1}{x}$, $x \neq 0$; $h(0) = 1$ on kaikkialla jatkuva. Approksimoi $\int_0^2 h(x)dx$ käyttämällä funktion e^t Maclaurin-sarjaa niin, että virheen itseisarvo on $< \frac{1}{1000}$. Selitä myös, miten voi olla varma siitä, että virhe ei ole suurempi.

- Stack-tehtävien aiheet (linkki tehtäviin löytyy kurssin MyCourses-sivuilta ja ne tulee ratkaista kyseisen viikon sunnuntaihin klo 24:00 mennessä)
  S1. Potenssisarjan suppenemissäde
  S2. Lineaarinen approksimaatio
  S3. Newtonin menetelmä
  S4. Maclaurin-polynomi
  S5. Taylor-polynomi