

5 Integraalilaskentaa

- Tässä rajoitutaan yhden muuttujan funktioiden $f:A \rightarrow \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}$) tarkasteluun.
- Yleiset integroituvuuteen liittyvät teoriatarkastelut sivuutetaan.

Derivaatta(-funktio) ja integraalifunktio:

Esim. Hypermarketin lähiympäristöönsä levittämän suoramainonnan kustannuksista halutaan tehdä malli

$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, $y = f(x)$, joka kuvaa

jakelukustannusten y (€/jakelukerta) ja jakeluetäisyyden x (km) välistä riippuvuutta.

- Kustannuksista eri etäisyyksillä on tehty (vain) havainnot:

Kustannukset ovat noin 5300 €/kerta 2 km:n säteellä, 1 km:n etäisyydellä 3000 € ja aivan marketin luona noin 1700 €.

- Lisäksi arvioidaan, että kustannusten kasvuvauhti on **tasaisesti kiihtyvää** jakelusäteen x suhteen. (Miksi tämä voisi olla järkevä oletus?)

- Silloin funktion f 2. derivaatta f'' saa vakioarvon.

- Näiden tietojen avulla voidaan selvittää kustannusten **kasvunopeutta** kuvaava f' ja taas tästä kustannusten **taso** f :

- Funktiosta f (**taso**) voidaan johtaa sen

- **muutosnopeutta** kuvaava derivaattafunktio f' (, jos f on derivoituva).

Toisin päin:

Jos funktio g on f :n derivaatta ($g(x) = f'(x)$), sanotaan funktiota f

g :n **integraalifunktioksi** ja merkintänä käytetään

$$f(x) = \int g(x) dx$$

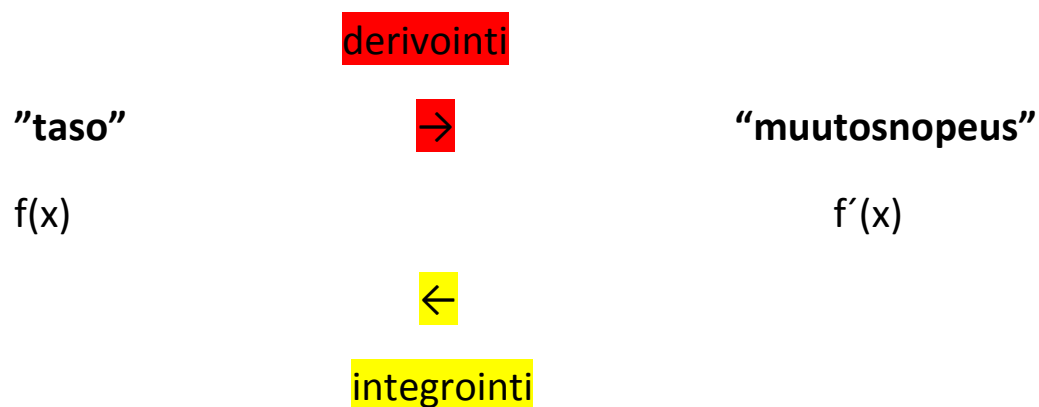
Esim. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ ("taso")

ja derivaatta $f': \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f'(x) = 2x$ ("muutosnopeus").

$$\int 2x dx = x^2 = f(x)$$

on funktion $f': \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f'(x) = 2x$ (eräs (?)) integraalifunktio.

Siis



Tällöin on luonnollista, että integraalifunktioiden määrittämisessä tarvittavat integrointisäännöt ovat derivointisäännöille käänteisiä.

Yleiset teoriataarkastelut funktion integroituvuudesta sivuutetaan.

Integrointisääntöjä

i1. Jos funktio f on funktion F derivaatta eli $f(x) = F'(x)$, niin

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

olipa c mikä tahansa vakio.

Vakio c merkitään vain silloin, kun sitä tarvitaan jatkolaskussa.

- Kaikkien näiden integraalifunktioiden kuvaajat ovat saman muotoisia.

(Hahmottele kuva!)

- Silloin niiden muutosnopeus arvolla x on yhtä suuri.

Jos tarvitaan erityinen 1-käsitteinen ratkaisu, tarvitaan alkuehto, joka "asettaa" integraalifunktion oikealle tasolle.

i2. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

i3. Jos funktio f on integroituva pisteessä x ja a on vakio, niin

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

i4. Summan integrointisääntö

Jos funktiot f ja g ovat integroituvia pisteessä x , niin

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Sääntöjen voimassaolo voidaan tarkistaa helposti derivoimalla.

Näiden sääntöjen avulla saadaan selville kaikkien **polynomifunktioiden**

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

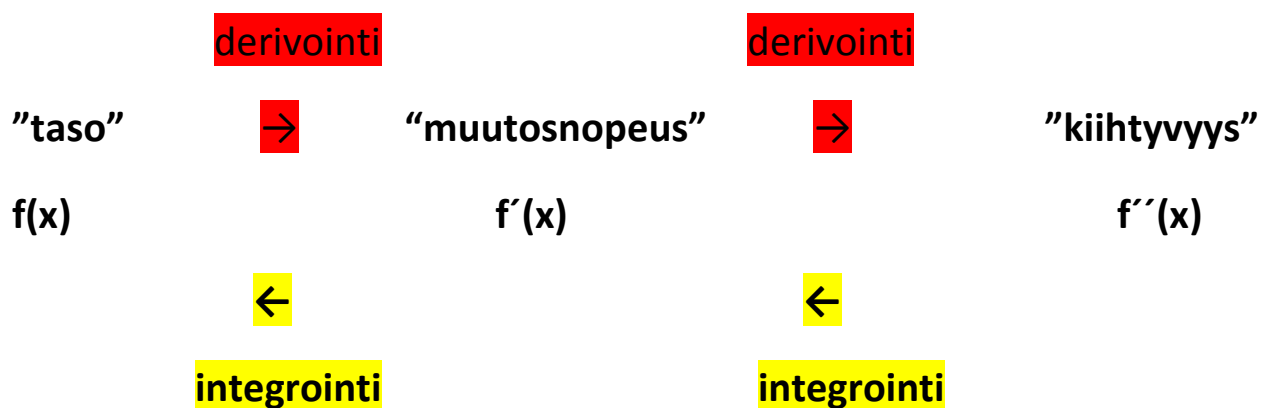
integraalifunktiot.

Esim. (jatkoa) Suoramainonnan kustannukset:

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, y = f(x), \text{ missä}$$

x = jakeluetäisyys (km) ja $f(x)$ = kustannus (€/jakelukerta).

Derivointi ja integrointi ”etenevät eri suuntaan”



Jos (jakelualueen geometriaan perustuva) oletus kustannusten kasvun kiihtyvyyden tasaisuudesta on oikea, niin

f:n 2. derivaatta on vakio $f''(x) = a$.

Silloin

$$f'(x) = \int a \, dx = ax + b \quad (b \text{ vakio})$$

ja

$$f(x) = \int (ax + b) \, dx = a \frac{x^2}{2} + bx + c \quad (c \text{ vakio})$$

Kolmen jakelukerran havaintojen mukaan saadaan alkuehdot

$f(0) = 1700$, $f(1) = 3000$ ja $f(2) = 5300$ ja yhtälöryhmä

$$f(0) = 0.5a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1700$$

$$f(1) = 0.5a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3000$$

$$f(2) = 0.5a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5300$$

$$c = 1700$$

$$0.5a + b + 1700 = 3000$$

$$2a + 2b + 1700 = 5300,$$

josta saadaan ratkaisuna $a = 1000$, $b = 800$ ja $c = 1700$ ja jakelukustannusten malliksi

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = 500x^2 + 800x + 1700,$$

missä x = jakeluetäisyys (km) ja $f(x)$ = kustannus (€/jakelukerta).

Tässä ratkaistiin (yksinkertainen) 2. kertaluvun **differentiaaliyhtälö**.

- Jos "arvataan suoraan", että malliksi käy 2. asteen polynomifunktio, integroimisvaihe voidaan (tässä) tietenkin ohittaa.

- Yleisesti kuitenkin on hyvin tärkeää, että funktion derivaattarakenteesta voidaan (joskus) johtaa funktio f ("taso").

i5. Yleiselle **potenssifunktiolle** on voimassa vastaava sääntö kuin i2.

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1)$$

ja erikoistapauksena

$$\int x^{-1} dx = \ln |x|$$

i6. Eksponenttifunktiolle

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad \text{ja} \quad \int e^x dx = e^x$$

Esim. - Ei ole valmista sääntöä integrointia $\int x \cdot 2^x dx$ varten.

- Integroitava funktio on kuitenkin kahden helposti käsiteltävän funktion tulo, joista voidaan "edetä kahteen suuntaan":

$$Dx = 1 \quad \text{ja} \quad \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$D2^x = 2^x \ln 2 \quad \text{ja} \quad \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$$

- Olisiko olemassa tulomuotoisen funktion derivointisäännön kaltainen "tulon integroimissääntö"?

i7. Osittaisintegrointi

Oletetaan, että $u: A \rightarrow \mathbf{R}$ ja $v: A \rightarrow \mathbf{R}$ ovat derivoituvia pisteessä x .

Tulomuotoisen funktion **derivointisäännön** mukaan on

$$D[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

ja tästä taas saadaan integroimalla "takaisin"

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

Yhtälöstä voidaan (esim.) ratkaista

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

↑
Jos tätä ei
osata integroida,
mutta

↑
tämä voidaan
laskea

↑
ja tämä
pystytään
integroimaan

, ongelma ratkeaa.

Esim. (jatkoa)

1. funktio
u(x)
↘

2. funktion
derivaatta v'(x)
✓

$$\int x \cdot 2^x dx$$

$$u'(x) = Dx = 1 \quad \text{ja} \quad v(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$$

u(x)	v'(x)
↓	↓

u(x)	v(x)
↓	↓

u'(x)	v(x)
↓	↓

$$\int x \cdot 2^x dx = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int 1 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} dx$$

$$= x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} \int \ln 2 \cdot 2^x dx$$

$$= \frac{x 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} (+c)$$

Esim. Funktion $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$ integraalifunktio:

Integroitava funktio hahmotetaan tulona

$u'(x)$	$v(x)$
↓	↓

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$$u(x) = ? \quad \text{ja} \quad v'(x) = ?$$

$$\int \ln x \, dx =$$

$u'(x)$	$v(x)$
↓	↓

$u(x)$	$v(x)$
↓	↓

$u(x)$	$v'(x)$
↓	↓

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x \quad (+ c)$$

i8. Yhdistetyn funktion derivointisäännön käänteinen käyttö -Sijoitusmenettely

Yhdistetyn funktion derivointisäännön mukaan funktion $F(x) = g \circ f(x)$ derivaatta pisteessä x on

$$F'(x) = DF(x) = D(g \circ f)(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)),$$

joten

$$\int f'(x) \cdot g'(f(x)) dx = F(x)$$

↑

Muokkaamalla integroitavaa funktiota ”sopivalla tavalla” saadaan sääntö joskus toimimaan:

Esim. 2)
↓ 1)
↓

$$\int x \cdot 2^{-x^2} dx$$

1) Ulkofunktion derivaataksi hahmotetaan $g'(y) = 2^y$ ($y = f(x)$)

ja "sen sisältä" nähdään sisäfunktion lauseke $f(x) = -x^2$,

2) jonka derivaatta ? "järjestetään eteen":

$$\int x \cdot 2^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2x \cdot 2^{-x^2} dx$$

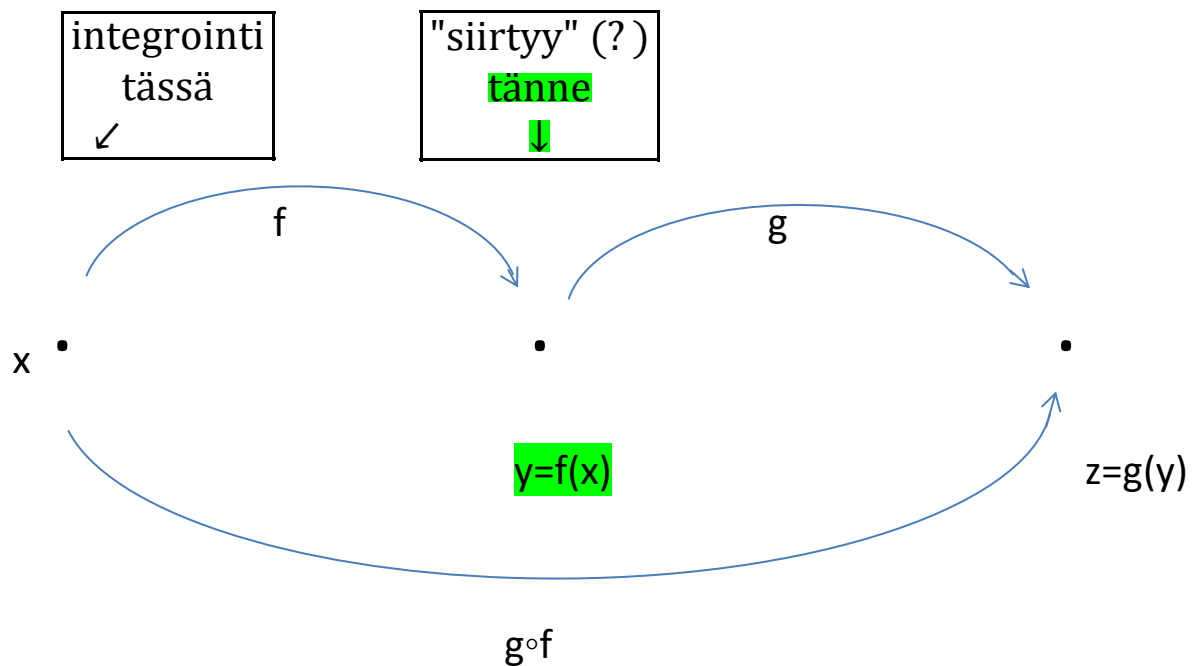
$\uparrow$
 $f'(x)$

$\uparrow$
 $g'(y)$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{-x^2}}{\ln 2} = -\frac{1}{2 \ln 2} 2^{-x^2}$$

Integrointi voidaan tällä tavoin "siirtää muuttujan x kohdalta sisäfunktion f arvon $y = f(x)$ kohdalle":

$$\int f'(x) g'(f(x)) dx = \int g'(y) dy$$



Käytännössä tällainen siirtyminen tehdään usein **sijoitusmenettelyn** avulla:

- Sisäfunktioksi hahmotettu $f(x)$ korvataan "apumuuttujalla" y .

- Tämän derivaatasta $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ muokataan esitykset

$$dy = f'(x)dx \quad \text{ja} \quad dx = \frac{dy}{f'(x)}$$

- Integroitavassa funktiossa kaikki x:ää sisältävät termit korvataan vastaavilla termeillä y:n suhteen.

Esim. (jatkoa)

Sisäfunktio

$y = f(x) = -x^2$

↙

$$\int x \cdot 2^{-x^2} dx$$

$$y = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{-y} \quad (y < 0)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -2x, \quad \text{josta muokataan}$$

$$dx = \frac{dy}{-2x} = \frac{dy}{-2\sqrt{-y}} \quad \text{ja sijoittamalla saadaan}$$

$$\int x \cdot 2^{-x^2} dx = \int \sqrt{-y} \cdot 2^y \frac{dy}{-2\sqrt{-y}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int 2^y dy = -\frac{1}{2} \cdot 2^y \ln 2$$

$$= -\frac{1}{2 \ln 2} 2^{-x^2} \text{ kuten edelläkin saatiin.}$$

Huom. Integrointitulokset voi aina tarkistaa vastaavien derivointisääntöjen avulla.

1. kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö

Differentiaaliyhtälö on yhtälö, jossa on (voi olla)

muuttuja x , funktion f arvo $f(x)$ ja derivaattoja $f'(x)$, $f''(x)$, ...

eri tavoin yhdisteltyinä.

Differentiaaliyhtälö on **1. kertaluvun differentiaaliyhtälö**, jos mukana on vain 1. kertaluvun derivaatta $f'(x)$.

Jos mukana on $f''(x)$, tarkastellaan 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöä, jne.

Alussa olleessa esimerkissä suoramainonnan kustannuksista ratkaistiin 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö **suoraan integroimalla**:

kiihtyvyys $f''(x) \rightarrow$ **muutosnopeus** $f'(x) \rightarrow$ **taso** $f(x)$

Yleensä ratkaisu ei ole näin suoraviivainen.

Esim. On havaittu, että savustetun toutaimen kysynnän

- hintajousto on likimain vakio -1.6 ja

- kysynnän tason tiedetään olevan 1500 kg, kun hinta on 10 €/kg.

Mikä on kysyntäfunktio $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$?

Ensimmäisestä tiedosta saadaan

$$E f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x = -1.6$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1.6}{x}$$

Silloin on myös

s. f: n deriv. ↓	u. f: n deriv. ↓
------------------------	------------------------

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{-1.6}{x} dx \Leftrightarrow \int \boxed{f'(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} dx = \int \frac{-1.6}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline u. f. \\ \hline \searrow \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline s. f. \\ \hline \swarrow \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\ln f(x)} &= -1.6 \cdot \ln x + \boxed{c} \quad (\text{integroimisvakio vain toiselle puolelle}) \\ &= -1.6 \cdot \ln x + \boxed{\ln e^c} \\ &= \ln(x^{-1.6} \cdot e^c), \end{aligned}$$

ja

$$f(x) = e^c \cdot x^{-1.6} = b \cdot x^{-1.6} \quad (\text{merk. } e^c = b)$$

Alkuehdon mukaan $f(10) = 1500$, josta saadaan

$$b \cdot 10^{-1.6} = 1500 \text{ ja}$$

$b = 59716$ ja kysyntää kuvaa funktio

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = 59716 \cdot x^{-1.6},$$

$x =$ hinta (€/kg) ja $f(x) =$ kysynnän määrä (kg).

Yleensä ratkaisussa käytetään seuraavia **merkintöjä** ja (teoreettiset perustelut tässä sivuuttaen) **laskutekniikkaa**:

Kun merkitään **$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$** ja **$f'(\mathbf{x}) = \frac{dy}{dx}$** , on edellisessä esimerkissä

$$Ef(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x = -1.6$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} \cdot x = -1.6 \text{ ja (!?)}$$

$$\frac{dy}{\text{dx}} \cdot \frac{1}{y} \cdot x = -1.6$$


| : x | "·dx", jolloin saadaan

$$\frac{dy}{y} = \frac{-1.6}{x} dx,$$

josta saadaan integroimalla

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{-1.6}{x} dx$$

$$\ln y = -1.6 \cdot \ln x + c$$

jne., kuten edellä.

Tällaisia differentiaaliyhtälöitä sanotaan **separoituviksi**.

Ne voidaan muokata sellaisiksi, että

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\begin{array}{c} \text{toisella puolella} \\ \downarrow \end{array}} & \text{ja} & \boxed{\begin{array}{c} \text{toisella puolella} \\ \downarrow \end{array}} \\
 g(y) \cdot y' & = & t(x) \\
 \boxed{\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{termit vain} \\ y: n \text{ suhteen} \end{array}} & & \boxed{\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{termit vain} \\ x: n \text{ suhteen} \end{array}}
 \end{array}$$

Differentiaaliyhtälön kehittämistä tällaiseksi sanotaan **separoinniksi**.

Ratkaisun yksityiskohdat riippuvat tietenkin funktioista g ja t , mutta integroimisvaiheeseen päästään samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä:

Separoinnin jälkeen on

$$g(y) \cdot y' = t(x), \text{ jossa merkitään } y' = \frac{dy}{dx}, \text{ jolloin}$$

$$g(y) \frac{dy}{dx} = t(x).$$

Tästä "siirretään" dx yhtälön toiselle puolelle, jolloin

$$g(y) \cdot dy = t(x) dx.$$

Lopuksi integroidaan

$$\int g(y) dy = \int t(x) dx$$

(integroimisvakio vain toiselle puolelle)

- Menettelyn täsmälliset perustelut joudutaan sivuuttamaan, mutta
- tuloksen voi aina tarkistaa derivoimalla.

Esim. Markkinoilta tehtyjen havaintojen perusteella oletetaan, että seipisäilykkeen

- hintajousto $E_f(x)$ on suoraan verrannollinen yksikköhintaan x (€/kg) ja
- hintatasolla $x = 20$ €/kg kysyntä $f(x) = 150$ t ja jousto $E_f(20) = -1.7$ (%).

Silloin $Ef(x) = ax$.

Alkuehdosta $Ef(20) = -1.7$ saadaan ... $a = -0.085$,

jolloin

$$Ef(x) = -0.085x$$

Kysyntäfunktio f ratkaistaan differentiaaliyhtälöstä

$$Ef(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x = -0.085x \quad (\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} x = -0.085x)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} \cdot x = -0.085x \quad | \cdot dx \text{ ja } | :x$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-0.085x}{x} dx,$$

josta saadaan integroimalla

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -0.085 dx$$

$$\ln y = -0.085x + c$$

ja

$$y = e^{-0.085x+c}.$$

Tästä saadaan (eksponenttifunktion edellä käsiteltyjen yleisten ominaisuuksien avulla)

...

$$y = f(x) = b \cdot 0.9185^x \quad (\text{merkitään } e^c = b)$$

Alkuehdosta $f(20) = 150$ t saadaan

$$b \cdot 0.9185^{20} = 150 \quad \text{ja} \quad \dots \quad b = 821.3$$

Kysyntäfunktio on

$$f(x) = 821.3 \cdot 0.9185^x.$$

Määrätty integraali

Integraalilaskennan keskeinen sovellus on integroitava funktion kuvaajan ja x-akselin välisten pinta-alojen laskeminen.

Tämän asian tärkeys ei johdu pelkästään geometriasta vaan siitä, että tutkittavien ilmiöiden **määriä voidaan samastaa pinta-alojen kanssa**.

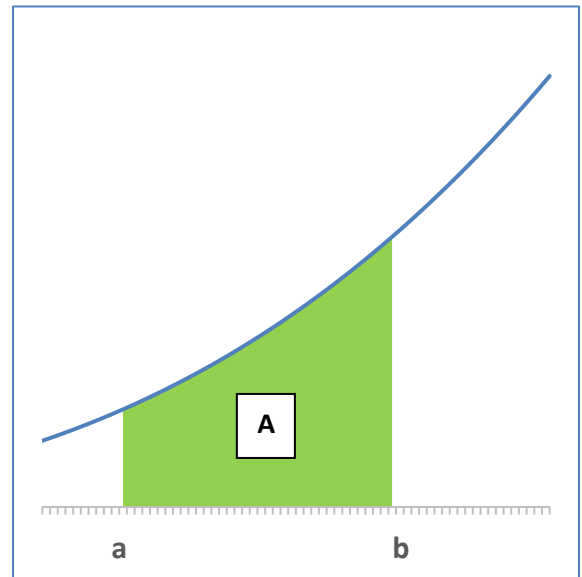
Eräs tällainen sovellus on todennäköisyysslaskennassa jatkuvien satunnaismuuttujien todennäköisyyksien laskeminen.

Voidaan osoittaa, että ei-negatiivisen jatkuvan funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä **pinta-ala A** välin $[a, b]$ kohdalla on

$$A = F(b) - F(a),$$

missä F on f :n integraalifunktio

$$F(x) = \int f(x) dx$$



Näin laskettavasta pinta-alasta käytetään merkintää

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$= \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

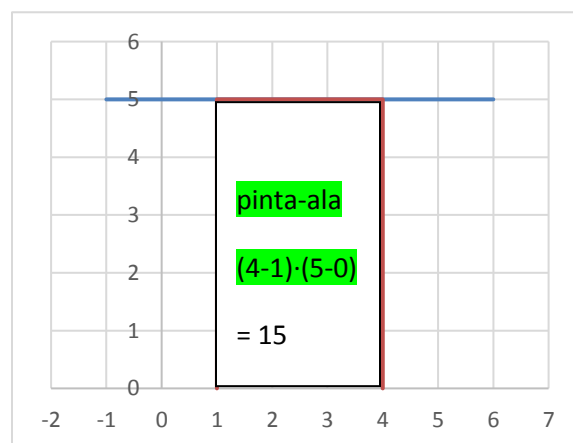
↖ Luetaan: "Sijoitus a:sta b:hen funktioon F."

Esim. Alkeisgeometrian avulla voidaan "tarkistaa", että integroimalla saadaan oikeita pinta-aloja:

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5$

$$\int_1^4 5 dx =$$

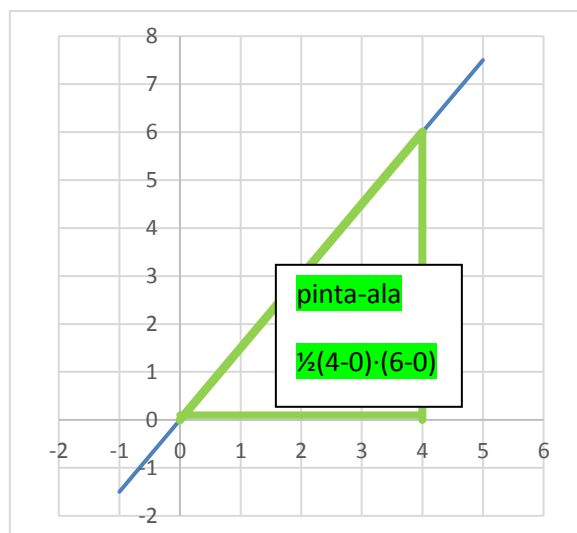
$$= \left[5x \right]_1^4 = 5 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 15$$



b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 1.5x$

$$\int_0^4 1.5x \, dx$$

$$= \int_0^4 1.5 \frac{x^2}{2} = \int_0^4 0.75x^2 = 0.75 \cdot 4^2 - 0^2 = 12$$



c) "Pinta-ala" käsite yleistyy määrätyn

integraalin avulla määriteltynä:

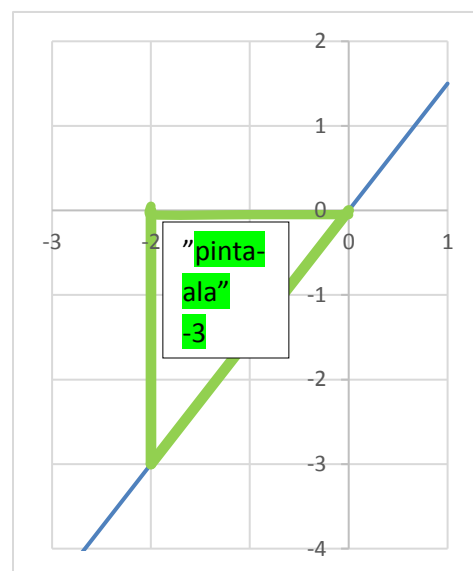
$$\int_{-2}^0 1.5x \, dx =$$

$$= \dots = -3$$

d) "Kokonaispinta-ala" edellisessä on

$$\int_{-2}^4 1.5x \, dx = \dots$$

$$= 9$$



d)-kohdan kokonaispinta-ala

$$\int_{-2}^4 1.5x \, dx = 9 = -3 + 12 = \int_{-2}^0 1.5x \, dx + \int_0^4 1.5x \, dx$$

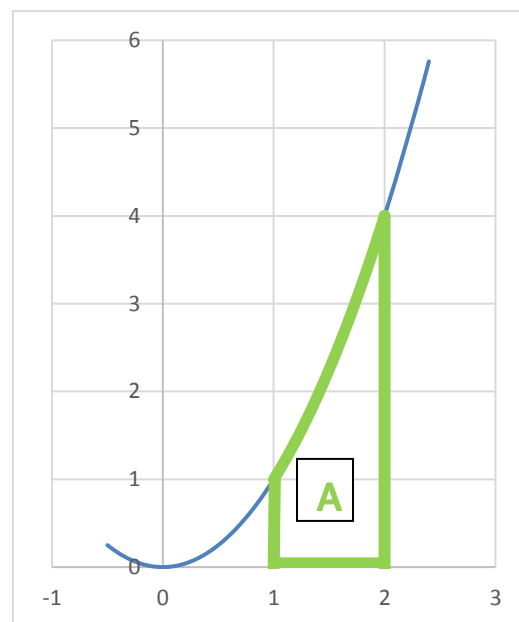
Voidaan osoittaa, että tällainen additiivisuus on yleisesti voimassa:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Esim. Seuraavassa tapauksessa alkeisgeometria ei enää anna vastausta:

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx = \dots$$

$$= 7/3$$



Määrätyn integraalin avulla voidaan ”laskea yhteen” (esim. ajan suhteen) **muuttuvien ”virtausten” kokonaismääriä**:

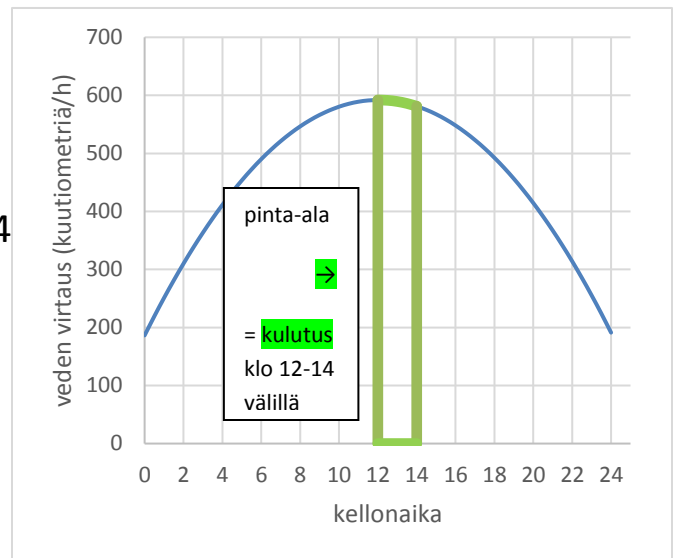
Esim. Kalatehtaan veden kulutusta
kuvaa malli

$$f:[0, 24] \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = -2.8x^2 + 67.4x + 186.4$$

missä x = kellonaika (h) ja

$f(x)$ = veden virtaus m^3/h .

Funktio f kuvaa kulutuksen
muutosnopeutta.



Integroimalla saadaan tämän mallin avulla arvio kulutuksen määrästä
(**taso**) esim. klo 10 ja 14 välissä:

$$\int_{10}^{14} (-2.8x^2 + 67.4x + 186.4) dx = \dots$$

$$= 2353 \text{ m}^3$$

Esim. Kalastuskunta on investoinut kalavesien tuoton parantamiseen.

Odotetaan, että

- investointi alkaa tuottaa heti ”teholla” 100 000 €/v.
- Tuottonopeuden oletetaan kuitenkin vähenevän ”ajan suhteen jatkuvasti” 20 % vuodessa.

Tuotto 10 vuodessa saadaan integraalina

$$\int_0^{10} 100000 \cdot 0.8^x \, dx = 100000 \int_0^{10} 0.8^x \, dx$$

$$= 100000 \left[\frac{0.8^x}{\ln 0.8} \right]_0^{10} = 100000 \cdot \left(\frac{0.8^{10}}{\ln 0.8} - \frac{0.8^0}{\ln 0.8} \right)$$

$$\approx 400\,000 \, \text{€}.$$

- Investoinnin vaikutus vähenee nopeasti, mutta aina vain pieneneviä määriä siitä jää vaikuttamaan ”ikuisesti”.

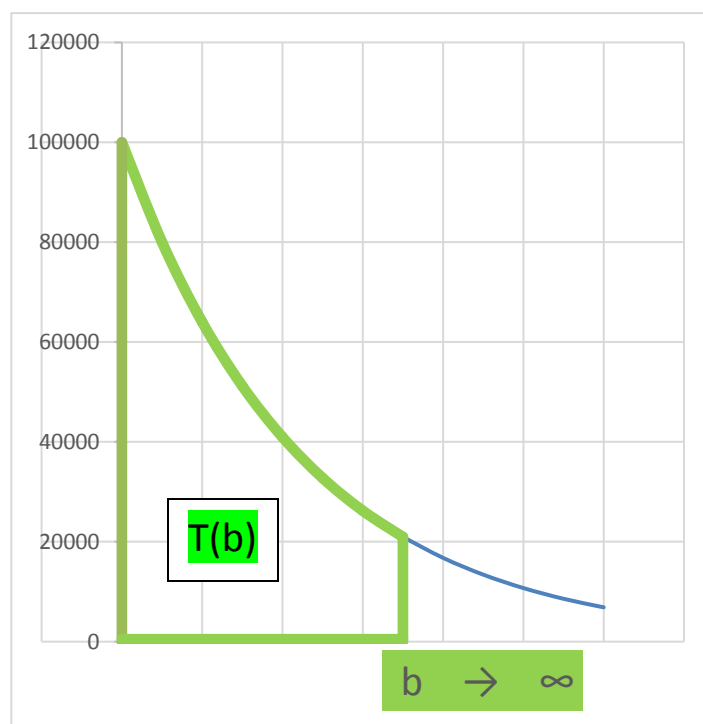
- Kuinka suuri on kokonaistuotto?

Tuotto ajankohtaan b asti on

$$T(b) = \int_0^b 100000 \cdot 0.8^x dx =$$

...

$$= \frac{100\,000}{\ln 0.8} (0.8^b - 1)$$



Jos aikaraja b on "äärettömän kaukana", on kokonaistuotto

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{100\,000}{\ln 0.8} (0.8^b - 1) = - \frac{100\,000}{\ln 0.8} = 448142 \text{ €}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 0.8^b \rightarrow 0, \\ \text{kun } b \rightarrow \infty \end{array}$$

Tällaista määrätyn integraalin raja-arvoa, jossa yläraja $b \rightarrow \infty$, sanotaan **epäoleelliseksi integraaliksi** ja merkintänä (tässä) käytetään

$$\int_0^{\infty} 100000 \cdot 0.8^x \, dx.$$

(Vastaavasti myös alaraja a voi olla $-\infty$ ja raja-arvon käsittely on samanlainen.)

- Edellä on laskettu **investoinnin nimellistuotto**.
- Jos tuotto saadaan käyttöön ”ajan suhteen jatkuvasti” ja korkokanta on esim. **5 %**, se voidaan **diskontata ajan suhteen jatkuvasti**:

10 vuoden tuoton **nykyarvo** on

$$\int_0^{10} \frac{100000 \cdot 0.8^x}{1.05^x} \, dx =$$

...

$$= \frac{100\,000}{\ln 0.7619} (0.7619^{10} - 1) = 343490 \text{ €}.$$

Esim. Bussin vuoroväli on 10 min ja pysäkillä mennään ilman aikataulua.

- Kuinka todennäköistä on, että odotusaika on yli 6 min?
- Kuinka suuri on ”keskimäärin odotettavissa oleva” odotusaika?

Odotusaika X ”voi olla yhtä hyvin” mikä tahansa arvo välillä $[0, 10]$.
Silloin varsin luonnollisesti päätellään, että

- todennäköisyys on ”neljä kymmenestä” eli 40- prosenttinen ja
- keskimäärin odotusaika on 5 min eli ääripäiden 0 ja 10 keskellä.

Jos odotusajan pituuksia mitataan ja niistä tehdään frekvenssijakauma, tulokset tukevat tätä päättelyä:

- jakauma on tasainen ja
- keskimääräinen odotusaika on noin 5 min.

Mallina tällaiselle ***todennäköisyysjakaumalle*** on ***tiheysfunktio***,

joka on ”abstrakti kuvitelma” siitä miltä (tässä) ”äärettömän monen” mittaustuloksen jakauma näyttäisi. (Tästä on tilastotieteen perusteiden luennoissa tarkemmin.)

Funktio on kalibroitu sellaiseksi, että

- **kokonaispinta-ala kuvaajan ja x-akselin välillä on 1** (kaikkien todennäköisyyksien ”summa” 100 %) ja
- **pinta-alat ja todennäköisyydet vastaavat toisiaan.**

Tässä tiheysfunktio saa vakioarvon (Piirrä kuva.)

$$f(x) = \begin{cases} 0.1, & \text{kun } x \in [0, 10] \\ 0 & \text{muualla} \end{cases}$$

Todennäköisyyttä, että odotusaika on yli 6 min $P(X > 6)$, vastaa ”pinta-ala” tiheysfunktion alla välin $[6, 10]$ kohdalla. Se taas voidaan laskea integroimalla:

$$P(X > 6) = \int_6^{10} 0.1 \, dx = \dots = 0.4$$

Todennäköisyydet voidaan laskea myös jakauman kertymäfunktion avulla:

Satunnaismuuttujan X **kertymäfunktio** F kuvaa todennäköisyyksien ”summaa” arvoon x mennessä

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla tämä todennäköisyyksien kertymä (=sitä vastaava pinta-ala) lasketaan tiheysfunktion f integraalina

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\text{Tässä } f(x) = \begin{cases} 0.1, & \text{kun } x \in [0, 10] \\ 0 & \text{muualla} \end{cases}$$

- Kun $x < 0$, on $F(x) = \text{”kertynyt pinta-ala”} = 0$.

- Kun $0 \leq x \leq 10$, on

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x 0.1 dt$$

$$= \int_0^x 0.1 \cdot t = 0.1x - 0.1 \cdot 0 = 0.1x$$

$F(10) = 0.1 \cdot 10 = 1$ ja ”pinta-alaa” ei enää kerry lisää, kun $x > 10$.

Siis

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 0.1x, & \text{kun } x \in [0, 10] \\ 1, & \text{kun } x > 10 \end{cases}$$

Edellä laskettu todennäköisyys saadaan myös kertymäfunktion avulla

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6) = 1 - 0.1 \cdot 6 = 0.4.$$

”Keskimäärin odotettavissa olevaa X :n arvoa” (tässä aikaa) sanotaan **odotusarvoksi EX** ja se saadaan laskemalla integraali (?)

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Tässä

$$EX = \int_0^{10} x \cdot 0.1 \, dx = \dots = 5$$

Tässä (tasajakauman käsittelyssä) integrointi on turhaa vaivaa. Tulokset näkyivät heti suoraan.

Jos jakauma ei ole näin yksinkertainen, ei näin voida oikaista:

Esim. Kun tutkittiin mutusäilykkeen säilyvyyttä X (vrk), tuloksena saatiin, että säilyvyyden jakauma on

$X \sim \text{Exp}(0.001923)$ eli **eksponenttijakautunut parametrilla 0.001923**.

Tällaisen jakauman tiheysfunktio on (Piirrä kuvio.)

$$f(x) = \begin{cases} 0.001923e^{-0.001923x}, & \text{kun } x \geq 0 \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

Esimerkiksi todennäköisyys, että säilyvyys on yli 365 vrk, saadaan (epäoleellisena) integraalina

$$P(X > 365) = \int_{365}^{\infty} 0.001923 \cdot e^{-0.001923x} dx.$$

s.f.
↓

s.f.:n derivaatta
↓

$$\int_{365}^b 0.001923 \cdot e^{-0.001923x} dx = - \int_{365}^b -0.001923 \cdot e^{-0.001923x} dx$$

$$= - \int_{365}^b e^{-0.001923x} = - (e^{-0.001923b} - e^{-0.001923 \cdot 365})$$

$$= - \left(\frac{1}{e^{0.001923b}} - e^{-0.001923 \cdot 365} \right), \text{ joten}$$

$$\uparrow 0, \text{ kun } b \rightarrow \infty$$

Silloin

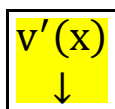
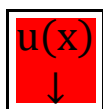
$$P(X > 365) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{365}^b 0.001923 \cdot e^{-0.001923x} dx$$

$$= e^{-0.001923 \cdot 365} = 0.496.$$

Siis ”odotettavissa on”, että hieman alle 50 % säilykkeistä säilyy yli vuoden.

”Keskimäärin odotettavissa oleva” säilyvyys on

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot 0.001923 \cdot e^{-0.001923x} dx.$$



Tässä tarvitaan osittaisintegrointia:

$$\int_0^b \boxed{x} \cdot \boxed{0.001923 \cdot e^{-0.001923x}} dx.$$

$$u'(x) = Dx = 1 \text{ ja}$$

$$v(x) = \int 0.001923 \cdot e^{-0.001923x} dx = \dots = -e^{-0.001923x}$$

1)

2)

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

ja integroimalla ja sijoittamalla saadaan

$$\boxed{\begin{array}{c} u(x) \\ \downarrow \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v'(x) \\ \downarrow \end{array}}$$

$$\int_0^b x \cdot 0.001923 \cdot e^{-0.001923x} dx$$

1)

$$= \left[x \cdot (-e^{-0.001923x}) \right]_0^b$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \uparrow \\ u(x) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \uparrow \\ v(x) \end{array}}$$

2)

$$-\int_0^b 1 \cdot (-e^{-0.001923x}) dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \uparrow \\ u'(x) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \uparrow \\ v(x) \end{array}}$$

1)

$$= b \cdot (-e^{-0.001923b}) - 0 \cdot (-e^{-0.001923 \cdot 0})$$

2)

$$-\frac{1}{0.001923} \int_0^b -0.001923 e^{-0.001923x} dx$$

1)

2)

$$= b \cdot (-e^{-0.001923b}) - \frac{1}{0.001923} \left[e^{-0.001923x} \right]_0^b$$

1)

2)

$$= \frac{-b}{e^{0.001923b}} - \frac{1}{0.001923} (e^{-0.001923b} - e^{-0.001923 \cdot 0}) \rightarrow \frac{1}{0.001923},$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array}}$$

, kun $b \rightarrow \infty$

$$\text{joten EX} = \frac{1}{0.001923} \approx 520 \text{ vrk.}$$