Aalto-yliopisto
ELEC-C7110, Informaatioteknologian perusteet (2019)

Kalevi Kilkki, Juho Kaivosoja

Vastauksia ja ohjeita laskuharjoitustehtäviin

Yleisohjeita

Olkaa huolellisia ja lukekaan tehtävänanto mielellään pariin kertaan. Vastaukset kannattaa antaa mahdollisimman ”järkevässä” muodossa, joka on helppo hahmottaa nopeasti. Tässä mielessä vastaus 3,62924*10^5 on vähintään ongelmallinen. Jos kyseessä on lukumäärä, niin mieluummin 362 924 tai jos kyseessä on vaikkapa bittinopeus, niin mieluummin 363 kbit/s.

Lyhenteet

Olkaa huolellisia yksiköiden kanssa, B = tavu ≠ bit. Lyhennettä b käytetään jonkin verran, mutta silloin sen pitää aina merkitä bittiä eikä tavua. Esimerkiksi bps = bit/s. Valitettavasti kirjallisuudessa (jopa varsin asiallisessa) näkee sekalaisia lyhenteitä. Eräs kirja mm. käyttää systemaattisesti lyhenteitä mb ja gb, kun oikeat lyhenteet kyseisissä tapauksissa olisivat MB ja GB. Siis tarkkaan ottaen mb = millibitti, joka on erittäin pieni yksikkö ja gb = grammabitti on aika erikoinen yksikkö, kuten myös KB = kelvintavu.

Todennäköisyyslaskenta

Useassa laskutehtävässä tarvitaan todennäköisyyslaskennan perusteita. Laskelmat on tehty siten että niiden ratkaisemisen pitäisi olla mahdollista lukion matematiikan pohjalta. Jos tehtävä tuottaa vaikeuksia, niin kannattaa kerrata todennäköisyyslaskennan perusteita. Yhdistelemällä mallissa esitettyjä periaatteita voidaan ratkaista hyvinkin monimutkaisia tapauksia (kunhan oletus riippumattomista tapahtumista pätee).

Desibeleillä laskemisen perusteet

Desibelien muunnokset ja yhteenlaskut ovat niin keskeisiä asioita kurssin kannalta, että jokaisen tenttiin tulevan opiskelijan täytyy ne tuntea. Tässä vielä kertaalleen lyhyesti se miten desibeleillä lasketaan:

1. Desibeli ilmaisee aina tehojen suhteen logaritmisella asteikolla, jossa kantaluku on 10. Esimerkiksi jos teho P1 on kaksi kertaa suurempi kuin teho P2, niin niiden välinen suhde (P1/P2) on 3 dB (tai tarkemmin 3,0103 dB). Vastaavasti jos tehojen suhde on 100:1, niin desibeleissä suhde on 10 $\log_{10}(100)$ = 20 dB.
2. Silloin kun kyseessä tehovahvistukset ja -vaimennukset, voidaan soveltaa desibelien suoraa yhteen- ja vähennyslaskua. Esimerkiksi jos yksi vahvistin vahvistaa +25 dB, toinen vahvistin (sarjassa edellisen kanssa) vahvistaa +15 dB ja lisäksi siirtokanava aiheuttaa vaimennusta 30 dB,

niin nämä desibelit voidaan laskea suoraan yhteen, jolloin havaitaan, että 25 + 15 – 30 = 10, eli alkuperäisen signaalin teho on vahvistunut 10 dB. Huomatkaa, että vastaava laskelma voidaan tehdä lineaarisella asteikolla, mutta silloin pitää käyttää kerto- ja jakolaskuja.

3. dBm on teho suhteessa milliwattiin desibeliasteikolla. Näitä dBm arvoja ei voida laskea yhteen desibeliasteikolla, vaan ne täytyy muuntaa ensin lineaariselle asteikolle ja vasta sitten laskea yhteen. Toisaalta yksinkertaisissa tapauksissa voimme päätellä lopputuloksen, esimerkiksi kun lasketaan yhteen tehot 30 dBm ja 30 dBm, havaitsemme että tällöin teho kaksinkertaistuu, eli desibeliasteikolla teho kasvaa (likimäärin) 3 dB, jolloin tulokseksi saadaan 33 dBm. Mutta monimutkaisemmissa tapauksissa täytyy siis aina tehdä muunnos lineaariselle wattiasteikolle ennen yhteenlaskua. Tulos voidaan sitten tarvittaessa kääntää takaisin dBm-asteikolle.
4. Laskutoimitus 30 dBm + 40 dBm = 70 dBm ei viittaa mihinkään reaalimaailman ilmiöön (jos tällaisen laskelman esittää tentin desibelilaskuna, niin lopputuloksena on automaattisesti 0 pistettä). Samoin kaavoissa, joissa esiintyy teho watteina (kuten Shannonin kaavassa (3.3) tai radiotien signaalien tehosuhteita kuvaavassa kaavassa 5.2), niin niihin ei saa laittaa desibelejä vaan tehoja (wattiasteikoilla ilmaistuna). Huomatkaa lisäksi, että Shannonin kaavassa esiintyy 2-kantainen logaritmi.
5. Valitettavasti akustiikan puolella ei merkinnöissä tehdä selkeä eroa eli akustiikassa desibelit suhteena ja desibelit verrattuna johonkin äänenpaineeseen ovat merkinnöiltään samoja. Esimerkiksi 60 dB akustiikassa tarkoittaa yleensä 60 dB suurempaa tehoa verrattuna kuulokynnykseen (joka on noin 20 µPa). Desibelien merkitys on tällöin ymmärrettävä asiayhteydestä.

Laskuharjoitus 1. Nopeuksia ja kasvuja

Tehtävä 1.1.

Kysymys

Tehtävänäsi on siirtää ilmastomalliin liittyvää dataa 50 TB Otaniemestä Kumpulaan. Käytettävissäsi on yksi siirrettävä 8 TB:n kovalevy sekä polkupyörä. Matkaa on 10 km - mutta onneksi on kesäkuu. Oletetaan että kovalevyllä sekä kirjoitus- että lukunopeus on 200 MB/s.

Toinen vaihtoehto on datayhteys Otaniemen ja Kumpulan välillä.

A. Kuinka nopea datayhteyden tulee vähintään olla, jotta koko datamäärän siirto tapahtuisi nopeammin datayhteydellä kuin polkupyörällä?

B. Entä jos käytettävissä on auto ja kaksi kappaletta 30 TB:n puolijohdelevyjä (solid-state drive, SSD)? Arvioi realistinen luku- ja kirjoitusnopeus puolijohdelevylle.

C. Entä jos data pitäisikin siirtää Macquarie Universityyn Sydneyn esikaupunkiaulueella? Käytettävissä on edelleen B-kohdan puolijohdelevyt. Arvioi realistinen matka-aika, kun oletetaan, että aikaan lasketaan myös paluumatka.

D. Arvioi paljonko datan esittämiseen tarvittaisiin tiheään painettuja kaksipuoleisia A4-arkkeja, jos data esitettäisiin 8 bitin merkeillä, fonttikoolla 8.

Ratkaisu

Tehdään seuraavat lisäoletukset (tenttivastauksessa ja muutenkin on syytä selkeästi ilmaista mitä mahdollisia lisäoletuksia on tehty):

- Reipas opiskelija polkee polkupyörällä 20 km/h
- Autolla kaupunkioloissa pääsee keskimäärin 30 km/h
- Jos kovalevyjä on käytössä useampia, niitä voidaan lukea ja kirjoittaa rinnakkain (mutta tämä on siis oletus eikä välttämättä tarkkaan päde reaalimaailmassa).
- Terat (T) on esitetty 10-järjestelmän muodossa.

Huomatkaa lisäksi, että tehtävänannossa tiedonsiirtonopeus on MB/s eli megatavua sekunnissa (ei siis bittiä sekunnissa).

A-kohdassa matka-ajaksi tulee siten (13*10 km = 150 km)/(20 km/h) = 390 minuuttia. Kovalevylle kirjoittamiseen ja lukemiseen menee yhteensä aikaa 2*50 TB/200 MB/s = 8333 min. Yhteensä aikaa menee 8723 min. Tämä vastaa keskinopeutta

(8 * 50 000 000 Mbit) / (60 * 8723 s) = <u>766 Mbit/s.</u>

Kerroin kahdeksan (8) kaavan alussa johtuu siis siitä, että tässä täytyy tehdä muunnos tavuista biteiksi.

B-kohdassa

Kirjoitus ja luku: 100 TB / 2 GB/s = 13 h 53 min

1 automatka: 10 km / 30 km/h = 20 min

Yhteensä 14 h 13 min

Siirtonopeus 50 000 000 MB / 51180 s = 976,94 MB/s = 7816 Mbit/s

C-kohdassa

Kirjoitus ja luku: 100 TB / 2 GB/s = 13 h 53 min

Edestakainen matka: 2 * (1 h metro+juna + 23 h lento + 1 h juna+bussi) = 50 h

Yhteensä 63 h 53 min

Siirtonopeus 50 000 000 MB / 229980 s = 217,41 MB/s = 1739 Mbit/s

D-kohdassa

2 puolta * 86 riviä * 112 merkkiä = 19264 merkkiä

50 000 000 000 000 B / 19264 B = 2 595 514 951 arkkia

Siis melkein 13 000 tonnia paperia tai paperiarkit päällekkäin pinossa melkein 260 km

Tehtävä 1.2.

Kysymys

Vuonna 2010 siirretyn mobiilidatan määrä Suomessa oli n. 350 MB/kk liittymää kohti. Vuonna 2017 vastaava lukema oli noin 11,5 GB/kk. Milloin mobiilidatan määrä ylittää 100 GB/kk, jos oletetaan että

A. kasvu on lineaarista ajan suhteen (kasvaa saman määrän vuosittain), tai

B. kasvu on eksponentiaalista ajan suhteen (kasvaa yhtä monta prosenttia joka vuosi)?

Laske lisäksi

C. Mikä on liittymän keskimääräinen siirtonopeus (yksikkönä Mbit/s) koko kuukauden yli, kun siirretyn datan määrä on 100 GB/kk.

Ratkaisu

A.

Kasvua on 11500 MB/kk – 350 MB/kk = 11 150 MB/kk

eli 1592,85 MB/kk vuodessa

Kasvua tarvitaan siten 100 000 MB/kk – 11 500 MB/kk = 88 500 MB/kk

eli tähän kuluu 88 500 / 1592,85 = 55,56 vuotta

joten 100 GB/kk lukemaan päädytään noin vuonna 2072.

B.

Kasvua on $(11500/350)^{1/7}$ = 1,646878-kertaisesti vuodessa (lähes 65 % kasvu vuodessa)

100000 / 11500 = 8,695652

Näistä kahdesta luvusta saadaan yhtälö, jossa x on aika vuosissa:

$1{,}646878^x = 8{,}695652$

josta saadaan: x = ln(8,695652) / ln(1,646878) = 4,33 vuotta

eli 100 GB/kk arvoon päästään noin vuonna 2021.

C.

100 GB = 100 000 MB = 800 000 Mbit

1 kk = 30 p = 720 h = 43 200 min = 2 592 000 s

joten keskimääräinen nopeus = 800 000 Mbit / 2 592 000 s = 0,308642 Mbit/s

Huomioita

Käytännössä kumpikaan malli tuskin toteutuu sellaisenaan (tosin Mooren laki, jota käsitellään kurssilla myöhemmin, on toiminut erittäin hyvin 50 vuoden ajan). Eksponentiaalinen kasvu on tyypillistä kasvun alkuvaiheessa, mutta jossain vaiheessa kasvu hidastuu. Käännekohtia on hyvin vaikea ennustaa menneisyyttä kuvaavan datan perusteella. Lineaarinen kasvu on mahdollista jossain väliaikaisesti silloin, kun kasvu alkaa tasaantua, mutta reaalimaailmassa pitkäaikainen lineaarinen kasvu on harvinaista, kun kyseessä on jonkinlainen populaation koon määrän muutos.

C-kohdan tavoitteena on ensisijaisesti osoittaa, että 100 GB/kk ei vaadi mitään äärimmäisen suurta jatkuvaa datanopeutta. Tulos tarkoittaa, että arvoon 100 GB/kk pääsee, kun katsoo tavanomaista videokuvaa noin kaksi ja puoli tuntia päivässä.

Laskuharjoitus 2. Hintajousto

Tehtävä 2.1.

Kysymys

Monopolioperaattorilla on 10 miljoonaa asiakasta, jotka maksavat puheluista 0,20 €/min ja puhuvat keskimäärin 5 min päivässä. Monopolioperaattori haluaa kasvattaa tulojaan muuttamalla hintaa 10 prosentin verran. Oletetaan, että puhelujen hintajousto noudattaa kurssimateriaalin kaavaa 2.1 siten, että hintajoustoparametri $e_p = 0{,}70$.

Kumpi toimii tällöin paremmin, hinnan nostaminen arvoon 0,22 €/min vai hinnan laskeminen arvoon 0,18 €/min? Paljonko tulot kasvavat paremmalla valinnalla?

Ratkaisu

Alkutilanteessa operaattorin tulot ovat 10 000 000 × 0,20 × 5 = 10 M€/päivä. Käytetään hintajouston kaavaa

$$ln(K) = a - e_p \cdot ln(h)$$

Jos kysyntä ilmaistaan asteikolla min/päivä/asiakas, niin K = 5 ja parametri a = 0,4828 (tämä saadaan yllä esitetystä kaavasta, koska muut parametrit tunnetaan).

Nyt kysyntä voidaan laskea, kun hintaa muutetaan joko ylös- tai alaspäin. Tulokset:

- Ylöspäin arvoon 0,22 €/min: Kysyntä = 4,68 min/päivä, tulot per asiakas = 1,029 €/päivä eli yhteensä 10 290 000 €/päivä.
- Alaspäin arvoon 0,18 €/min: Kysyntä = 5,38 min/päivä, tulot per asiakas = 0,9689 €/päivä eli yhteensä 9 688 861 €/päivä.

Eli selkeästi hinnan korotus toimii paremmin eli silloin tulot kasvavat lähes 3%.

Nämä laskelmat pätevät siis sillä oletuksella, että hinnan muutos ei vaikuta asiakkaiden määrään. Tämä melko luonnollinen oletus silloin, kun palvelun tarjoajalla on monopoli ja palvelu on tarpeellinen lähes kaikille. Tosin laskelma toimii myös, jos oletetaan että vain asiakkaiden määrä muuttuu yllä esitetyn kaavan mukaan (mutta käyttö per päivä pysyy vakiona). Olennaista laskelman lopputuloksen kannalta on hintajoustoparametrin arvo.

Tehtävä 2.2.

Kysymys

Oletetaan kaksi yhtä suurta matkapuhelinoperaattoria (A ja B), joilla molemmilla on miljoona asiakasta. Alkutilanteessa puhelujen hinta on kummallakin 0,10 €/min ja puheluiden määrä on 10 min/päivä/asiakas.

Jos operaattori A laskee ensin hintaa arvoon 0,08 €/min, niin kuinka paljon operaattorin A täytyy saada vähintään lisää asiakkaita, jotta sen kokonaistulot puheluista nousisivat, kun

a) e_p = 0,75 ja h_1 = 0 €/min

b) e_p = 0,50 ja h_1 = 0,10 €/min ?

Käytetään hintajouston kaavaa (koskien keskimääräisen asiakkaan puheluminuutteja, kun kaikilla operaattoreilla on sama hinta) eli kaavaa 2.2 oppimateriaalissa sivulla 45. Lisäksi oletetaan, että operaattori B laskee myös hintansa samaan 0,08 €/min, mutta viiveellä, jolloin operaattori A ehtii houkutella jonkun määrän uusia asiakkaita B:ltä. Tämän jälkeen asiakasmäärät pysyvät jälleen vakioina.

Vain pysyvä tilanne eli kun molempien hinta on sama, tarvitsee huomioida.

Ratkaisu

Käytetään hintajouston kaavaa

$$ln(K) = a - e_p \cdot ln(h + h_1)$$

Jossa alkutilanteessa kysyntä per asiakas K = 10 min/päivä hinnalla *h* = 0,10 €/min.

Huomaa, että kaava voisi tarkoittaa hieman erilaisia asioita:

a) Yksittäisen käyttäjän käytön määrän riippuvuutta hinnasta ilman että asiakkaiden määrä muuttuu.
b) Kokonaiskysyntää palvelulle, kun kaikilla palveluntarjoajilla on sama hinta siten että sekä käyttäjien määrä että käytön määrä asiakasta kohti voi muuttua.
c) Yhden palveluntarjoajalle kokemaa kysyntää, kun palveluntarjoajilla voi olla eri hintoja.

Tässä tapauksessa tulkinta ei voi olla c-kohdan mukainen, koska palvelujen hintaero vaikuttaisi olennaisesti lopputulokseen, ei siis pelkästään yhden operaattorin hinta.

Ero a- ja b-kohtien välillä on siinä, että myös asiakkaiden kokonaismäärä voi muuttua hinnan muuttuessa. Tässä voidaan kuitenkin olettaa, että hinnan muutos ei juurikaan vaikuta asiakkaiden kokonaismäärään (tuskin juuri kukaan jättää ostamatta puhelinta vain siksi että puhelun hinta on 0,10 €/min eikä esimerkiksi 0,08 €/min). Eli tulkitaan malli siten, että vain käytön määrä asiakasta kohden muuttuu (jollain muulla tuotteella tulkinta voisi pikemminkin olla b-kohdan mukainen).

Tehtävässä siis oletettiin:

- a-kohdassa h_1 = 0 ja e = 0,75
- b-kohdassa h_1 = 0,10 €/min ja e = 0,50

Näistä voidaan laskea parametrin *a* arvo, joksi saadaan $a = ln(K) + e_p \cdot ln(h + h_1)$:

- a-kohdassa *a* = 0,5756
- b-kohdassa *a* = 1,4979

Huomaa että näin saadut *a*:n arvot ovat sidottuja käytettyihin yksiköihin.

Nyt a-kohdassa hintajouston kaavalla saadaan uudella hinnalla (0,08 €/min) kysynnäksi K = 11,82 min/päivä/asiakas, josta kokonaistuloksi tulee 11,82 * 0,08 = 0,9457 €/päivä/asiakas.

Tämä on siis pienempi kuin 1 joten asiakkaita täytyy saada vastaavasti lisää, jotta tulot pysyisivät edes ennallaan. Kun jätetään huomiotta välivaihe, jossa asiakasmäärät muuttuvat ja tarkastellaan vain pysyvää tilannetta, asiakkaita täytyy olla jatkossa vähintään

1 000 000*(1/0,9457) = 1 057 371,

jotta kokonaistulot pysyisivät edes ennallaan. Eli hintaa laskevan operaattorin täytyy houkutella 57 371 uutta asiakasta sinä aikana, kun toinen operaattori vielä harkitsee omaa hinnoitteluaan.

Vastaavasti b-kohdassa uudella hinnalla (0,08 €/min) saadaan kysynnäksi 10,54 min/päivä/asiakas, josta kokonaistuloksi tulee 0,8433 €/päivä/asiakas. Jotta kokonaistuotot pysyisivät edes ennallaan, asiakkaita täytyisi olla jatkossa vähintään:

1 000 000*(1/0,8433) = 1 185 854.

Eli hintoja laskevan operaattorin pitäisi saada houkuteltua vähintään 185 854 uutta asiakasta.

Huomioita

B-kohdan oletukset hintajoustosta lienevät lähempänä reaalimaailmaa kuin A-kohdan. 185 854 uutta asiakasta on erittäin suuri määrä, jos oletetaan, että toinen operaattori reagoi nopeasti (kuten sen kannattaa tehdä). Lopputuloksena hintapelin aloittaja saattaa hyötyä hieman, mutta samalla toinen operaattori jää huomattavasti enemmän tappiolle (kuin aloittaja jää voitolle), jos se ainoastaan tiputtaa hinnan ensimmäisen operaattorin tasolle. Hintakilpailuun lähteminen ei siten ole kovinkaan houkuttelevaa liiketoiminnan kannalta, ainakaan tässä esimerkissä tehdyillä oletuksilla.

Laskuharjoitus 3. Signaalit

Tehtävä 3.1.

Kysymys

Valon etenemisnopeus väliaineessa riippuu väliaineen taitekertoimesta. Oletetaan, että valokaapelilla A taitekerroin on 1,5000 ja valokaapelilla B taitekerroin on 1,5002. Kummassa kaapelissa signaali etenee pitemmälle yhden millisekunnin aikana ja kuinka suuri ero etenemismatkoissa syntyy?

Ratkaisu

Valon nopeus tyhjiössä on 299 792 458 m/s (tässä voi käyttää myös likiarvoa 300 000 000 m/s).

- Kaapelilla A saadaan matkaksi 199 861,6 m
- Kaapelilla B saadaan matkaksi 199 835,0 m

Eli ero on noin 26,6 m.

Tehtävä 3.2.

Kysymys

Vastaanotetun signaalin teho on 0,25 nW ja vastaanottimen kaistanleveys on 100 kHz. Signaalin lisäksi vastaanottimeen tulee kohinaa tehoilla -75 dBm ja -80 dBm.

a) Mikä on Shannonin kaavan mukainen teoreettinen siirtokyky?

b) Entä jos vastaanottimen kohinat (-75 dBm ja -80 dBm) kohdistuvat kahdelle eri 50 kHz:n kaistalle siten, että signaalin teho molemmilla kaistoilla on 0,125 nW? Mikä on tällöin kahden kaistan yhteenlaskettu teoreettinen siirtokapasiteetti?

c) Entä mikä on teoreettinen siirtokapasiteetti, jos signaalin koko teho (0,25 nW) laitetaan pienemmän kohinan kaistalle (-80 dBm, 50 kHz)?

Ratkaisu

Shannonin kaava on muotoa:

$$\mathrm{C} = B\log_2(1 + S/N) \quad \left[\frac{bit}{s}\right]$$

Tehtävänä on siis laskea kanavan kapasiteetti, kun tunnetaan signaalin teho (S), kohinateho (N) ja kaistanleveys (B). Periaatteessa helppoa, mutta erityisesti täytyy olla tarkkana yksiköiden kanssa. Kaavassa tehot ovat watteina (tai periaatteessa millä tahansa ”lineaarisella” tehoasteikolla). Kohina täytyy siten muuntaa tehoasteikolle, jotta Shannonin kaavaa voidaan soveltaa. Tässä tehtävässä kohinat ovat (huomaa että asteikoksi vaihdetaan nanowatti, koska signaalin voimakkuus on kerrottu nanowatteina):

$$-75\ dBm = 10^{-75/10}\ mW = 0{,}0316\ nW$$

$$-80\ dBm = 10^{-80/10}\ mW = 0{,}0100\ nW$$

Yhteensä kohinaa on siis 0,0416 nW.

Kun signaalin teho on 0,25 nW ja kaistanleveys on 100 kHz, niin teoreettiseksi kapasiteetiksi saadaan:

$$\mathrm{C} = 100000\log_2(1 + 0{,}25/0{,}0416) = 281\ kbit/s$$

Tämä oli siis a-kohdan vastaus. Vastaavasti b-kohdassa saadaan:

$$\mathrm{C} = 50000\log_2(1 + 0{,}125/0{,}0316) + 50000\log_2(1 + 0{,}125/0{,}0100) = 115 + 188 = 303\ kbit/s$$

Lopuksi c-kohdassa saadaan:

$$C = 50000 \log_2(1 + 0{,}250/0{,}0100) = 235\ kbit/s$$

Esitetyistä vaihtoehdoista paras on siis jakaa lähetysteho erikseen kahdelle 50 kHz:n kaistalle.

Huomioita

Tehon jakaminen tasan kahdelle 50 kHz:n kaistalle ei ole aivan optimaalista, mutta hyvin lähellä sitä (mutta tätä optimointia ei siis kysytty tehtävässä).

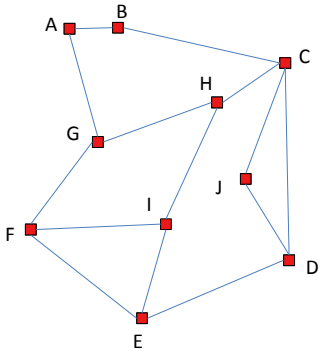
Vaikka desibeli on monesti käytännöllisin tapa esittää tehoja, se on jossain määrin hankala mieltää oikein, jos sitä ei ole tottunut käyttämään. Desibeleillä laskemista kannattaa siis harjoitella erikseen.

Huomatkaa myös, että esimerkiksi -75 dBm on suurempi teho kuin -80 dBm (miinusmerkkinen arvo tarkoittaa siis alle mW tehoa, mitä enemmän negatiivinen, sitä pienempi teho). Suuruusluokkien kanssa on syytä olla tarkkana; radiotekniikassa tehot ovat usein erittäin pieniä, nW tai pW tasoa tai jopa senkin alle.

Laskuharjoitus 4. Verkkojen mitoitus

Tehtävä 4.1.

Kysymys



Mikä on oheisessa verkossa niiden kahden solmupisteen välisen yhteyden saatavuus, jonka saatavuus on alhaisin (*kun jokaiselle yhteysvälille pyritään kuitenkin aina löytämään mahdollisimman lyhyet reitit*)? Jokaisen jänteen saatavuus on 99 % ja jänteiden vikaantumiset tapahtuvat toisistaan riippumatta. Solmupisteet oletetaan täysin luotettaviksi.

Vaihtoehtoisten reittien tulee kulkea kokonaisuudessaan eri jänteiden ja solmupisteiden kautta ja niiden tulee olla ennalta määriteltyjä (reitti ei siis muutu vikatapauksissa). Saatavuus riippuu siis sekä vaihtoehtoisten reittien määrästä että niiden pituuksista mitattuna linkkien määrällä.

Ratkaisu

Tehtävässä tarkasteltiin oheista verkkoa:

Kun jokaisen linkin saatavuus on sama, olennaista on järjestyksessä:

1) vaihtoehtoisten reittien määrä
2) lyhimmän reitin pituus linkkeinä ja
3) vaihtoehtoisen reitin pituus linkkeinä.

Jokaisen solmuparin välillä on vähintään kaksi eri reittivaihtoehtoa, joten tässä pyritään etsimään solmupari, jolla on kaksi reittivaihtoehtoa siten, että lyhyempi reitti on pitkä. Kolmella hypyllä pääsee

mistä tahansa solmusta mihin tahansa toiseen solmuun. Näistä yritetään sitten etsiä solmupari, jolla vaihtoehtoinen reitti on pisin.

Näillä kriteereillä hankalin on solmupari A ja J, jolloin lyhimmät toisistaan riippumattomat reitit ovat

A-B-C-J ja A-G-F-E-D-J

Toisaalta, jos solmut oletetaan täysin luotettaviksi, pitemmäksi vaihtoehtoiseksi reitiksi käy myös A-G-H-C-D-J. Käytännössä vaihtoehtoisten ennalta ohjelmoitujen reittien tulee kulkea eri solmujen kautta, koska vikoja voi esiintyä myös solmuissa.

Lyhemmän reitin saatavuus on = $0{,}99^3 = 0{,}9703$ ja pidemmän reitin saatavuus on $0{,}99^5 = 0{,}9510$. Todennäköisyys, että molemmat reitit ovat viallisia yhtä aikaa, on $(1 - 0{,}9703) \cdot (1 - 0{,}9510) = 0{,}00146$. Tästä saadaan saatavuudeksi A:n ja J:n välille $1 - 0{,}00146 = 0{,}9985$.

Tehtävä 4.2.

Kysymys

Puhelinpalvelujärjestelmään, jossa on kaksi palvelupaikkaa, tulee keskimäärin yksi puhelun 3 minuutin välein. Jos kaikki asiakaspalvelijat ovat varattuina, puhelu katkaistaan välittömästi. Oletetaan, että tästä kohtelusta suivaantuneena asiakkaat eivät koskaan yritä uudestaan. Keskimääräinen palveluaika (onnistuneille yrityksille) on 90 sekuntia.

a. Mikä on puhelun estymisen todennäköisyys?

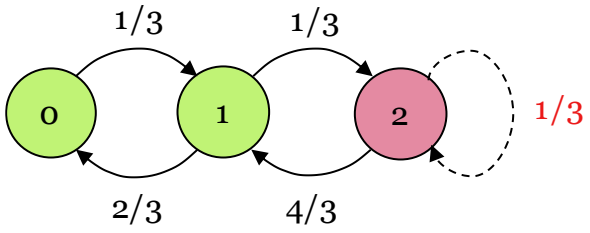
b. Millä todennäköisyydellä molemmat palvelupaikat ovat vapaita?

c. Koska estymisen todennäköisyys on sangen suuri, palveluntarjoaja harkitsee kahta mahdollisuutta: 1) joko lisätä 1 palvelupaikka tai 2) lyhentää palveluaikaa yhden kolmasosan verran (eli siis arvoon 60 s). Kumpi vaihtoehto on parempi, kun kriteerinä on estymisen todennäköisyys?

Ratkaisu

Tehtävässä havaitaan, että mahdollisia tiloja ovat 0, 1 ja 2, jossa lukumäärä siis kertoo, kuinka monta asiakasta on palveltavana. Koska jonotusmahdollisuutta ei ole, niin enempää tiloja ei ole. Kun asiakkaat saapuvat riippumatta toisistaan, vain vierekkäisten tilojen välillä voi tapahtua siirtymisiä.

Asiakkaita tulee 1/3 per minuuttia ja keskimääräinen palveluaika on 75/60 = 1,25 minuuttia, jolloin yhden asiakkaan palvelun päättymisintensiteetti on 1/1,25 = 0,8 minuutissa. Tällöin saadaan seuraava tilakaavio:



Huomatkaa, että kun palveltavana on kaksi asiakasta ja palveluaika on 3/2 minuuttia, keskimäärin palvelun loppumisia tapahtuu 2/(3/2) = 4/3 kertaa minuutissa (tässä ”kun” tarkoittaa sitä, että huomioidaan vain ne ajankohdat, jolloin palveltavana on täsmälleen kaksi asiakasta).

Tilojen todennäköisyydet voidaan laskea merkitsemällä siirtymät vasemmalta oikealle yhtä suuriksi kuin oikealta vasemmalle, eli

$$\frac{1}{3} \cdot P(0) = \frac{2}{3} \cdot P(1) \text{ ja } \frac{1}{3} \cdot P(1) = \frac{4}{3} \cdot P(2)$$

Jossa siis P(0) on tilan 0 todennäköisyys, P(1) tilan yksi todennäköisyys ja P(2) on tilan 2 todennäköisyys. Lisäksi tiedetään, että jossain tilassa järjestelmä on varmasti, joten näiden todennäköisyyksien summa on yksi. Näistä voidaan ratkaista todennäköisyydet ja tulokseksi saadaan:

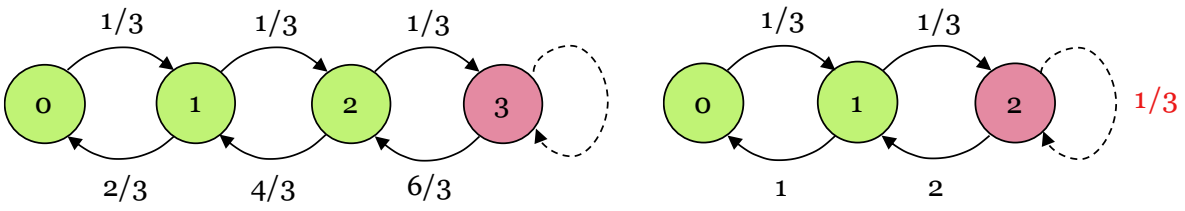
$$P(0) = 0{,}6154, P(1) = 0{,}3077 \; ja \; P(2) = 0{,}0769.$$

Estymisen todennäköisyys on tässä tilan 2 todennäköisyys eli 7,7 %.

Huomatkaa erityisesti, että kun oletetaan että asiakkaat saapuvat satunnaisilla hetkillä, saapuva asiakas ”näkee” tilojen keskimääräiset todennäköisyydet eli estymisen todennäköisyys on sama kuin todennäköisyys että kaikki palvelupaikat ovat varattuina.

Vastaavasti todennäköisyys, että molemmat palvelupaikat ovat vapaita, on 61,5 %.

Lopuksi c-kohdan ajatuksena on vertailla kahta ratkaisua, joissa kokonaispalvelukapasiteetti on sama eli 2,4/min eli 144 asiakasta tunnissa (silloin kun asiakkaita palvellaan jatkuvasti). Tilakaavioiksi saadaan:



Näistä voidaan laskea estojen todennäköisyydet:

Kahdella palvelupaikalla: 4,00 %

Kolmella palvelupaikalla: 1,27 %

Tässä suhteessa siis kolme hitaampaa palvelupaikkaa on parempi kuin kaksi vastaavasti nopeampaa.

Huomioita

Vastaukset tehtävän kohtiin a ja c saa myös suoraan soveltamalla Erlangin estokaavaa (kaava 4.17 oppimateriaalissa).

Vaikka esto kolmella hitaammalla palvelupaikalla on pienempi, niin kahden palvelupaikan tapauksessa palvelu on vastaavasti nopeampaa. Kumpi näistä vaihtoehdoista on siis lopulta parempi, riippuu siitä,

miten asiakkaat painottavat estymistä ja palvelun nopeutta. Itse asiassa, jos palvelupaikkoja olisi vain yksi mutta palveluaika olisi vain 30 s, niin esto olisi 14,3 %.

Looginen ratkaisu estymiseen on usein jonotusmahdollisuus, jota käsitellään myöhemmin tällä kurssilla.

Laskuharjoitus 5. Mobiiliverkot

Tehtävä 5.1

Kysymys

Mikä on tarvittava tukiasemien määrä, kun 1000 km^2 alueella asuu 1,2 miljoonaa ihmistä?

a) Kun on vain matkapuhelinliikennettä siten, että keskimäärin asukas puhuu 8 minuuttia päivässä ja puheen vaatima bittinopeus on 12 kbit/s suuntaansa.

b) Kun puheen lisäksi on dataliikennettä siten, että keskimäärin asukas käyttää datasiirtoon 20 GB kuukaudessa.

c) Kun edellisten lisäksi 0,1 prosenttia asukkaista käyttää jatkuvasti 100 Mbit/s datayhteyttä verkosta päätelaitteeseen.

Yhdessä tukiasemassa oletetaan olevan 3 sektoria, joiden kunkin kapasiteetti on 150 Mbit/s (jaettuna molempiin suuntiin eli verkosta käyttäjälle ja käyttäjältä verkkoon päin). Ota huomioon myös kiiretunnin osuus kokonaisliikenteestä sekä kuormituksen vaihteluista (solujen välillä ja eri päivinä) johtuva keskimääräinen sallittava kuormitustaso.

Lisäksi oletetaan, että kiiretunnin osuus päivän liikenteestä on 7 % ja sallittu keskimääräinen kuormitustaso kiiretunnin aikana on 20 %.

Ratkaisu

A-kohdassa puheliikenteelle saadaan kiiretunnin aikaiseksi kokonaisliikenteeksi

1 200 000 * 0,07 * 8 = 672 000 min

Tämä määrä jaettuna tunnin ajalle tuottaa yhteensä liikennettä keskimäärin:

(672 000/60) * 12 kbit/s * 2 / 1000 = 268,8 Mbit/s

Huomaa että molemmat siirtosuunnat täytyy ottaa huomioon!

Kapasiteettia tarvitaan siten yhteensä, kun huomioidaan sallittu kuormitustaso (20 %):

268,8/0,20 = 1344 Mbit/s.

Kun yhden tukiaseman kokonaiskapasiteetti on 450 Mbit/s, niin a-kohdan vastaukseksi saadaan, että 3 tukiasemaa riittäisi puhelujen hoitamiseen.

B-kohdassa dataliikenteen määrä 20 GB/kk pitää ensin muuntaa kiiretunnin keskimääräiseksi liikenteeksi. Tulokseksi tulee asiakasta kohti kiiretunnin aikana (kun samalla tehdään muunnos gigatavuista megabiteiksi):

(20 * 8000 / 30) * 0,07 = 373 Mbit

Yhteensä asiakkaat tuottavat siten kiiretunnin aikana keskimäärin nopeuden

373 Mbit * 1 200 000 / 3600s =124 444 Mbit/s

Kapasiteettia tarvitaan siten

124 444 / 0,20 = 622 222 Mbit/s

Kun tähän lisätään puheen osuus, niin vastaukseksi saadaan 1386 tukiasemaa (eli yhden solun peitto on noin 0,7 km^2).

C-kohdassa pyydettiin vielä arvioimaan miten paljon tarvitaan lisää kapasiteettia vain sen vuoksi, että jotkut käyttävät verkkoyhteyttä kohtuuttomasti. Jokainen suurkäyttäjä lataa verkosta dataa jatkuvasti nopeudella 100 Mbit/s, joten kiiretunnilla tässä ei ole merkitystä. Yksi promille asiakkaista tarkoittaa 1200 asiakasta, josta kokonaiskuormaksi tulee jatkuvasti 120 000 Mbit/s. Jos sallituksi kuormitustasoksi oletetaan edelleen 0,20 niin kapasiteettia tarvitaan 600 000 Mbit/s. Tukiasemia tarvitaan nyt yhteensä 2719. Tämä tarkoittaisi solun kokoa 0,37 km^2.

Huomioita

Voidaan havaita, että hyvinkin pieni osuus suurkäyttäjiä saattaa tulla kalliiksi operaattorille (tässä promille käyttäjistä tuottaisi puolet liikenteestä). Käytännössä suomalaiset operaattorit ovat kuitenkin katsoneet paremmaksi tarjota mobiililiittymiä ilman merkittäviä rajoituksia. Yksi syy tilanteeseen lienee se, että tavallisen kännykän akku ei kestää jatkuvaa nopeaa tiedonsiirtoa, joka ainakin jossain määrin rajoittaa yletöntä verkon käyttöä. Lisäksi tässäkin yhteydessä voi pohtia sitä tosiasiaa, että mobiilioperaattorit tyypillisesti käyttävät markkinointiin enemmän rahaa kuin verkkoinvestointeihin.

Tehtävä 5.2

Kysymys

Mikä on vastaanotetun signaalin voimakkuus (W) päätelaitteessa, kun tukiaseman lähetysteho on 5 W, lähettimen tehovahvistus on 3 dB, vastaanottimen tehovahvistus on 1 dB ja etäisyys tukiasemaan on 3 km?

a) Kun käytetty taajuus on 800 MHz

b) Kun käytetty taajuus on 1900 MHz

Oletetaan lisäksi, että tässä voidaan käyttää oppimateriaalin kaavaa 5.3.

Ratkaisu

Tämä tehtävä voidaan ratkaista varsin suoraviivaisesti opetusmateriaalin kaavalla 5.2, jossa vaimennus (L) saadaan taajuuden (f) ja etäisyyden (r) funktiona:

$$L = 32{,}44 + 20\,log_{10}(f_{MHz}) + 20\,log_{10}(r_{km}) \quad [dB]$$

tai kaavalla 5.3:

$$L^{*} = 46 + 26\,log_{10}(f_{MHz}) + 34\,log_{10}(r_{km}) \quad [dB]$$

Vastauksiksi saadaan kaavalla 5.2:

- a-kohta: vaimennus L = 100,04 dB, lähetyksen teho (5 W) = 36,99 dBm ja tähän pitää lisätä lähettimen tehovahvistus (3 dB) ja vastaanottimen tehovahvistus (1 dB), jolloin vastaanottimeen saadaan tehoa: 36,99 + 3 – 100,04 + 1 dBm = -59,05 dBm. Tehona tämä on 1,24 nW.
- b-kohta: vaimennus L = 107,56 dB ja vastaanotetun signaalin voimakkuudeksi saadaan -66,57 dBm eli 0,22 nW.

ja vastaavasti kaavalla 5.3:

- a-kohta: vaimennus L = 137,70 dB, lähetyksen teho (5 W) = 36,99 dBm ja tähän pitää lisätä lähettimen ja vastaanottimien tehovahvistukset, jolloin vastaanottimeen saadaan tehoa: 36,99 + 3 – 137,70 dBm + 1 = -96,71 dBm. Tehona tämä on 213 fW.
- b-kohta: vaimennus L = 147,47 dB ja vastaanotetun signaalin voimakkuudeksi saadaan -106,48 dBm eli 22 fW.

Huomioita

Laskutehtävän keskeisin opetus on vastaanottotehojen pienuus ja tässä itse asiassa tehot eivät ole edes erityisen pieniä kaavalla 5.2 laskettaessa. Sen sijaan kaavalla 5.3 a-kohdan vastaanottoteho voi riittää kohtuulliseen yhteyteen, sen sijaan -107 dBm on niin heikko signaali, ettei yhteys todennäköisesti enää toimi kunnolla.

Mobiiliverkossa lisävaimennusta aiheuttaa mm. rakennusten seinät ja muut esteet, lähetysteho on yleensä pienempi ja lisäksi matkapuhelimessa signaalin vastaanotto ei useinkaan ole optimaalinen. Lisäksi on keskeistä havaita, että taajuuksien kasvaessa vaimennus aina kasvaa, kun antennivahvistukset pidetään vakioina. Toisaalta pienemmillä taajuuksilla antennin fyysisen koon tulee olla suurempi, jotta antennivahvistus pysyisi samana: vertaa Mobiiliverkkojen luentokalvon kuvaa 8 (Marconi) vaikkapa kännykän sisäänrakennettuun antenniin.

Laskuharjoitus 6. Tietojenkäsittely

Tehtävä 6.1.

Kysymys

Oletetaan että:

- Ihmisaivot käyttää puheen ymmärtämiseen noin 10 TFLOPSin verran tietojenkäsittelykapasiteettia.
- Vuonna 2017 yhden GFLOPSn tietojenkäsittelykapasiteetin hinta oli 0,025 €.
- Samalla hinnalla saatava tietojenkäsittelykapasiteetti kaksinkertaistuu vuodessa.
- Ihmisen käyttämä puheen ymmärtämisen algoritmi on 100 kertaa tehokkaampi kuin tietokoneen käyttämä algoritmi (eli tietokone tarvitsee 100 kertaa enemmän FLOPSeja kuin ihminen päästäkseen samaan ymmärtämisen tasoon)

Milloin sadan euron laite ymmärtää puhetta yhtä hyvin kuin ihminen?

Ratkaisu

Laskun lähtökohtana on, että ihmisen käsittelykyvyksi arvioidaan 10 TFlopsia (koskien siis puheenkäsittelyä) ja että sadalla eurolla arvioidaan saatavan noin 4 TFlopsia tietojenkäsittelykapasiteettia. Algoritmien tehokkuuseroja on vaikea arvioida, mutta tässä käytännössä oletetaan, että pitkän evoluution tuloksena tehokkuusero olisi 100:1 ihmisen eduksi (tosin tekoälynkin algoritmit kehittyvät). Eli käytännössä tietokoneella pitäisi päästä 1000 TFlopsin tehoon, jotta päästäisiin samaan ”ymmärryksen tasoon.” Tietojenkäsittelyn tehon pitää siis vielä (näiden oletusten mukaan) 250-kertaistua. Tähän menee x vuotta, jossa

$$2^x = 250$$

josta saadaan, että x on noin 8 vuotta eli näin ollen tämä kysytty asia tapahtuisi joskus vuoden 2025 aikana.

Huomioita

Tosin voidaan ehkä olettaa myös tietokoneiden algoritmit kehittyvät tänä aikana, joten ”oikea” vuosiluku saattaa olla aikaisempi kuin 2025. Olennaista käytännössä on, miten syvällistä ymmärrystä vaaditaan eli tarkoitetaanko ”oikeaa ymmärrystä eli mitä puhuja varsinaisesti tarkoittaa sanomisillaan kokonaisuudessaan” vai esimerkiksi ”vain puhuttujen lauseiden kääntämistä tietokoneella käsiteltävään muotoon.”

Joka tapauksessa tällaisesta kyvykkyydestä ei olla kovinkaan kaukana. Toisaalta ymmärryksemme ihmisaivojen toiminnasta on edelleen sangen vajavainen, joten yllätyksiä on vielä varmasti edessä. Jos olet kiinnostunut siitä, miten tietokoneiden ja tekoälyn kehitys vaikuttaa asiantuntijoiden työn kuvaan niin suosittelen esimerkiksi kirjoja:

- R. Susskind & D. Susskind, 2016, The Future of the Professions: How Technology Will Transform the Work of Human Experts
- Brynjolfsson & A. McAfee, 2016, The Second Machine Age: Work, Progress, and Prosperity in a Time of Brilliant Technologies.

Tehtävä 6.2.

Kysymys

a) Mitä saat tulokseksi, kun koodaat 10-järjestelmän luvun 11 Hamming 7/4-koodilla siten, että databitit alkavat pienimmästä päästä. [eli ensimmäinen bitti vasemmalla on pienin eli sen kerroin on yksi ja seuraavan bitin kerroin on 2, sitä seuraavan 4, jne.]

b) Jos vastaanotettu Hamming-koodattu signaali on 1010111, niin mikä on lähetetty data, jos oletetaan, että vastaanotetussa signaalissa on korkeintaan yksi virhe?

Ratkaisu

Ensimmäiseksi pitää kääntää luku 11 binäärijärjestelmälle. Koska 11 voidaan esittää muodossa:

$$11 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$$

niin binäärilukuna 11 on 1101 (huomatkaa vielä että tässä kymmenjärjestelmässä luvut ovat suurimmasta pienempään, kun taas binäärijärjestelmässä pienimmästä suurimpaan). 7/4-koodauksessa pariteettibitit p1, p2 ja p3 lasketaan seuraavan taulukon mukaan (alkuosa taulukosta 6.2 opintomateriaalista siten että databitit on sijoitettu taulukkoon):

Bitti	1	2	3	4	5	6	7
	p1	p2	d1	p3	d2	d3	d4
			1		1	0	1
p1	x		1		1		1
p2		x	1			0	1
p3				x	1	0	1

Tästä voidaan päätellä, että p1 = 1, koska vastaavista databiteistä pariton määrä on ykkösiä (d1, d2 ja d4), vastaavasti p2 = 0, koska sitä vastaavista databiteistä parillinen määrä on ykkösiä. Samalla tavoin saadaan p3 = 0. Eli koodattuna saadaan `1010101`. Lopputulos voidaan tarkistaa taulukosta:

Bitti	1	2	3	4	5	6	7
	p1	p2	d1	p3	d2	d3	d4
	1	0	1	0	1	0	1
p1	1		1		1		1
p2		0	1			0	1
p3				0	1	0	1

Jokaisella rivillä (p1, p2, p3) on siten parillinen määrä ykkösiä, kuten pitääkin.

Tästä voidaan tehdä seuraava taulukko:

Bitti	1	2	3	4	5	6	7
	p1	p2	d1	p3	d2	d3	d4
	1	1	0	1	0	0	1
p1	1		1		1		1
p2		1	0			0	1
p3				1	0	0	1

Eli kaikilla riveillä on parillinen määrä ykkösiä. Mitään virhettä ei siis tässä havaittu, vaan oletuksena on, että vastaanotettu bittikuvio on oikein (eli `0001`, joka siis kymmenjärjestelmässä vastaa lukua 8).

Laskuharjoitus 7. Jonoteoria

Tehtävä 7.1.

Kysymys

Kioskilla on yksi kassa, jonka palveluaika on keskimäärin 1 minuutti asiakasta kohde (palveluaikajakauma on eksponentiaalinen). Asiakkaita tulee tunnin aikana keskimäärin 45 siten että tulevien asiakkaiden välit ovat eksponentiaalisesti jakautuneita.

Oletetaan, että asiakkaat jäävät jonottamaan riippumatta jonon pituudesta.

a) Kuinka suuren osan ajasta kassa on varattuna?

a) Mikä on todennäköisyys, että asiakas pääse heti palveltavaksi ilman jonottamista?

b) Kuinka pitkään asiakkaat joutuvat keskimäärin odottamaan (mukaan lukien ne jotka palvellaan heti)?

Ratkaisu

Ensin täytyy tarkasti selvittää, minkälaisesta jonoista on kysymys:

Tässä on kyseessä M/M/1-jono, jossa on siis yksi palvelupaikka ja ääretön määrä odotuspaikkoja. Tarjottu liikenne on y*h, jossa y = tulevien asiakkaiden määrä aikayksikössä eli 45 tunnissa = 3/4 minuutissa ja h = keskimääräinen palveluaika = 1 min. Tarjottu liikenne eli tässä tapauksessa järjestelmän kuormitus on siten 0,75, joka on (onneksi) alle 1, jolloin jonon käyttäytymisestä voidaan sanoa jotain. Tämä täytyy aina tarkistaa, sillä jos kuormitus on 1 tai yli, kaavat eivät päde, koska mitään tasapainotilaa ei synny (kaavat antavat yleensä äärettömiä tai negatiivisia arvoja).

a) Koska kuormitus on A = 3/4, niin kassa on varattuna samaisen kolme neljäsosaa (75%) ajasta.

Palveltavaksi pääsee heti, jos asiakasta ei juuri tulohetkellä ole palveltavana.

b) Vastaus on siten = 1 – 3/4 = 1/4 = 25 %

Viimeisen kohdan vastaus saadaan soveltamalla opetusmateriaalin kaavaa (7.6)

$$h_w = \frac{A}{1-A}\,h$$

ja tulos on:

$$\left(\frac{3/4}{1-3/4}\right)\cdot 1\,min = 3\,min$$

Tehtävä 7.2.

Kysymys

Oletetaan seuraavaksi, että kioskin asiakkaat ovat niin kiireisiä, että jos odottamassa on jo kaksi asiakasta, niin he poistuvat paikalta ilman ostoksia. Asiakkaita tulee tunnin aikana edelleen keskimäärin 45 siten että tulevien asiakkaiden välit ovat eksponentiaalisesti jakautuneita.

a) Mikä on todennäköisyys, että tuleva asiakas poistuu välittömästi paikalta, koska odottamassa on jo 2 asiakasta?

b) Mikä on keskimääräinen odottavien asiakkaiden määrä?

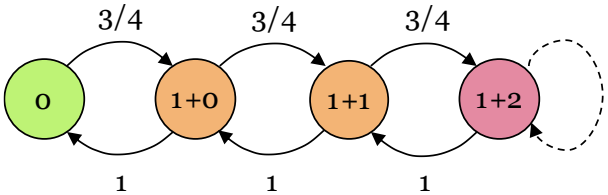
Entä jos kioskia laajennetaan lisäämällä toinen kassa siten, että kassoilla on yhteinen jono. Asiakkaat ovat edelleen niin kiireisiä, että he jäävät asiakkaiksi vain, jos odottavia asiakkaita on jo kolme. Lisäksi oletetaan, että asiakkaiden määrä kasvaa siten, että asiakkaita tulee nyt keskimäärin 60 tunnissa.

c) Kuinka monta minuuttia tunnissa yksi myyjä keskimäärin palvelee asiakkaita?

d) Mikä on keskimääräinen odotusaika (koskien myös niitä asiakkaita jotka pääsevät heti palveltaviksi, mutta ei niitä jotka poistuvat jonon takia välittömästi)?

Ratkaisu

Ensi pitää päätellä mitkä ovat järjestelmän mahdolliset tilat ja tässä tehtävä kannattaa lukea tarkasti! Mahdollisia tiloja ovat: (0 + 0), (1 + 0), (1 + 1) ja (1 + 2), jossa ensimmäinen numero tarkoittaa palveltavien asiakkaiden määrää ja toinen numero odottavien asiakkaiden määrää. Tilakaavioksi saadaan, kun aikayksikkönä on minuutti:



Tilasiirtymät ovat tässä järjestelmän tilasta riippumattomia lukuun ottamatta tilaa 0 (josta siis ei pääse ”alaspäin” ja tilaa (1+2), josta ei pääse ”ylöspäin.”

Tilojen todennäköisyydet saadaan esimerkiksi aloittamalla ”oletuksella” että tilan (0;0) todennäköisyys on 1, ratkaisemalla muiden tilojen todennäköisyydet rekursiivisesti ja skaalaamalla lopuksi todennäköisyydet siten että sallittujen tilojen todennäköisyyksien summa on 1.

Tilojen todennäköisyyksiksi saadaan ennen skaalausta (merkitty *:llä), koska siirtymien määrä aikayksikössä vasemmalta oikealla ja oikealta vasemmalle täytyy olla keskimäärin yhtä suuria (esimerkiksi 0,7·P(0+0) = 1·P(1+1)):

$$P^*(0+0) = 1$$
$$P^*(1+0) = 3/4$$
$$P^*(1+1) = 9/16$$
$$P^*(1+2) = 27/64$$

Skaalauksen jälkeen saadaan (eli ylläolevat luvut jaetaan niiden summalla = 175/64 = 2,7344):

$$P(0+0) = 0{,}3657$$
$$P(1+0) = 0{,}2743$$
$$P(1+1) = 0{,}2057$$
$$P(1+2) = 0{,}1543 = 27/175$$

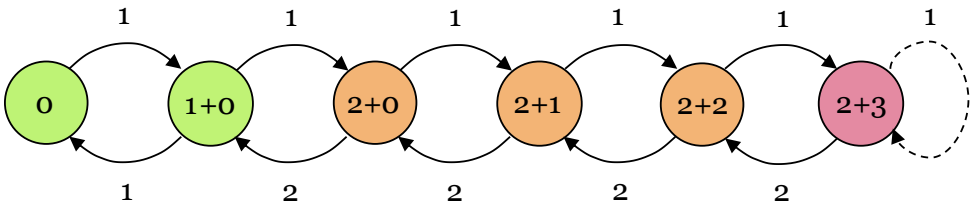
Koska asiakkaat tulevat satunnaisilla hetkillä riippumatta jonon kulloisestakin pituudesta, vastaus a-kohdan kysymykseen on tilan (1+2) todennäköisyys eli 15,4 %.

b-kohdassa on siis laskettava mikä keskimääräinen odottavien asiakkaiden määrä, joka on

1·P(1+1) + 2·P(1+2) = 1·0,2743 + 2·0,1543 = <u>0,5143</u>.

Tämä on siis vastaus b-kohdan kysymykseen. Muista kerroin 2 tilan P(1+2) edessä!

c- ja d-kohdissa tilakaavioksi saadaan (kun aikayksikkö on edelleen minuutti):



Tästä voidaan ratkaista eri tilojen todennäköisyydet samalla tavoin kuin 2-kohdassa eli lähtien tilasta 0 ja lopuksi skaalaamalla todennäköisyyksien summaksi 1. Tulos on:

P(0) = 0,3404
P(1+0) = 0,3404
P(2+0) = 0,1702

P(2+1) = 0,0851
P(2+2) = 0,0426
P(2+3) = 0,0213

c-kohdassa täytyy ensin laskea, kuinka montaa asiakasta keskimäärin palvellaan. Tämä saadaan seuraavasti:

P(1+0) + 2·(P(2+0) + P(2+1) + P(2+2) + P(2+3)) = 0,3404 + 2·(0,1702 + 0,0851 + 0,0426 + 0,0213) = 0,9787

Kun kioskilla on kaksi myyjää, niin keskimäärin myyjä palvelee:

0,9787/2 · 60 min = 29,4 minuuttia tunnissa

Lopuksi kysyttiin, mikä on keskimääräinen odotusaika. Tämä saadaan laskemalla ensin odottavien asiakkaiden määrä:

1 · P(2;1) + 2 · P(2;2) = 1 · 0,0851 + 2 · 0,0426 + 3 · 0,0213 = 0,2340.

Asiakkaita jotka eivät poistu välittömästi, tulee 1 · (1 – P(2+3)) = 0,9787 minuutissa. Odottamiseen heiltä kuluu siten keskimäärin:

$$0{,}2304/0{,}9787\ [1/min] = 0{,}239\ \mathrm{min} = 14{,}3\ s$$

Tämä saadaan Littlen lauseen perusteella (materiaalin kaava 4.1). Tässä tapauksessa Littlen lauseen ”Liikenne” (eli jonon keskimääräinen koko) A = 0,2304 ja $\lambda = 0{,}9787$, jolloin keskimääräinen jonon ”palveluaika” h = A/λ = $14\ s$.

Huomioita

Tehtävän tarkoitus lähinnä esitellä miten periaatteessa yksinkertaisesta jonojärjestelmästä voidaan laskea erilaisia järjestelmän suorituskykyä kuvaavia suureita. Kuten aikaisemmassa Erlang-laskussa, niin käytännössä jonojärjestelmien analyysi tehdä jonkun työkalun avulla (Excelillä pääsee alkuun, mutta vähänkin monimutkaisemmissa järjestelmissä tarvitaan kehittyneempiä työkaluja).