

**Nämä ovat kurssin viimeiset harjoitus- ja kotitehtävät.
Kurssitentti on tiistaina 9.4. klo 13:00-16:00
Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole silloin sallittuja.**

Tiistai/Keskiviikko

- Harjoitustehtävät (ratkaistaan laskuharjoituksessa)
- H1. Määritä separoituvan differentiaaliyhtälön $y'(x) = e^{2y(x)} \cdot \cos x$ yleinen ratkaisu sekä ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = -1$.
- H2. Määritä lineaarisen differentiaaliyhtälön $y'(x) + y(x) = 3 + x^2 \cdot e^{-x}$ yleinen ratkaisu sekä ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 0$.
- H3. Veden korkeus pystysuoran sylinterin muotoisessa säiliössä on $h_0 > 0m$. Hetkellä $t = 0s$ säiliön pohjassa oleva hana avataan, jolloin veden korkeus $h = h(t)$ alkaa laskea differentiaaliyhtälön $h'(t) = -c \cdot \sqrt{h(t)}$ mukaisesti. Tässä $c > 0m^{1/2}/s$ on vakio.
a) Johda separointimenetelmää käyttämällä ratkaisu $h(t) = (\sqrt{h_0} - \frac{ct}{2})^2$.
b) Oletetaan, että 20 minuutin kuluttua veden korkeus on laskenut arvoon $h_0/4$.
Määritä säiliön tyhjenemisaika T , jolle siis $h(T) = 0m$.
- H4. Kappale pudotetaan hetkellä $t = 0$, jolloin sen nopeus $v(t) = y'(t)$ toteuttaa (sopivissa yksiköissä) differentiaaliyhtälön $v'(t) = 1 - (v(t))^2$ ja alkuehdon $v(0) = 0$, kun positiivinen suunta on alaspäin. Määritä $v(t)$ käyttäen osamurtohajotelmaa $\frac{1}{1-v^2} = \frac{1}{(1-v)(1+v)} = \frac{1/2}{v+1} - \frac{1/2}{v-1}$.

Torstai/Perjantai

- Kotitehtävät (ratkaistaan etukäteen kotona ja esitetään taululla laskuharjoituksessa)
- K1. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisut, kun alkuehtoina ovat $y(0) = 2, y'(0) = -1$:
a) $y'' + 7y' + 10y = 0$, b) $y'' + 8y' + 16y = 0$, c) $y'' + 6y' + 13y = 0$.
- K2. Eulerin 2. kertaluvun homogeeninen differentiaaliyhtälö on muotoa $ax^2 \cdot y''(x) + bx \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$, kun $a, b, c \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Se voidaan ratkaista käyttämällä muotoa $y(x) = x^r$ olevaa yritettä, jossa parametri r on vakio.
a) Sijoita tällainen yrite differentiaaliyhtälöön $x^2 \cdot y''(x) - 7x \cdot y'(x) + 15y(x) = 0$ ja ratkaise mahdolliset parametrin arvot r_1 ja r_2 toisen asteen yhtälöstä.
b) Määritä a)-kohdan yhtälöön liittyvän alkuarvotehtävän $y(1) = 2, y'(1) = 4$ ratkaisu, kun tiedetään, että yleinen ratkaisu on muotoa $y(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$.
- K3. Määritä seuraavien epähomogeenisten differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut käyttämällä sopivia yritteitä (kts. luentokalvo 218):
a) $y'' + 7y' + 10y = 10x^2 + 4x + 5$, b) $y'' + 9y = 10 \sin(2x) - 8 \cos(x)$.
- K4. Käytä laskinta tässä tehtävässä ja anna vastaukset vähintään viidellä desimaalilla.
 $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$.
a) Approksimoi integraali $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$ trapetsisäännön avulla jakamalla integroimisväli $[0, \pi/2]$ kahteen yhtä suureen osaväliin.
b) Approksimoi integraali $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$ Simpsonin säännön avulla jakamalla integroimisväli $[0, \pi/2]$ kahteen yhtä suureen osaväliin.
c) Määritä funktion $\cos(x)$ toisen asteen Taylorin polynomi $P_2(x; \frac{\pi}{4})$, jonka keskus on $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ja approksimoi integraali $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$ integraalilla $\int_0^{\pi/2} P_2(x; \frac{\pi}{4}) dx$.
- Palautustehtäviä ei enää ole. Jäljellä oleva aika on viimeisiä kysymyksiä varten.
 - Stack-tehtävien aiheet (linkki tehtäviin löytyy kurssin MyCourses-sivuilta ja ne tulee ratkaista kyseisen viikon sunnuntaihin klo 24:00 mennessä)
S1. Radioaktiivinen hajoaminen
S2. 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö
S3. 1. kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö
S4. 2. kertaluvun lineaariset homogeeniset DY:t
S5. 2. kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen DY