1. *Yksiatomisen ideaalikaasun entropia on*

$$\frac{3}{2}Nk_B \ln E + Nk_B \ln V - Nk_B \ln N + A$$

jossa A on vakio. Näytä, että tästä voidaan saada yhteys sisäenergian E ja lämpötilan T välille:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}.$$

Entroopia on siis $S = \frac{3}{2}Nk_B \ln E + Nk_B \ln V - Nk_B \ln N + A$

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dE} = \frac{d}{dE}\left(\frac{3}{2}Nk_B \ln E\right) = \frac{3}{2}Nk_B \frac{1}{E}.$$

Ideaalisen yksiatomisen kaasun energia on $E = \frac{3}{2}k_B T \cdot N \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}Nk_B \cdot \frac{1}{E} = \frac{1}{T}$

eli $\quad \frac{dS}{dE} = \frac{3}{2}Nk_B \frac{1}{E} = \frac{1}{T}.$

2. a) Käyttäen Maxwellin nopeusjakaumaa

$$n(v)_{Maxwell} = \frac{N}{V}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{3k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

määritä todennäköisin nopeus kaasussa (lämpötila T) olevalle hiukkaselle, jonka massa on m.
b) Onko edellisessä kohdassa ratkaistu nopeus suurempi vai pienempi kuin ”tehollisnopeus”

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Miksi?

a) Todennäköisin v löytyy $n(v)$:n maksimista: $\frac{dn(v)}{dv} = 0$

$$\frac{d}{dv}\frac{N}{V}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{m}{k_BT})^{3/2}v^2e^{-\frac{1}{2}mv^2/(k_BT)} = \frac{N}{V}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{m}{k_BT})^{3/2}(2ve^{-\frac{1}{2}mv^2/k_BT} + v^2\frac{-mv}{k_BT}e^{-\frac{1}{2}mv^2/k_BT})$$

$$= \frac{N}{V}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{m}{k_BT})^{3/2}e^{-\frac{1}{2}mv^2/k_BT}(2v - m\frac{v^3}{k_BT})$$

Tämä on 0 kohdissa $v = 0$, $v = \infty$ ja $2 - m\frac{v^2}{k_BT} = 0$. Kaksi ensimmäistä ovat minimejä, joten maksimi löytyy kohdasta $v = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$.

b) Todennäköisin nopeus on siis pienempi kuin v_{rms} . Tämä ei johdu vain siitä, että jakauma on epäsymmetrinen. Ennemminkin syy on se, että v_{rms} painottaa enemmän suuria nopeuksia, koska se lasketaan nopeuksien neliöiden avulla.

3. *Pokerissa nimeltä seven-card stud jaetaan täydestä sekoitetusta pakasta seitsemän korttia kullekin pelaajalle. Kukin pelaaja valitsee saamistaan korteista viisi saadakseen parhaan käden.*
a) Kuinka monta erilaista seitsemän kortin jakoa voidaan tehdä 52 kortin pakasta?
b) Jos kortteja annetaan neljälle pelaajalle, kuinka monella tavalla ne voidaan jakaa, jos pelaajat voi tunnistaa?
c) Kuinka monta kättä voidaan muodostaa seitsemästä jaetusta kortista?

a) Valitaan 52 kortista 7 korttia. Tämä voidaan tehdä

$$\binom{52}{7} = \frac{52!}{7!(52-7)!} = 133784560 \quad \text{tavalla.}$$

b) Jos pelissä on neljä pelaajaa, on mahdollisia aloitusjakoja

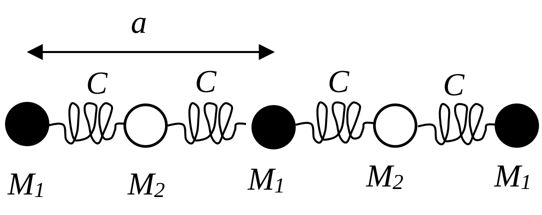
$$\binom{52}{7\ 7\ 7\ 7\ (52-4\cdot 7)} = \frac{52!}{7!7!7!7!24!}.$$

Olkoon pelaajilla nimet Mikko, Pekka, Laura ja Sylvesteri. Koska kukin pelaaja on tunnistettavissa, on jokainen aloitusjakojen permutaatio oma jakonsa. Koska neljällä pelaajalla on mahdollista toteuttaa yhteensä 4! permutaatiota on neljän tunnistettavan pelaajan aloitusjakojen määrä

$$4!\frac{52!}{7!7!7!7!24!} = 4{,}8\times 10^{30}$$

c) Seitsemästä kortista voidaan valita viisi $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$ tavalla.

4. *Yksidimensioinen hila koostuu kahdenlaisista atomeista, joiden massat ovat M_1 ja M_2 sekä hilavakio on a. Atomien väliset voimat kuvataan lineaarisella jousivakiolla C ottaen huomioon vain lähimpien naapuriatomien väliset vuorovaikutukset. Laske hilan pitkittäisten hilavärähtelyjen (fononien) aaltovektorin q ja kulmataajuuden ω välinen riippuvuus, eli dispersiorelaatio, kun* $-\frac{\pi}{a} \le q \le \frac{\pi}{a}$.



Liikeyhtälöt atomeille M_1 ja M_2, kun otetaan huomioon vain naapuriatomit:

- poikkeama M_1 :lle on u_s
- poikkeama M_2 :lle on w_{s-1}

$$\begin{cases} M_1 \dfrac{d^2 u_s}{dt^2} = C\left(w_{s+1} - u_s\right) - C\left(u_s - w_{s-1}\right) = C\left(w_{s+1} + w_{s-1} - 2u_s\right) \\ M_2 \dfrac{d^2 w_{s-1}}{dt^2} = C\left(u_s - w_{s-1}\right) - C\left(w_{s-1} - u_{s-2}\right) = C\left(u_s + u_{s-2} - 2w_{s-1}\right) \end{cases}$$

Sinimuotoinen ratkaisu: $\begin{cases} u \propto e^{i(qx-\omega t)} \\ w \propto e^{i(qx-\omega t)} \end{cases}$, missä q on fononin liikemäärä ja ω kulmataajuus.

$$\Rightarrow \begin{cases} -M_1\omega^2 u_s = C\left(1+e^{iqa}\right)w_{s-1} - 2Cu_s \\ -M_2\omega^2 w_{s-1} = C\left(1+e^{-iqa}\right)u_s - 2Cw_{s-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2C - M_1\omega^2 & -C\left(1+e^{iqa}\right) \\ -C\left(1+e^{-iqa}\right) & 2C - M_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ dispersiorelaatio $\boxed{\omega^4 - \dfrac{2C}{\mu}\omega^2 + \dfrac{2C^2}{M_1M_2}\left(1-\cos qa\right) = 0}$, missä $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{M_1+M_2}{M_1M_2}$.

Dispersiorelaation raja-arvot:

$\underline{q=0}$: $\quad \omega^2\left(\omega^2 - \dfrac{2C}{\mu}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = 0 & \text{akustinen moodi} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{2C}{\mu}} & \text{optinen moodi} \end{cases}$

$\underline{q=\dfrac{\pi}{a}}$: $\quad \omega^4 - \dfrac{C}{\mu}\omega^2 + 4\dfrac{C^2}{M_1M_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = \left(\dfrac{2C}{M_1}\right)^{1/2} & \text{akustinen moodi (jos } M_1 > M_2) \\ \omega = \left(\dfrac{2C}{M_2}\right)^{1/2} & \text{optinen moodi (jos } M_2 < M_1) \end{cases}$

Saadaan pitkittäisten fononien dispersiokäyrät. Ylempi on optisten fononien haara ja alempi akustisten fononien haara. Tavallisesti fononin aaltovektori $|q| << \dfrac{\pi}{a}$, jolloin optisen fononin energia on lähes vakio $\left(E \approx \hbar\omega_0\right)$ ja akustisen fononin energia on pieni $\left(E << \hbar\omega_0\right)$.