ELEC-C3210 Materiaalien ominaisuudet **8. harjoitus, malliratkaisut**

1. *Tarkastellaan elektronin liikettä kiteessä klassisen mallin avulla. Elektroni on sähkökentän E aiheuttamassa kiihtyvässä liikkeessä. Keskimäärin ajan* τ *kuluttua se törmää kidehilaan ja menettää kaiken nopeutensa. Yhdessä ulottuvuudessa elektronin liikeyhtälö voidaan tällöin kirjoittaa muodossa*

$$m^* \frac{dv}{dt} + \frac{m^*}{\tau} v = -eE\ ,$$

missä m^* *on elektronin efektiivinen massa. a) Ratkaise yhtälöstä ajautumisnopeus ajan funktiona olettaen, että elektroni on aluksi levossa. b) Osoita, että tulos on sopusoinnussa Ohmin lain kanssa. Seuraava tieto voi olla avuksi:*

$$\frac{ne^2\tau}{m^*} = \sigma\ .$$

a) Ratkaistaan ensin elektronin nopeus yhtälöstä

$$m^* \frac{dv}{dt} + \frac{m^*}{\tau} v = -eE. \tag{21}$$

Homogeenisen yhtälön

$$\frac{dv_H}{dt} + \frac{1}{\tau} v_h = 0 \tag{22}$$

ratkaisuksi saadaan

$$v_H = Ce^{-t/\tau}. \tag{23}$$

Yksittäisratkaisu v_Y saadaan yritteen $v_Y = At + B$ avulla:

$$\frac{dv_Y}{dt} + \frac{1}{\tau} v_Y = -\frac{eE}{m^*} \Longleftrightarrow A + \frac{1}{\tau}(At+B) = -\frac{eE}{m^*} \Longrightarrow A = 0, B = -\frac{eE}{m^*}\tau \tag{24}$$

Alkuperäisen yhtälön ratkaisu saadaan laskemalla homogeenisen yhtälön ratkaisu ja yksittäisratkaisu yhteen:

$$v = v_H + v_Y = Ce^{-t/\tau} - \frac{eE}{m^*}\tau \tag{25}$$

josta voidaan alkuehdon $v(0) = 0$ avulla ratkaista vakio C. Elektronin nopeudeksi saadaan

$$v(t) = -\frac{eE}{m^*}\tau(1 - e^{-t/\tau}). \tag{26}$$

Drift-nopeudella tarkoitetaan nopeutta v_d, jolla elektronit keskimäärin kiteessä liikkuvat. Tarkasteltaessa elektronin nopeuden funktiota pitkällä aikavälillä $t >> \tau$ havaitaan, että

$$v(t >> \tau) \cong -\frac{eE}{m^*}\tau = v_d \tag{27}$$

b) Ohmin laki voidaan esittää muodossa $j = \sigma E$, missä j on virrantiheys, σ on sähkönjohtavuudeksi kutsuttu vakio ja E on sähkökentän voimakkuus. Virrantiheys voidaan drift-nopeuden avulla lausua myös $j = -env_d$ missä n on elektronitiheys ja e alkeisvaraus. Käyttämällä a)-kohdassa laskettua drift-nopeutta saadaan

$$j = en\frac{eE}{m^*}\tau = \frac{ne^2\tau}{m*}E = \sigma E \tag{28}$$

2. *Olkoon puolijohteessa kaksi pääasiallista sirontamekanismia: fononisironta ja epäpuhtaussironta, ja näiden relaksaatioajat vastaavasti* $\tau_L = 1{,}1\ \mathrm{ps}$ *ja* $\tau_I = 1{,}9\ \mathrm{ps}$, *kun* $T = 300\mathrm{K}$. *Näiden sirontamekanismien yhteisvaikutus voidaan huomioida "rinnakkaisina" prosesseina:* $\mu^{-1} = \mu_I^{-1} + \mu_L^{-1}$. *Fononisironnan lämpötilariippuvuus on* $\tau_L \propto T^{-\frac{3}{2}}$ *ja epäpuhtaussironnan* $\tau_I \propto T^{\frac{3}{2}}$. *Missä lämpötilassa saadaan suurin liikkuvuus?*

epäpuhtaussironta: $\mu_I = \dfrac{e\tau_I}{m^*} = \dfrac{e}{m^*}\dfrac{T^{3/2}\tau_I^{RT}}{T_{RT}^{3/2}}$, koska $\tau_I(T) \propto T^{\frac{3}{2}}$, $\quad \tau_I^{RT} = 1{,}9 \cdot 10^{-12}\ s$

fononisironta: $\mu_L = \dfrac{e\tau_L}{m^*} = \dfrac{e}{m^*}\dfrac{T^{-3/2}\tau_L^{RT}}{T_{RT}^{-3/2}}$, koska $\tau_L(T) \propto T^{-\frac{3}{2}}$, $\quad \tau_L^{RT} = 1{,}1 \cdot 10^{-12}\ s$

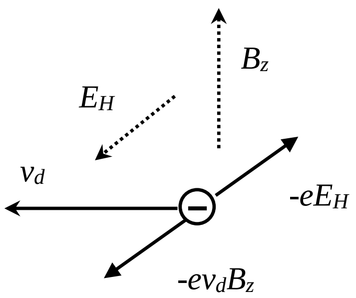
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_L} = \frac{m^*}{e}\left(\frac{T_{RT}^{3/2}}{\tau_I^{RT}}T^{-3/2} + \frac{T_{RT}^{-3/2}}{\tau_L^{RT}}T^{3/2}\right) = \frac{m^*}{e}T^{-3/2}\left(a + bT^3\right) \Rightarrow \mu = \frac{e}{m^*}\frac{T^{3/2}}{a + bT^3}$$

$$\frac{d\mu}{dT} = \frac{e}{m^*}\left[\frac{\frac{3}{2}T^{1/2}\left(a + bT^3\right) - 3bT^2 \cdot T^{3/2}}{\left(a + bT^3\right)^2}\right] = \frac{e}{m^*}\left[\frac{\frac{3}{2}aT^{1/2} - \frac{3}{2}bT^{7/2}}{\left(a + bT^3\right)^2}\right]$$

$$= \frac{e}{m^*}\frac{3}{2}T^{1/2}\left[\frac{a - bT^3}{\left(a + bT^3\right)^2}\right] = 0 \Rightarrow T = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/3} = \left(\frac{T_{RT}^{3/2}}{\tau_I^{RT}}\frac{\tau_L^{RT}}{T_{RT}^{-3/2}}\right)^{1/3} = T_{RT}\left(\frac{\tau_L^{RT}}{\tau_I^{RT}}\right)^{1/3} = 250\,K$$

3. *Puolijohdenäytteen pinta-ala on 1 cm · 0,5 cm ja paksuus 500 μm. Näytteen pitkä sivu kytketään 1 V:n jännitteeseen, jolloin näytteen läpi kulkee 5 mA:n virta. Näyte on lisäksi asetettu 0,5 T:n magneettikentään, joka on näytteen leveää pintaa vastaan kohtisuorassa. Näytteestä mitataan 5 mV:n Hall-jännite. Määritä varauksenkuljettajien tiheys ja liikkuvuus. Liikkuvuus* μ *määritellään puolijohteissa:* $v = \mu E$.

Tasapainotilanteessa poikittaisen sähkökentän varaukseen synnyttämä voima kumoaa magneettikentän aiheuttaman voiman:



$$q\bar{E} + q\bar{v}_d \times \bar{B} = 0 \Rightarrow -eE_y - ev_d B_z = 0 \quad \Rightarrow \quad v_d = -\frac{E_y}{B_z}$$

virrantiheys $J_x = -qnv_d = \dfrac{enE_y}{B_z}$

geometriasta $J_x = \dfrac{I_x}{wd}$ ja $E_y = \dfrac{V_H}{w} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{I_x}{wd} = \dfrac{enV_H}{wB_z}$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{I_x B_z}{eV_H d} = \frac{5\times10^{-3}\ \text{A}\cdot 0{,}50\ \text{T}}{1{,}6\times10^{-19}\ \text{As}\cdot 5\times10^{-3}\ \text{V}\cdot 500\times10^{-6}\ \text{m}} = 6{,}25\times10^{21}\ \text{m}^{-3} = 6{,}25\times10^{15}\ \text{cm}^{-3}$$

$$V_x = RI_x = \rho\frac{l}{A}I_x = \rho\frac{l}{wd}I_x \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V_x}{I_x}\frac{wd}{l}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \wedge \quad J_x = \sigma E_x \quad \wedge \quad v_d = \mu E_x \quad \Rightarrow \quad -qnv_d = -qn\mu E_x = \frac{E_x}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{en}\frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{en}\frac{1}{\rho} = \frac{eV_H d}{eI_x B_z}\frac{I_x l}{V_x wd} = \frac{V_H l}{B_z V_x w}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{5\times10^{-3}\ \text{V}\cdot 10\times10^{-3}\ \text{m}}{0{,}50\ \text{T}\cdot 1\ \text{V}\cdot 0{,}5\times10^{-3}\ \text{m}} = 0{,}20\ \text{m}^2/\text{Vs} = 2000\ \text{cm}^2/\text{Vs}.$$

4. *Laske kuparin Fermi-energia. Kuparin tiheys on* $8{,}9\cdot10^3\ \text{kg}/\text{m}^3$ *ja kukin kupariatomi luovuttaa yhden elektronin johtovyöhön.*

Kukin atomi luovuttaa yhden elektronin johtovyölle, joten elektronitiheys on yhtä suuri kuin atomitiheys $n = \dfrac{N}{V} = \dfrac{\rho}{M_{Cu}} = 8{,}44\cdot10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Sijoittamalla tämä Fermi-energian lausekkeeseen saadaan . $E_F = \dfrac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3} = 1{,}13\cdot10^{-18}\ \text{J} = 7{,}0\ \text{eV}$.