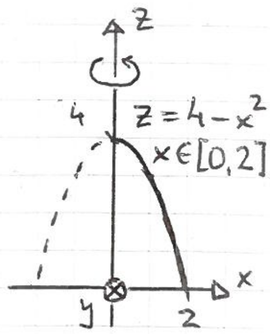
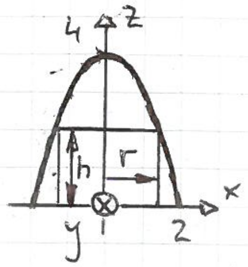
MS-A0108 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, kevät 2019 Metsalo
Tentti, 9.4.2019

Tentissä ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja





Tehtävä 1. a) Anna esimerkki lukujonosta $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, joka on positiivinen ja aidosti laskeva ($0 < a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$) ja jonka raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$. (1p.)
b) Anna esimerkki lukujonosta $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, joka on positiivinen ja aidosti nouseva ($0 < b_n < b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) ja jonka raja-arvo $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$. (1p.)
c) Anna esimerkki lukujonosta $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, joka on rajoitettu ($|c_n| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$) ja jolla ei ole raja-arvoa ($\nexists \lim_{n\to\infty} c_n$). (2p.)
d) Anna esimerkki sarjasta $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, joka on aidosti positiivinen ($0 < d_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$) ja jonka summa $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 5$. (2p.)

Tehtävä 2. Kun paraabelinkaari $z = 4 - x^2$, $x \in [0, 2]$ pyörähtää z-akselin ympäri, syntyy pyörähtysparaboloidi. Määritä paraboloidin ja xy-tason rajoittaman alueen tilavuus. (6p.)

Tehtävä 3. Määritä säde r ja korkeus h ympyräpohjaiselle lieriölle, joka mahtuu edellisen tehtävän paraboloidin ja xy-tason väliin ja jonka tilavuus on suurin. (6p.)

Tehtävä 4. Olkoon $f(x) = e^{2\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.
a) Muodosta funktion $f(x)$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x; 0)$ (Taylor-polynomi, jonka keskus on $x_0 = 0$). (4p.)
b) Approksimoi integraalia $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ laskemalla integraali $\int_{-1}^{1} P_3(x; 0)dx$. (2p.) (Mathematica: $I \approx 3,26817$)

Tehtävä 5. Tehtävän johdanto: Astiaan, jossa on $V = 30$ dm^3 vettä, on lisätty $S_0 = 60$ g suolaa. Hetkellä $t = 0$ min aletaan astiaan pumpata $f = 6$ dm^3/min suolaliuosta, jonka suolapitoisuus on vakio $K = 5$ g/dm^3. Samalla aletaan astiasta pumpata pois $f = 6$ dm^3/min suolaliuosta, joten astian nestemäärä $V = 30$ dm^3 pysyy vakiona.
Jos suolan määrä astiassa hetkellä $t \geq 0$ min on $S(t)$, niin astiassa olevan nesteen suolapitoisuus on $S(t)/V$. Lyhyellä aikavälillä Δt astiaan tulee $K \cdot f \cdot \Delta t$ suolaa ja sieltä poistuu noin $(S(t)/V) \cdot f \cdot \Delta t$ suolaa, joten suolamäärän muutos on $\Delta S \approx (K \cdot f \cdot \Delta t) - ((S(t)/V) \cdot f \cdot \Delta t) \Leftrightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} \approx (K - \frac{S(t)}{V}) \cdot f$.
Täten suolamäärä $S(t)$ astiassa toteuttaa alkuehdon $S(0 \text{ min}) = S_0$ ja differentiaaliyhtälön

$$S'(t) = (K - \frac{S(t)}{V}) \cdot f$$

Varsinainen tehtävä:
Ratkaise tämä differentiaaliyhtälö ja osoita, että $\lim_{t\to\infty \text{ min}} S(t) = K \cdot V = 150$ g. (6p.)

Kaavoja: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1, \cos^2\phi = (1 + \cos(2\phi))/2, \sin^2\phi = (1 - \cos(2\phi))/2$.
$\sin(2t) = 2\sin t\cos t, \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$.
$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v), \cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v)$,
$\lim_{\phi\to 0} \frac{\sin\phi}{\phi} = 1$.