

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM) Alestalo
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ELEC2, ENG2) Alestalo
MS-A0108 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (kevät) Metsalo

Tentti 31.5.2019

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Valitse viisi tehtävää. Voit myös tehdä kaikki tehtävät, jolloin viisi parasta otetaan mukaan.

1. Laske raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2}$$

joko L'Hospitalin säännön avulla tai muita menetelmiä käyttämällä.

2. a) Selitä, miksi eksponenttifunktion e^x Maclaurin-sarja on muotoa

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

b) Perustele suhdetestin avulla, että a-kohdan potenssisarja suppenee kaikilla muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla.

3. Käyrä $y = \cos x$ pyörähtää x -akselin ympäri välillä $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Laske näin syntyvän pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala.
Vihje: Voit käyttää sijoitusta $u = \sin x$ ja kokeen lopussa annettuja kaavoja.

4. Laske integraali

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$$

sijoittamalla aluksi $x = t^2$.

Käännä!

5. Määritä differentiaaliyhtälön

$$y' + 2y + 3 = 0$$

ratkaisu, kun $y(0) = 0$.

Vihje: Yhtälöä voidaan käsitellä joko lineaarisena tai separoituvana.

6. Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' - 7y' + 10y = 0$$

ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Lisätietoja:

Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä Maclaurin-approksimaatioita:

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ \cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \end{aligned}$$

Eräitä geometrisia kaavoja:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ A &= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ V &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx \end{aligned}$$

Eräitä integraalifunktioita:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$