

MS-A010{2,3,4,5} (ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 5: Taylor-polynomi ja sarja

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

September 24, 2018

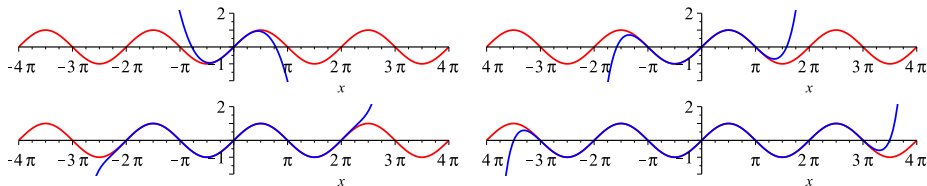
sin-funktio ja polynomit

Esimerkki

Verrataan funktion $\sin x$ kuvaajaa (punainen) polynomien

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

kuvaajiin (sininen), kun $n = 1, 4, 8, 12$.



Taylor-polynomi I

- Taylor-polynomi $P_n(x; x_0)$ = funktion paras n -asteinen polynomiapproksimaatio (derivoinnin kannalta) pisteen x_0 lähellä. Maclaurin-polynomi: tapaus $x_0 = 0$.
- Jos f on n kertaa derivoituva pisteessä x_0 , niin polynomilla

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x; x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

on pisteessä x_0 samat derivaatat kuin f :llä kertalukuun n saakka.

- Taylorin kaava: Jos derivaatta $f^{(n+1)}$ on olemassa ja se on jatkuva funktio, niin $f(x) = P_n(x; x_0) + E_n(x)$ ja virhetermille $E_n(x)$ pätee

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

jossakin pisteessä $c \in [x_0, x]$. Vrt. väliarvolause!

Jos on olemassa indeksistä n riippumaton vakio M , jolle $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ jollakin välillä $x \in I$, niin tällöin

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$.

- Eräitä Maclaurin-polynomiaproksimaatioita:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Newtonin menetelmä I

- Ensimmäisen asteen Taylor-polynomi $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on sama kuin funktion f linearisointi pisteen x_0 suhteen.
- Newtonin menetelmä: Yhtälö $f(x) = 0$ ratkaistaan likimääräisesti valitsemalla alkupiste x_0 (esimerkiksi kuvion perusteella) ja määrittelemällä

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

kun $n = 0, 1, 2, \dots$. Näin saadaan lukujono $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, jonka termit yleensä antavat yhä parempia likiarvoja funktion f nollakohdalle.

- Palautuskaava perustellaan geometrisesti etsimällä funktion nollakohtaa sen linearisoinnin (eli tangentin) avulla.

Taylor-sarja I

- Jos Taylorin kaavan virhetermi $E_n(x)$ lähestyy nollaa, kun n kasvaa, saadaan Taylor-polynomin raja-arvona funktion f Taylor-sarja (= Maclaurin-sarja, jos $x_0 = 0$).
- Taylor-sarja on siis muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Tämä on esimerkki yleisestä **potenssisarjasta**, joita esiintyy monien alkeisfunktioiden yhteydessä.

Taylor-sarja II

- Taylor-sarja voidaan muodostaa aina, kun funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä x_0 ja ne sijoitetaan ym. kaavaan. Tähän liittyy kuitenkin kaksi ongelmaa:
 - Suppeneeko Taylor-sarja kaikilla muuttujan arvoilla?
Vastaus: Ei aina; esimerkiksi funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Maclaurin-sarja (= geometrinen sarja) suppenee vain arvoilla $-1 < x < 1$, vaikka funktio on derivoituva kaikilla $x \neq 1$:

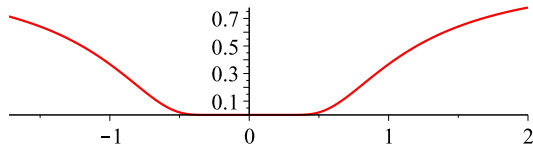
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Taylor-sarja III

- Jos sarja suppenee jollakin x , niin onko sarjan summa sama kuin $f(x)$?
Vastaus: Ei aina; esimerkiksi funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pätee $f^{(k)}(0) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ (hankala, mutta periaatteessa alkeellinen lasku). Näin ollen sen Maclaurin-sarja on identtisesti nolla ja suppenee kohti arvoa $f(x)$ ainoastaan pisteessä $x = 0$.



Johtopäätös: Taylor-sarjoja pitäisi tutkia tarkasti virhetermien jms. avulla. Käytännössä sarjoja muodostetaan käyttämällä apuna muutamia tunnettuja sarjakehitelmiä.

- Esimerkkejä (eksponenttifunktion palataan vielä myöhemmin):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!} x^k, \quad |x| < 1$$

Viimeinen on nimeltään binomisarja ja se on voimassa kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Jos $r = n \in \mathbb{N}$, niin sarjan kertoimet ovat nollia summausindeksistä $k = n + 1$ lähtien, ja kertoimet ovat muotoa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Vertaa **binomikaavaan**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

kun $n \in \mathbb{N}$.

- Potenssisarja on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$$

oleva sarja. Piste x_0 on sarjan keskus ja luvut c_k sarjan kertoimia.

- Sarja *suppenee* arvolla x , jos yllä oleva raja-arvo on määritelty. Tämän suhteen on vain kolme erilaista tapausta:
 - sarja suppenee vain arvolla $x = x_0$ (jolloin sarjassa esiintyy vain vakiotermi c_0)
 - sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$
 - sarja suppenee jollakin välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ (ja mahdollisesti yhdessä tai molemmissa päätepisteissä), mutta hajaantuu muilla x :n arvoilla.

Luku R on potenssisarjan **suppenemissäde**.

Sopimus: $R = 0$ tai $R = \infty$ muissa tapauksissa.

Esimerkki

Millä muuttujan x arvoilla potenssisarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} x^k$ suppenee?

Ratkaisu: Tutkitaan suppenemista suhdetestin avulla, kun $a_k = kx^k/2^k$. Tällöin

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(k+1)x^{k+1}/2^{k+1}}{kx^k/2^k} \right| = \frac{k+1}{2k} |x| \rightarrow \frac{|x|}{2},$$

kun $k \rightarrow \infty$. Suhdetestin perusteella sarja suppenee, kun $|x|/2 < 1$, ja hajaantuu, kun $|x|/2 > 1$. Rajatapauksissa $|x|/2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$ sarjan yleinen termi ei lähesty nollaa, joten sarja hajaantuu.

Tulos: Sarja suppenee välillä $-2 < x < 2$ ja hajaantuu muulloin.

Potenssisarja III

- Suppenemisvälillä I tulee siis määriteltyä funktio $f: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (1)$$

joka on nimeltään sarjan **summafunktio**.

- Potenssisarjan summafunktio f on välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ jatkuva ja derivoituva. Lisäksi derivaatan $f'(x)$ voi laskea derivoimalla sarjaa (??) termeittäin:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Huomaa, että vakiotermi c_0 derivoituu pois eli summa alkaa indeksistä $k = 1$. Lisäksi derivoitu sarja suppenee samalla välillä $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$; tämä on hieman yllättävää (**miksi?**) kertoimen k vuoksi.

- Tapauksessa $[a, b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$ potenssisarjan (??) voi myös integroida termeittäin:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b (x - x_0)^k dx.$$

Usein integrointi voidaan ulottaa myös suppenemisvälin päätepisteeseen saakka, mutta tämä ei aina pidä paikkaansa. Tilannetta täytyy siis tutkia tapauskohtaisesti.