

MS-A010{2, 3,4,5} (ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 6: Alkeisfunktioista

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

September 26, 2018

Funktio I

Kertauksena ja muistutuksena:

- Funktio $f: A \rightarrow B$ on relaatio, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon a **täsmälleen yhden** B :n alkion b . Merkitään $b = f(a)$.
- Tässä $A = M_f$ on f :n **määrittelyjoukko** ja B on f :n **maalijoukko**.
- Funktion f **arvojoukko** (eli kuvajoukko) on B :n osajoukko $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.
- Jos funktion määrittelyjoukko $A \subset \mathbb{R}$, niin kyseessä on yhden muuttujan funktio.

Esimerkkejä:

- Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, maalijoukko on $\mathbb{R}$, mutta sen arvojoukko on $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$.
- Edellisen esimerkin funktio voidaan toki määritellä suoraan muodossa $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = x^2$, jolloin arvojoukko on sama kuin maalijoukko.
- Maalijoukko ja arvojoukko voidaan periaatteessa määritellä samaksi kaikkien funktioiden kohdalla, mutta se ei yleensä olet tarpeellista tai varsinkaan käytännöllistä.

Yritä löytää esimerkiksi funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 + x^2 + x$ arvojoukko.

Käänteisfunktio I

Funktio $f: A \rightarrow B$ on

- **injektio**, jos eri pisteissä saadaan eri arvot, ts.
 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ts.
 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- **surjektio**, jos arvojoukko on sama kuin maalijoukko, ts. $f(A) = B$.
- **bijektio**, jos se on sekä injektio että surjektio.

Kysymys on siis yhtälön $y = f(x)$ ratkaisujen x lukumäärästä. Jos jokaiselle $y \in B$ on olemassa

- korkeintaan yksi ratkaisu $x \in A$, niin f on injektio;
- vähintään yksi ratkaisu $x \in A$, niin f on surjektio;
- täsmälleen yksi ratkaisu $x \in A$, niin f on bijektio.

Huom: Funktiosta voidaan tehdä aina surjektio, jos sen maalijoukko kutistetaan arvojoukoksi jättämällä pois ylimääräiset pisteet.

Käänteisfunktio II

Jos $f: A \rightarrow B$ on bijektio, niin sillä on **käänteisfunktio** $f^{-1}: B \rightarrow A$, joka määritelty ehdolla

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

- Käänteisfunktiolle pätee $f^{-1}(f(a)) = a$ kaikilla $a \in A$ ja $f(f^{-1}(b)) = b$ kaikilla $b \in B$.
- Yhdistetyn kuvauksen notaatiolla $f^{-1} \circ f = Id_A$ ja $f \circ f^{-1} = Id_B$, jossa $Id_A(x) = x$ kaikilla $x \in A$, ja jossa $Id_B(x) = x$ kaikilla $x \in B$.
- Huomaa, että $f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.
- Jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on aidosti monotoninen, niin surjektioilla $f: A \rightarrow f(A)$ on käänteisfunktio.

Käänteisfunktio III

Käänteisfunktion kuvaaja on alkuperäisen kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.

Perustelu: Piste (a, b) on funktion f kuvaajalla $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} b = f(a) &\Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \\ \Leftrightarrow \text{piste } (b, a) &\text{ on funktion } f^{-1} \text{ kuvaajalla.} \end{aligned}$$

Lisäksi koordinaattien vaihto-operaation $(a, b) \mapsto (b, a)$ geometrinen tulkinta on peilaus suoran $y = x$ suhteen.

Voidaan ymmärtää piirtoheitinkalvon tai voipaperin avulla, katsomalla funktion kuvaajaa “nurjalta puolelta”.

Intuitiivinen seuraus: Jos $f: A \rightarrow f(A)$ jossa A on väli ja f on jatkuva, niin myös f^{-1} on jatkuva joukossa $f[A]$.

Käänteisfunktio IV

Funktion $f:]a, b[\rightarrow]c, d[$ derivoituvuus heijastuu käänteisfunktioon f^{-1} .

Idea: Funktion f (tai f^{-1}) derivoituvuus tarkoittaa sen kuvaajalla ei-pystysuoran tangentin olemassaoloa kussakin määrittelyjoukon pisteessä.

Johtopäätös: Jos f on derivoituva, f^{-1} on olemassa, ja $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin silloin f^{-1} on derivoituva.

Nähdään todeksi katsomalla funktion f kuvaajaa ja sen erästä tangenttia piirtoheitinkalvon "nurjalta puolelta", jolloin se muuttuu f^{-1} :n kuvaajaksi ja vastaavaksi tangentiksi.

Derivointikaava: Jos $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, niin

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

missä $f'(f^{-1}(x)) =$ funktion f derivaatta laskettuna pisteessä $f^{-1}(x)$.

Mistä tämä kaava tulee?

Trigonometriset funktiot I

- Kulman yksikkö radiaani = rad: kulmaa vastaavan yksikköympyrän osan kaarenpituus.
- π rad = 180 astetta, ts. $1 \text{ rad} = 180/\pi \approx 57,3$ astetta
- Funktiot $\sin x$, $\cos x$ määritellään yksikköympyrän avulla niin, että $(\cos x, \sin x)$, $x \in [0, 2\pi]$, on yksikköympyrän parametrisointi kaarenpituuden x avulla.

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \neq \pi/2 + n\pi), \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq n\pi)\end{aligned}$$

- Jaksollisuus:

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \\ \tan(x + \pi) &= \tan x. \quad \text{Nota bene!}\end{aligned}$$

Trigonometriset funktiot II

- Alkeellisia ominaisuuksia (perustelut yksikköympyrästä):

- $\sin 0 = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ ja $\cos 0 = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$
- $\sin$ ja $\tan$ ovat parittomia funktioita, $\cos$ on parillinen:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

- Yhteenlaskukaavat (perustelu kompleksiluvuilla tai matriiseilla):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

- Derivaatat (johdettu aiemmin luennolla):

$$D(\sin x) = \cos x, \quad D(\cos x) = -\sin x$$

- Trigonometrisilla funktioilla on käänteisfunktio, jos funktioiden määrittely- ja maalijoukkoja rajoitetaan sopivalla tavalla.
- Sini-funktio

$$\sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

on aidosti kasvava bijektio.

- Kosini-funktio

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

on aidosti vähenevä bijektio.

- Tangentti-funktio

$$\tan:] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$$

on aidosti kasvava bijektio.

- Käänteisfunktiot:

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[,$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

- Siis:

$$x = \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arctan x, \text{ kun } \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$$

$$x = \sin \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin x, \text{ kun } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$x = \cos \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos x, \text{ kun } \alpha \in [0, \pi]$$

- Huom: arc*** annetaan **radiaaneissa**, ellei...

- Käänteisfunktioiden derivaatat

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$D \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

Perustelu: Derivoimalla puolittain yhtälö $\tan(\arctan x) = x$, kun $x \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot D(\arctan x) &= Dx = 1 \\ \Rightarrow D(\arctan x) &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

jossa $\tan^2(\arctan x) = (\tan(\arctan x))^2 = x^2$.

- Neperin luku

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \\ &\approx 2,718281828459 \dots \end{aligned}$$

- Eksponenttifunktio $\exp$ Taylor-sarjansa avulla:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys?

Eksponenttifunktio II

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys pääpiirteissään:

- Määritellään $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sarjakehitelmällä

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sarja suppenee suhdetestin perusteella kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja $\exp(0) = 1$.

- **Osoitetaan:** $\exp$ on derivoituva ja toteuttaa **differentiaaliyhtälön** $\exp'(x) = \exp(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Sarjan derivoiminen termeittäin on koko päättelyn **matemaattisesti** hankalin kohta, vaikka intuitiivisesti helppo ymmärtää.)
- Differentiaaliyhtälönsä perusteella toteuttaa myös

$$\exp(-x) = 1/\exp(x) \text{ ja } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ **(jälkimmäinen taululla jos aikaa!)**

Eksponenttifunktio III

- ...josta seuraa, että $\exp(p/q) = (\exp(1))^{p/q}$ kaikille rationaaliluvuille $p/q \in \mathbb{Q}$...
- ... mistä jatkuvuuden (koska derivoituva) perusteella

$$\exp(x) = (\exp(1))^x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

- Koska binomikaavalla saadaan helpompi punainen yhtäsuuruusmerkki kaavaan

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

niin eksponenttifunktiolle tulee lopulta muotoon $\exp(x) = e^x$.

Jatkossa väliaikainen notaatio $\exp(x)$ voidaan unohtaa kokonaan.

Eksponttifunktio IV

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys johti seuraaviin tuttuihin laskulakeihin:

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $D(e^x) = e^x$
- $e^{-x} = 1/e^x$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $e^x e^y = e^{x+y}$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Lisäksi $f(x) = e^x$ on aidosti kasvava, ei-negatiivinen surjektio $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$, joten sillä on käänteisfunktio $f^{-1}:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

- **Logaritmifunktio** = eksponenttifunktion käänteisfunktio:

$$\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

- Tarkasti ottaen kyseessä on e -kantainen eli **luonnollinen** logaritmi. Yleisen a -kantaisen logaritmin määritelmä perustuu kaavaan

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

kun $a > 0$ ja $y > 0$.

- Muita sovelluksissa esiintyviä logaritmeja ovat Briggsin 10-kantainen logaritmi $\lg x = \log_{10} x$ ja binäärilogaritmi $\lg x = \log_2 x$.
- Merkinnällä $\log x$ tarkoitetaan (nykyään) yleensä (esim. tietokoneohjelmissa) luonnollista logaritmia $\ln x$.

Logaritmin ominaisuuksia

- $e^{\ln x} = x$, kun $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\ln(a^b) = b \ln a$, kun $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, kun $a, b > 0$
- $D \ln |x| = 1/x$, kun $x \neq 0$

Nämä seuraavat vastaavista eksponenttifunktion ominaisuuksista.

Hyperboliset funktiot I

- Hyperbolinen sini *sinus hyperbolicus* $\sinh$, hyperbolinen kosini *cosinus hyperbolicus* $\cosh$ ja hyperbolinen tangentti $\tanh$:

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[, \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- Derivaatat: $D \sinh x = \cosh x$, $D \cosh x = \sinh x$.
- Kaikilla trigonometrisilla kaavoilla on hyperbolinen vastine, joka seuraa yhteyksistä $\sinh(ix) = i \sin x$, $\cosh(ix) = \cos x$, jossa $i^2 = -1$.

Siksi $\sin^2$ -termien merkki vaihtuu kaavoissa, muu pysyy samana.

Esimerkiksi $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Hyperboliset funktiot II

- Hyperboliset käänteisfunctiot eli area-functiot; area ja lyhenne ar viittaa käänteisfunctioiden geometriseen tulkintaan eräänä hyperbeliin liittyvänä pinta-alana:

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{ar} \sinh x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^{-1} x = \operatorname{ar} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

- Käänteisfunctioiden derivaatat:

$$D \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$$