

MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*)

Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Luento 8: Integraalifunktio ja epäoleellinen integraali

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

November 22, 2017

Määritelmä

Jos $G'(x) = f(x)$ jollakin avoimella välillä, niin G on funktion f **integraalifunktio** eli **määräämätön integraali** eli **antiderivaatta**.

Funktiota f kutsutaan **integrandiksi**.

Integraalilaskennon peruslauseen mukaan kaikilla **jatkuvilla** funktioilla $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on **eräs** integraalifunktio $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

koska $F'(x) = f(x)$ kun $x \in]a, b[$.

Mikä menee rikki jos f on vain paloittain jatkuva?

Integraalifunktio II

- Integraalifunktiota **ei useinkaan** voida esittää alkeisfunktioiden avulla ilman integrointimerkkiä tai sarjakehitelmää, vaikka f itse olisikin alkeisfunktio.

Mm. tällaisia integraalin kautta esitettyjä funktioita F kutsutaan **erikoisfunktioiksi**. Esim. tapaus $f(x) = e^{-x^2}$, joka liittyy normaalijakaumaan.

- Integraalifunktio **ei koskaan** ole yksikäsitteinen, mutta välillä $[a, b]$ määritellyt eri integraalifunktiot poikkeavat toisistaan vain vakiolla; merkitään

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ vakio,}$$

jossa $F'(x) = f(x)$.

Perustelu: Jos $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ kaikilla x , niin funktion $F_1(x) - F_2(x)$ derivaatta on identtisesti nolla, joten se on vakio.

Integraalifunktio III

- Jatkuvan funktion $f: [-1, 0[\cup]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{kun } x \in [-1, 0[, \\ \ln x + C_2 & \text{kun } x \in]0, 1], \end{cases}$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ovat mielivaltaisia integroimisvakioita.

Määrittelyjoukon epäyhtenäisyys johtaa vakaviin ongelmiin integraalifunktion käytössä jopa jatkuvalla integrandilla f .

Tämän esimerkin funktio ei ole edes paloittain jatkuva.

(Se ei itse asiassa ole edes Riemann-integroituva. Ei edes epäolennaisena integraalina integroituva, niinkuin asia määritellään myöhemmin tällä luennolla.)

Lause

Jos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin sen määrätty integraali voidaan laskea (päätepisteissäkin jatkuvan) integraalifunktion G avulla:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b G'(x) = G(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Perustelu: Taululla.

Määrätty integraali voidaan siis laskea integraalifunktion tekemästä “hypystä” integroimisrajojen välillä. Tämä edellyttää sitä, että f on tosiaankin määritelty (ja jatkuva) koko integroimisvälillä $[a, b]$.

Integroiminen on (usein) siis “derivoimista takaperin”.

Mitä voi tapahtua, jos integroimisalue ei ole yhtenäinen?

Monet integraalifunktiot saadaan suoraan derivoimissäännöistä:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Esimerkki

Laske integraalit $\int_{-1}^1 e^{-x} dx$ ja $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$.

Ratkaisu: Ensimmäinen integraalifunktio on $-e^{-x}$, joten integraalin arvo on

$$\int_{-1}^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + e^1 = 2 \sinh 1.$$

Toinen integraalifunktio on $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$, joten integraalin arvo on

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Esimerkki

Laske integraali $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}} dx$.

Ratkaisu: Integraalifunktion oikea muoto voisi olla $F(x) = a(25-9x^2)^{1/2}$; tarkistetaan kerroin a derivoimalla:

$$D(a(25-9x^2)^{1/2}) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (-18x)(25-9x^2)^{-1/2} = \frac{-9ax}{\sqrt{25-9x^2}},$$

joten valinnalla $a = -1/9$ saadaan oikea integraalifunktio. Näin ollen

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}} dx = -\frac{1}{9} \Big|_0^1 (25-9x^2)^{1/2} = -\frac{1}{9}(\sqrt{16} - \sqrt{25}) = \frac{1}{9}.$$

Integraalifunktio VIII

Peruslauseen avulla saadaan seuraava yleisempi derivoimiskaava:

Lause

Jos f on jatkuva ja funktiot a ja b ovat derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

Perustelu: Olkoon F funktion f integraalifunktio. Tällöin

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = F(b(x)) - F(a(x)).$$

Väite seuraa tästä käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä, koska $F' = f$.

Tämä on erinomainen esimerkki kaavasta, jota ei kannata opiskella ulkoa.

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x) dx$ on funktion kuvaajan ja x -akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Yleisemmin: $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Miksi?

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- Jos kappaletta leikataan yz -tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Syy: Poikkileikkaus kohdassa x on $f(x)$ -säteinen ympyrä, joten $A(x) = \pi f(x)^2$.

- Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää x -akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin saadun kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$.

- Kun käyrä $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, pyörähtää y -akselin ympäri, niin vastaavan pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

Epäoleellinen integraali I

Riemann-integraali määriteltiin vain rajoitetuille funktioille f äärellisellä välillä $[a, b]$. Käyttäen raja-arvoja, määritelmää voidaan laajentaa rajoittamattomiin funktioihin tai rajoittamattomiin integroimisväleihin.

Kaksi eri perustyyppiä ja lisäksi “sekatyypit”:

- **Tyyppi I:** Integroimisvälinä $[a, \infty[$ tai $] - \infty, b]$ tai koko $\mathbb{R}$.
- **Tyyppi II:** Funktio $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ei ole rajoitettu tai sillä ei ole toispuoleisia raja-arvoja päätepisteissä.
- **Sekatyyppi:** Sisältää sekä Tyypin I ja II piirteitä.

Sekatyyppien käsittely: Jos ongelmia on molemmissa päätepisteissä tai integroimisvälin sisällä, niin integroimisväli jaetaan niin moneen osaan, että kussakin osassa vain yksi ongelmakohta joko tyyppiä I tai tyyppiä II.

Esimerkki

“Sekatyypinen” epäoleellinen integraali tulkitaan

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

jossa oikealla puolella on Tyypin II ja I epäoleelliset integraalit tässä järjestyksessä.

Ovatko nämä integraalit jotenkin turhia,
jos niitä kerran kutsutaan epäoleellisiksi?

Nyt pitäisi vielä selvittää, että kuinka Tyypin I ja II integraalit lasketaan.

Määritelmä

Olkoon $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ paloittain jatkuva. Tällöin

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion f **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $[a, \infty[$.

Vastaavasti funktiolle $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^b f(x) dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen.

Esimerkki

Laske epäoleellinen integraali $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

Ratkaisu: Koska

$$\int_0^R e^{-x} dx = -\frac{1}{0} e^{-x} = 1 - e^{-R} \rightarrow 1,$$

kun $R \rightarrow \infty$, niin epäoleellinen integraali suppenee ja

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Tyyppi II I

Määritellään Tyypin II perustapaus näin:

Määritelmä

Olkoon $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva, mutta ilman äärellistä raja-arvoa, kun $x \rightarrow a+$. Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

jos raja-arvo on olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion f **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $]a, b]$.

Esimerkki

Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Ratkaisu: Koska

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 2,$$

kun $\varepsilon \rightarrow 0+$, niin integraali suppenee ja sen arvo on 2.

Esimerkki

Funktiolle $f(x) = x$ pätee

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 0,$$

koska kaikki integraalit ovat nollia. Yleisemmin sama pätee kaikille parittomille funktioille $f(x)$.

Epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ ei kuitenkaan suppene, kuten hetken päästä havaitaan.

Joskus on kuitenkin tarvetta antaa epäoleelliselle divergoivalle integraalille tulkinta ylläolevan esimerkin mukaisesti. Silloin käytetään nimitystä

Cauchyn pääarvointegraali.

Integraali koko reaaliakselin yli II

Määritelmä

Jos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paloittain jatkuva, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Vasemman puolen integraalia sanotaan suppenevaksi jos ja vain jos **molemmat** oikean puolen integraalit suppenevat.

Kuitenkin pätee: Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Syy: Positiivisen funktion tapauksessa ei voi tapahtua esimerkin tapaista $\pm\infty$ kumoutumista, joka voi muuten sekoittaa asiaa. Tämä kaava **ei siis päde** yleisesti, vrt. tapaus $f(x) = x$.

Epäoleellisen integraalin suppenemista voidaan tutkia majoranttiperiaatteen avulla, josta seuraavassa eräs versio.

Lause

Olkoon $|f(x)| \leq g(x)$ välillä $a < x \leq b$. Jos epäoleellinen integraali

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

suppenee, niin myös

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee ja sen itseisarvo on korkeintaan I .

Esimerkki

Koska

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ välillä } 0 < x \leq 1$$

ja

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2 .

Esimerkki

Vastaavasti

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} < \frac{1}{\sqrt{x}(0+x)} = \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ kun } x \geq 1.$$

Koska $\int_1^{\infty} x^{-3/2} dx = 2$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2 .

Huomataan: Sopivan majorantin valinta riippuu sekä funktiosta että integroimisvälistä!