

MS-A010{2,3,4,5} (SCI,ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 9: Integroimismenetelmät

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

October 8, 2018

Helpoimmat integraalit voi laskea suoraan peruskaavoja käyttämällä. Osa hankalammista tapauksista palautuu näihin, jos integraalista onnistuu tunnistamaan ”sisäfunktion derivaatan”.

Systemaattisempia menetelmiä ovat

- osittaisintegointi,
- sijoitusmenetelmä, ja
- osamurtohajotelmat.

Osittaisintegrointi ja sijoitusmenetelmä (eli muuttujanvaihtomenetelmä) ovat tulon derivoimisäännön ja ketjusäännön soveltamista ”takaperin”.

Lopuksi vilkaistaan numeerista integrointia.

Lause

Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia funktioita välillä $[a, b]$ (eli käytännössä hieman suuremmalla avoimella välillä). Tällöin

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Vastaavasti integraalifunktioille pätee

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Perustelu: Tulon derivoimissääntö, integrointi ja termien ryhmittely.

Idea: Toimii silloin, kun funktion $f(x)g'(x)$ integrointi on helpompaa kuin alkuperäisen funktion $f'(x)g(x)$.

Esimerkki

Laske integraali

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx.$$

Ratkaisu: Kokeillaan osittaisintegrointia ja valitaan $f'(x) = \sin x$ ja $g(x) = x$, jolloin $f(x) = -\cos x$ ja $g'(x) = 1$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot x - \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot 1 \, dx \\ &= -\pi \cos \pi + 0 + \int_0^{\pi} \sin x = \pi. \end{aligned}$$

Huom: Jos f ja g valitaan esimerkissä toisin päin, niin osittaisintegrointi johtaa entistä hankalampaan integraaliin.

Esimerkki

Laske integraalifunktio

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Ratkaisu: Valitse $f'(x) = e^x$ ja $g(x) = \sin x$. **Taululla.**

Esimerkki

Laske integraali

$$\int x e^{-x} \, dx.$$

Ratkaisu: Valitse $f'(x) = e^{-x}$ ja $g(x) = x$. **Taululla.**

Esimerkki

Laske integraalifunktio

$$\int x \ln x \, dx.$$

Ratkaisu: Valitse $f'(x) = x$ ja $g(x) = \ln x$. **Taululla.**

Osittaisintegroinnissa on strategisena ideana valita funktioksi g sellainen osa integrandissa, että muodostettaessa g' mahdollisimman paljon pahuutta poistuu integraalimerkin alta.

Lause

Jos f on jatkuva ja g jatkuvasti derivoituva suljetulla välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_A^B f(u) du,$$

kun $A = g(a)$, $B = g(b)$.

Käytännössä: Sijoitus $u = g(x)$, jolloin

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x) dx$$

Rajojen muutos: $x = a \Rightarrow u = g(a) = A$, $x = b \Rightarrow u = g(b) = B$.

Huomaa, että sijoituksen jälkeen **ei tarvitse** enää palata alkuperäiseen muuttujaan x (paitsi integraalifunktiota laskettaessa; kts. alla).

Sijoitusmenetelmä II

Muunnos $u = g(x)$ voidaan (usein) kirjoittaa myös käänteisfunktion avulla:

$$\begin{aligned}x &= g^{-1}(u) \Rightarrow \\dx &= (g^{-1})'(u) du = \frac{1}{g'(g^{-1}(u))} du = \frac{1}{g'(x)} du,\end{aligned}$$

joten tulos on sama kuin aikaisemmin.

Integroimisrajojen vaihtaminen on helpompaa alkuperäistä muunnosta $x \mapsto u$ käyttämällä.

Sen sijaan differentiaalin muuttuminen $dx \mapsto du$ on joskus helpompi laskea yllä annetun käänteisen muodon avulla.

Esimerkki

Laske integraali $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx$.

Ratkaisu: Neliöjuuren hävittämiseksi sijoitetaan $x = t^2$, kun $t \geq 0$.

Tällöin $dx = 2t \, dt$ ja käänteisestä muodosta $t = \sqrt{x}$ saadaan: Kun $x = 0$, niin $t = \sqrt{0} = 0$; kun $x = \pi^2$, niin $t = \sqrt{\pi^2} = \pi$. Näin ollen

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx = \int_0^{\pi} 2t \sin t \, dt = 2 \int_0^{\pi} t \sin t \, dt = 2\pi.$$

(Viimeinen integraali laskettiin aikaisemmassa esimerkissä osittaisintegroimalla)

Myös integraalifunktio voidaan usein laskea sijoitusmenetelmän avulla.

Tällöin säästytään integroimisrajojen muuttamiselta, mutta joudutaan palaamaan uudesta muuttujasta t takaisin alkuperäiseen muuttujaan x .

Esimerkki

Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Ratkaisu: Sijoitetaan $x = t^2$, $t > 0$, eli $t = \sqrt{x}$, jolloin saadaan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2t dt}{t(1+t^2)} = 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

Osamurtohajotelma I

Kaikki reaalikertoimiset rationaalifunktiot $R(x) = P(x)/Q(x)$ voidaan integroida osamurtohajotelmien avulla.

Ensimmäinen vaihe: Jakokulmassa jakamalla (tai muuten) palautetaan tilanne siihen, että $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Esimerkki

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} &= \frac{(x+1) - 1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \\ \frac{x^2}{x^2-1} &= \frac{(x^2-1) + 1}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} \\ \frac{x^3}{x^2-1} &= \frac{x^3-x}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}\end{aligned}$$

Osamurtohajotelmaa voidaan käyttää integroinnissa seuraavalla tavalla.

Esimerkki

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln |x+1| + C.$$

Toinen vaihe: Jaetaan nimittäjässä oleva polynomi $Q(x)$ joko 1. tai 2. asteen reaalikertoimisiin tekijöihin.

Reaalijuurisessa tapauksessa tarvitaan vain helpointa tulosta

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

kun kertoimet A , B valitaan sopivalla tavalla.

Osamurtohajotelma III

Esimerkki

Muodosta lausekkeen $\frac{2x + 3}{(x - 4)(x + 5)}$ osamurtohajotelma.

Ratkaisu: Hajotelma on muotoa

$$\frac{2x + 3}{(x - 4)(x + 5)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 5}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella $(x - 4)(x + 5)$, jolloin saadaan

$$2x + 3 = A(x + 5) + B(x - 4).$$

Kertoimet A ja B saadaan tästä kahdella eri tavalla:

Tapa 1: Sijoitetaan vuorotellen $x = 4$ tai $x = -5$.

Tapa 2: Verrataan x :n potenssien kertoimia yhtälön eri puolilla.

Molempien tapojen tuloksena saadaan $A = 11/9$ ja $B = 7/9$.

Esimerkki

Integroi rationaalilauseke $\frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$.

Ratkaisu: Nyt nimittäjän nollakohdat eivät ole reaalisia, joten ei yritetä pilkkoa sitä ensimmäisen asteen tekijöihin (vaikka se olisi mahdollista kompleksiluvuilla). Sen sijaan täydennetään neliöksi. **Taululla.**

Numeerinen integrointi* I

Hankalien integraalien likiarvoja voidaan joskus laskea kehittämällä integrandi Taylor-polynomiksi. Tämä edellyttää kuitenkin sitä, että integroitava funktio on annettu **jonkin** lausekkeen avulla, jota osataan derivoida.

Mittausdatassa funktiosta tunnetaan vain sen arvot tietyissä pisteissä $y_k = f(k\Delta x)$, ja derivaatoista ei oikein ole tietoa. Toivotaan, että funktio f ei kerrassaan vallon villiidy samplauspisteiden $k\Delta x$, $k \in \mathbb{N}$, välissä, tai **kaikki toivo on mennyttä**.

Rauhallisesti käyttäytyvissä tapauksissa integraali (reaaliluku) voidaan laskea likimääräisesti numeerisilla menetelmillä, kvadratuureilla.

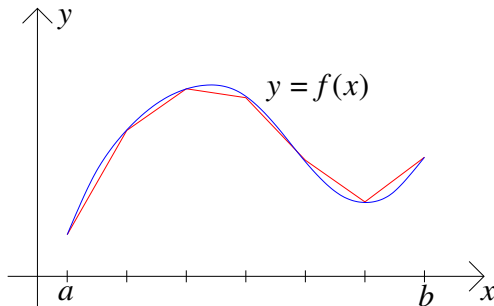
Eri kvadratuurit poikkevat toisistaan tarkkuuden ja laskentatyömäärän kannalta, sekä sen kannalta, mitä ne edellyttävät funktiolta f .

Numeerinen integrointi* II

- Yksinkertainen tapa on puolisuunnikassääntö eli **trapetsikaava**, jossa funktion kuvaajaa approksimoidaan murtoviivalla:

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = h \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \right),$$

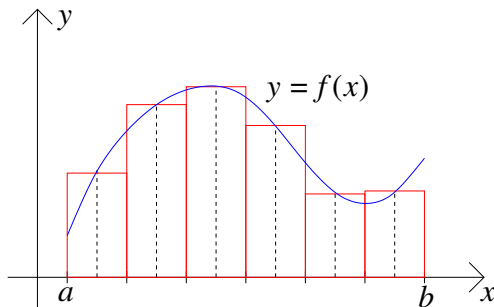
jossa $h = (b - a)/n$ on askelpituus, $n \in \mathbb{N}$ jakovälien lukumäärä, $x_k = a + kh$, $0 \leq k \leq n$, ovat jakopisteet ja $y_k = f(x_k)$.



Numeerinen integrointi* III

- **Keskipistesääntö** ("pylväsdiagrammiapproksimaatio")

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = h(f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_n)),$$
$$m_k = (x_{k-1} + x_k)/2,$$



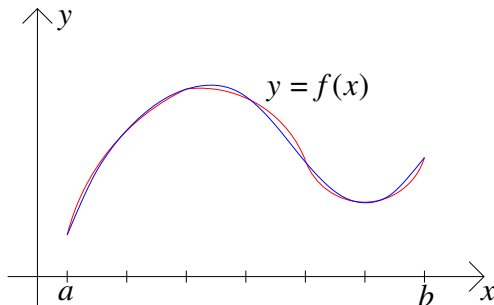
- Sileämmille funktioille f **Simpsonin sääntö**

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

tuottaa tarkemman lopputuloksen samalla jakovälien lukumäärällä n .

Simpsonin säännössä funktiota ensin interpoloidaan 2. asteen polynomilla kahdella peräkkäisellä jakovälillä. Tämän takia jakovälien lukumäärän n täytyy olla parillinen.

Numeerinen integrointi* V



Hienommissa kvadratuureissa (Gaussin kvadratuuri, Gauss-Lobatto, jne.) jakovälitkään eivät enää ole yhtä pitkiä, vaan jakoa tihennetään kohdissa, jossa funktion heilahtelu on suurta ja/tai ollaan lähellä välin päätepistettä.

Ken joutuu numeerisesti integraalin tietokoneella laskemaan, tutustukoon asiaan tarkemmin wikipedian ja kirjallisuuden avulla.