Kompleksiluvut © Pekka Alestalo 2019

Tämä moniste sisältää perusasiat kompleksiluvuista. Diff-int-1-kursseilla tarvitaan ainoastaan tietoa Eulerin kaavasta, jota käytetään 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöiden käsittelyssä.

1 Lukujoukot*

Uuden tyyppisten lukujen määrittelyn taustalla on yleensä tarve ratkaista yhä monimutkaisempia yhtälöitä. Sen vuoksi tutkimme aluksi polynomiyhtälöiden ratkaisemista, kun yhtälön astetta kasvatetaan.

1.1 1. asteen yhtälö

Yksinkertaisin (jollain tavalla mielenkiintoinen) yhtälö lienee muotoa

$$x + a = b,$$

missä a ja b ovat luonnollisia lukuja. Yhtälöllä ei aina ole ratkaisua x luonnollisten lukujen joukossa $\mathbf{N}$. Kuitenkin monissa lukumäärän laskemiseen liittyvissä tilanteissa luvun x konkreettinen tulkinta tuntuu täysin selvältä. Jos haluamme esittää tällaisia ratkaisuja matemaattisesti, on siirryttävä luonnollisia lukuja suurempaan lukujen joukkoon, kokonaislukuihin $\mathbf{Z}$.

Hieman vaativammassa yhtälössä

$$qx = p,$$

kerroin $q \neq 0$ ja p ovat kokonaislukuja. Yhtälöllä on ratkaisu kokonaislukujen joukossa vain poikkeustapauksissa: vaatimus yhtälön ratkeavuudesta kaikissa tapauksissa vaatii edelleen suurempaa lukujoukkoa, rationaalilukuja $\mathbf{Q}$.

1.2 2. asteen yhtälö

Yksikköneliön lävistäjän pituus x toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$x^2 = 2,$$

jolla ei, ehkä hieman yllättäen, ole rationaalista ratkaisua. Vaatimus tällaisten geometristen ilmiöiden matemaattisesta käsittelystä pakottaa edelleen laajentamaan lukujoukkoa rationaaliluvuista reaalilukuihin $\mathbf{R}$.

Monilla toisen asteen yhtälöillä ei kuitenkaan ole ratkaisuja edes reaalilukujen joukossa. Yksinkertaisin tällainen yhtälö lienee muotoa $x^2 = -1$. Yleisessä tapauksessa toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ voidaan neliöön täydentämällä saattaa muotoon

$$(x + b/2a)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Jos yhtälön diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on positiivinen, niin yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos $D = 0$, niin kyseessä on kaksoisjuuri $-b/2a$. Tapauksessa $D < 0$ ei reaalisia ratkaisuja ole.

Ratkaisukaavan perusteella juurten summa on $-b/a$ ja vastaavasti niiden tulo on c/a. Nämä ominaisuudet voidaan johtaa myös ilman ratkaisukaavaa vertaamalla kertoimia yhtälössä

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Tämän taustalla on kuitenkin oletus siitä, että nollakohdat x_1, x_2 ovat olemassa ja että niiden avulla 2. asteen polynomi voidaan jakaa tekijöihinsä.

Suoralta kädeltä ei ole olemassa mitään konkreettista syytä, miksi kaikilla toisen asteen asteen yhtälöillä pitäisi ylipäänsä olla ratkaisuja, joten yllä olevaan ratkaisukaavaan ei tässä mielessä sisälly mitään kummallista. Periaatteellisia ongelmia syntyy kuitenkin silloin, kun ryhdytään tutkimaan kolmannen asteen yhtälöitä.

1.3 3. asteen yhtälö

Tarkastellaan aluksi yleistä kolmannen asteen yhtälöä $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Jakamalla vakiolla $a \neq 0$ yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Samoin kuin jokaisella paraabelilla on huippu, on kolmannen asteen käyrällä $y = x^3 + Bx^2 + Cx + D$ yksi erikoisasemassa oleva piste: käyrän käännepiste. Sen x-koordinaatti saadaan yhtälöstä

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0 \Leftrightarrow x = -B/3.$$

Käyrän kuperuussuunta vaihtuu käännepisteessä, joten ilmeisesti käyrä on käännepisteen suhteen tarkasteltuna "symmetrisempi" kuin alkuperäisessä muodossa. Kun käännepiste siirretään muuttujanvaihdolla $z = x - (-B/3) = x + B/3$ kohtaan $z = 0$, niin yhtälö $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ yksinkertaistuu muotoon

$$z^3 + pz + q = 0,$$

missä $p = C - B^2/3$ ja $q = D - BC/3 + 2B^3/27$. Jokaisesta kolmannen asteen yhtälöstä voidaan siis poistaa toisen asteen termi alkuperäiseen muuttujaan tehdyllä siirrolla. Jos yksinkertaisemman yhtälön ratkaisut z saadaan selville, saadaan myös alkuperäisen yhtälön ratkaisut muodossa $x = z - B/3$.

Johdetaan seuraavaksi yhtälön $z^3 + pz + q = 0$ ratkaisukaava. Sijoitetaan tuntemattoman paikalle $z = u + v$, missä u ja v ovat uusia tuntemattomia. Ajatuksena on se, että kahden tuntemattoman avulla saadaan lisää valinnanvapautta ja että sopivilla valinnoilla yhtälö yksinkertaistuu; ei ole tietenkään etukäteen selvää, että tällainen operaatio johtaa mihinkään. Sijoituksen jälkeen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Tämä yhtälö toteutuu ainakin silloin, kun

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ uv = -p/3. \end{cases}$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä seuraa, että $u^3v^3 = -(p/3)^3$. Tunnemme siis lukujen u^3 ja v^3 summan ja tulon, joten nämä luvut saadaan toisen asteen yhtälön

$$w^2 + qw - (p/3)^3 = 0$$

ratkaisuina. Näin ollen (esimerkiksi)

$$\begin{cases} u^3 = w_1 = \frac{-q+\sqrt{q^2+4\cdot(p/3)^3}}{2}, \\ v^3 = w_2 = \frac{-q-\sqrt{q^2+4\cdot(p/3)^3}}{2}. \end{cases}$$

Yhtälön $z^3 + pz + q = 0$ ratkaisu saadaan siis muodossa

$$z = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4 \cdot (p/3)^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4 \cdot (p/3)^3}}{2}},$$

joka tunnetaan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan nimellä.[1] Kaava näyttäisi ensisilmäyksellä antavan vain yhden ratkaisun, mutta tarkempi analyysi paljastaa myös muut kaksi ratkaisua.

Ratkaisukaavaan sisältyy kuitenkin suuria periaatteellisia ongelmia. Jokaisella kolmannen asteen yhtälöllä on ainakin yksi reaalinen ratkaisu, mutta tapauksessa $q^2 + 4 \cdot (p/3)^3 < 0$ ratkaisukaava ei reaalilukujen maailmassa anna ainuttakaan ratkaisua! Konkreettinen esimerkki on yhtälö

$$z^3 - 15z - 4 = 0,$$

jonka kaikki juuret ovat reaalisia: $z_1 = 4$, $z_2 = -2 + \sqrt{3}$, $z_3 = -2 - \sqrt{3}$. Toisaalta ratkaisukaavan mukaan pitäisi olla

$$z = \sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{-484}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{-484}}{2}}.$$

Tällaiset ristiriitaisilta näyttävät tilanteet motivoivat tutkimaan sitä, millaisia negatiivisten lukujen neliöjuuret voisivat olla.

Seuraavissa luvuissa juurtamiseen liittyvä ongelma ratkaistaan kompleksilukujen avulla. Palaamme sen jälkeen yllä olevaan esimerkkiin ja selvitämme, mistä siinä on kysymys.

[1] Ratkaisukaavan keksi Niccolo Tartaglia ja sen avulla Ludovico Ferrari onnistui johtamaan ratkaisukaavan myös 4. asteen yhtälölle. Nämä ratkaisukaavat julkaisi kuitenkin ensimmäisenä Geronimo Cardano v. 1545, vaikka hän oli luvannut Tartaglialle pitää asian salassa. Ratkaisukaavoja kutsutaan usein Cardanon kaavoiksi, mutta tämä on siis historiallisessa mielessä hieman kyseenalaista. Toisaalta monet muutkin kaavat on nimetty jonkin muun kuin alkuperäisen keksijänsä mukaan.

2 Kompleksiluvut

2.1 Kompleksilukujen määritelmä

Kompleksilukujen keskeisin käsite on symboli i, jota kutsutaan imaginaariyksiköksi. Sen täytyisi toteuttaa $i^2 = i \cdot i = -1$ ja sen avulla muodostettujen lukujen $z = x + iy$ pitäisi toteuttaa kaikki "tavalliset" laskusäännöt. Mutta jo merkintöjen $x + iy$ ja $i \cdot i$ kirjoittaminen edellyttää, että yhteen- ja kertolasku olisi määritelty näille uusille symboleille! Tämän kehäpäättelyn välttämiseksi annetaan kompleksiluvuille geometrinen tulkinta: jos $x, y \in \mathbf{R}$, niin tulkitsemme merkinnän $x + iy$ tarkoittavan tason pistettä (x, y). Näitä lukuja kutsutaan kompleksiluvuiksi ja niiden muodostamaa joukkoa merkitään symbolilla $\mathbf{C}$. Kompleksiluvun $z = (x, y)$ reaaliosa on $\operatorname{Re} z = x$ ja imaginaariosa $\operatorname{Im} z = y$. On myös luontevaa kutsua x-akselia reaaliakseliksi ja y-akselia imaginaariakseliksi.[2]

Joukkoina ajateltuna on siis $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$, mutta yleensä merkintään $\mathbf{C}$ ajatellaan sisältyvän laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$, jotka määritellään seuraavalla tavalla.

- Tavallisten laskusääntöjen mukaan pitäisi olla

  $$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b),$$

  joka vastaa myös tason pisteiden (paikkavektoreiden) yhteenlaskua. Tämän vuoksi myös kompleksiluvuille määritellään

  $$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b), \ \ x, y, a, b \in \mathbf{R}.$$

- Tavallisten laskusääntöjen ja ehdon $i \cdot i = -1$ mukaan pitäisi olla

  $$(x + iy) \cdot (a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya),$$

  joten kompleksiluvuille määritellään

  $$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya), \ \ x, y, a, b \in \mathbf{R}.$$

Jotta annettu määritelmä olisi mielekäs, täytyy lopuksi tarkistaa, että

- tulkinta $x = (x, 0)$ reaaliluvulle x johtaa siihen, että joukkoa $\mathbf{R}$ voidaan pitää joukon $\mathbf{C}$ osajoukkona ja laskusäännöt ovat uuden merkintätavan mukaan samat kuin ennen.
- $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, mikä vastaa ominaisuutta $i^2 = -1$.
- kaikki reaalilukujen yhteen- ja kertolaskua koskevat säännöt (vaihdantalait, liitäntälait, osittelulait) yleistyvät uusien määritelmien välityksellä kompleksiluvuille.

[2]Tämän tulkinnan keksi Caspar Wessel vasta v. 1797 (julkaistu 1798). Sen avulla kaikki "imaginaarisuuteen" liittyvät filosofiset ongelmat voidaan kiertää.

Näiden ominaisuuksien tarkistaminen on suoraviivaista määritelmien käyttöä, mutta vaatii esimerkiksi tulon liitäntälain kohdalla pitkähköjä laskuja, jotka sivuutetaan. On kuitenkin huomattava, että tämän tulkinnan jälkeen voidaan johtaa yhteys $x + iy = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, y)$, jota käytettiin määritelmien taustalla! Myös kaava $x + iy = x + yi$ on voimassa, joten molemmat merkinnät ovat yhtä hyviä.

Liittoluvun muodostaminen on laskutoimitusten ohella tärkeä kompleksilukuja koskeva operaatio.

- Kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku on $\bar{z} = x - iy$, joka vastaa tason pisteen peilausta reaaliakselin suhteen.[3]

- Sen muodostamiselle pätee:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0 \text{ on reaalinen.}$$

- Liittoluvun avulla saadaan kompleksiluvulle $z = x + iy$

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \ \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

- Kompleksiluku z on reaalinen täsmälleen silloin, kun $\bar{z} = z$. Se on puhtaasti imaginaarinen (eli reaaliosa on nolla) täsmälleen silloin, kun $\bar{z} = -z$.

- Kompleksiluvun $z = x + iy$ käänteisluvulle saadaan laskusääntöjen avulla muoto

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

  jos $z \neq 0$. Yleisemmin kompleksiluku w/z voidaan sieventää muotoon $a + ib$ laventamalla se nimittäjän liittoluvulla $\bar{z}$.

Esimerkki 2.1 a) Jos $z = 1 + 2i$ ja $w = 2 - i$, niin

$$z + w = 3 + i, \ zw = (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) + (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2)i = 4 + 3i,$$

ja

$$\frac{z}{w} = \frac{(1 + 2i)(2 + i))}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

b) Jos $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, niin

$$z\bar{z} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

ja

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\varphi - i \sin\varphi}{z\bar{z}} = \cos\varphi - i \sin\varphi.$$

[3] Joissakin sovelluksissa (esim. kvanttimekaniikka) liittoluvulle käytetään merkintää z^*, sillä $\bar{z}$ voi sekoittua vektorimerkintään.

2.2 Polaariesitys

Määritelmän mukaan kompleksiluvut ovat tason pisteitä, joten ne voidaan esittää myös ns. napakoordinaattien avulla. Kompleksilukujen yhteydessä napakoordinaattimuodosta käytetään nimitystä polaariesitys.

Kompleksiluvun $z = x + iy$ moduli eli pituus on sen etäisyys origosta; ts.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0.$$

Luvun $z = x + iy$ argumentti eli vaihekulma $\varphi = \arg z \in \,]-\pi, \pi]$ määräytyy yhtälöparista

$$\begin{cases} \cos\varphi = x/r \\ \sin\varphi = y/r, \end{cases} \tag{1}$$

joka määrää vaihekulman yksikäsitteisesti aina kun $z \neq 0$.[4] Luvun 0 argumenttia ei määritellä lainkaan.

Jos $x \neq 0$, niin jakamalla yhtälöt puolittaina saadaan $\tan(\arg z) = y/x$. Ottamalla huomioon pisteen z sijainti kompleksitasossa, saadaan tämän avulla

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0 \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Näitä kaavoja ei tietenkään pidä opetella ulkoa, vaan argumentin arvo kannattaa päätellä suoraan tai yksinkertaisimmissa tapauksissa lukea kuviosta. Esimerkiksi $\arg(-1 + i) = \pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$ suoraan kuvion perusteella.

Argumenttia koskevasta yhtälöparista (1) voidaan ratkaista x ja y modulin ja argumentin avulla lausuttuna. Näin saadaan kompleksiluvun polaariesitys

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

missä $r = |z|$ ja $\varphi = \arg z$. Koska

$$|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1,$$

niin $\cos\varphi + i\sin\varphi$ esittää pisteen z suuntavektoria kompleksimuodossa.

Polaariesityksen avulla saadaan kompleksilukujen kertolaskulle geometrinen tulkinta. Jos

$$z = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ w = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

[4] Sinin ja kosinin jaksollisuuden vuoksi argumentti voidaan rajata mille tahansa 2π-pituiselle välille tai se voidaan määritellä moniarvoisena (mod 2π) sopimalla, että φ ja $\varphi + 2\pi$ edustavat saman kompleksiluvun argumenttia. Vaikka moniarvoisuuden korostaminen on nykyisin muotia, ei sitä pidä mielestäni ulottaa matematiikkaan. Erityisesti tietokoneohjelmien yhteydessä moniarvoiset funktiot tuottavat hankaluuksia.

niin

$$zw = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{2}$$

sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen perusteella. Operaatiossa $w \mapsto zw$ lukua w venytetään siis kertoimella $|z|$ ja kierretään kulmalla $\arg z$.

Kun tulosta sovelletaan lukuihin $z = w = \cos\varphi + i\sin\varphi$, saadaan induktiopäättelyllä de Moivren kaava

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),\ \ n \in \mathbf{N}.$$

Kaavan (2) perusteella modulille ja argumentille on voimassa

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \quad \arg{(zw)} = \arg z + \arg w \pmod{2\pi};$$

viimeinen lisäys viittaa siihen, että argumenttien summa saattaa mennä välin $(-\pi, \pi]$ ulkopuolelle, jolloin yhtäsuuruus saadaan aikaan korjaustermillä $\pm 2\pi$. Tähän liittyy myös seuraavan kohdan esimerkki 2.2.

2.3 Eulerin kaava

Kun eksponettifunktion sarjakehitelmään

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots$$

sijoitetaan muuttujan paikalle $t = ix$, niin tuloksen reaaliosaan ilmestyy kosinin ja imaginaariosaan sinin sarjakehitelmä. Tämän perusteella määritellään

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \tag{3}$$

kun $x \in \mathbf{R}$, ja edelleen reaalisen eksponenttifunktion ominaisuuksia mukaillen

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

kun $x, y \in \mathbf{R}$. Kaava (3) on nimeltään Eulerin kaava, ja sitä pidetään yhtenä matematiikan kauneimmista tuloksista.[5] Esimerkiksi

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

joten muodossa $e^{i\pi} + 1 = 0$ kaava sitoo erikoisella tavalla toisiinsa matematiikan viisi tärkeintä lukua ja kolme laskutoimitusta!

Eulerin kaavan perusteella

$$\overline{e^{ix}} = \cos x - i\sin x = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix},$$

[5]Koska emme ole käsitelleet kompleksilukusarjojen suppenemista, niin Eulerin kaava täytyy tarkasti ottaen antaa määritelmänä. Muussa tapauksessa se voitaisiin esittää lauseena ja todistaa.

joten

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

kun $x \in \mathbf{R}$.

Myös polaariesitys voidaan nyt kirjoittaa kätevästi eksponenttifunktion avulla:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

missä $r = |z|$ ja $\varphi = \arg z$. Kertolaskun polaarimuoto ja de Moivren kaava tulevat eksponenttifunktion avulla kirjoitettuna muotoon

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}, \ (e^{ix})^n = e^{inx}.$$

Kyseessä on siis reaalisen eksponenttifunktion perusominaisuuksien yleistys kompleksialueelle. Esimerkin 2.1 b-kohdasta seuraa, että jälkimmäinen kaava on voimassa kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

Esimerkki 2.2 Polaariesityksessä $-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ ja $i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$, mutta tulon $(-1)i = -i$ polaariesitys on $1 \cdot e^{-i\pi/2}$ eikä $1 \cdot e^{i3\pi/2}$. Kertolaskun kannalta tässä ei ole mitään ongelmaa, koska $e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2}$.

Hieman yllättävää on se, että eksponenttifunktiosta tulee kompleksialueella jaksollinen: jos $f(z) = e^z$, niin

$$f(z+2\pi i) = e^{x+iy+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y+i\sin y) = f(z),$$

$z = x + iy$. Jakso on siis puhtaasti imaginaarinen luku $2\pi i$.

2.4 Kompleksinen logaritmi*

Logaritmifunktio ln on määritelty aikaisemmin positiivisille reaaliluvuille. Kun kerran eksponenttifunktion määrittely voitiin jatkaa kaikille kompleksiluvuille, niin herää kysymys, voidaanko sama tehdä myös logaritmille.

Tutkitaan asiaa lähtemällä siitä, että kompleksisen logaritmifunktion log tulisi olla eksponenttifunktion käänteisfunktio mahdollisimman suuressa joukossa. Koska $e^z \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$, niin logaritmia ei voida määritellä ainakaan pisteessä 0.

Ratkaistaan yhtälöstä $e^w = z$ muuttuja w, kun $z \neq 0$ on annettu. Kirjoitetaan $w = x + iy$ ja polaarimuodossa $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, ja sijoitetaan nämä yhtälöön. Saadaan

$$e^x e^{iy} = |z|e^{i\varphi},$$

joka toteutuu täsmälleen silloin kun $e^x = |z|$ ja $y = \varphi + n2\pi$ jollakin $n \in \mathbf{Z}$. Ensimmäisen yhtälön mukaan $x = \ln|z|$ ja valitsemalla jälkimmäisessä $n = 0$ päädytään log-funktion määritelmään

$$\log z = w = \ln|z| + i\varphi = \ln|z| + i\arg z,$$

kun $z \neq 0$. Tälle funktiolle on siis voimassa

$$e^{\log z} = z, \ z \neq 0, \quad \text{ja} \quad \log(e^w) = w \quad \text{kaikille } w \in \mathbf{C}.$$

Sillä on monia samankaltaisia ominaisuuksia kuin reaalisella ln-funktiolla, mutta arg-termin johdosta joihinkin kaavoihin tarvitaan $\pm 2\pi i$-tyyppisiä korjauksia.

Esimerkki 2.3 Koska $-1 + i = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}$, niin

$$\log(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}.$$

Toisaalta $(-1+i)^2 = -2i = 2e^{-i\pi/2}$, joten

$$\log(-1+i)^2 = \log(-2i) = \ln 2 - i\frac{\pi}{2} \neq 2\log(-1+i).$$

Luvut poikkeavat toisistaan kuitenkin vain termillä $2\pi i$.

3 Polynomiyhtälöt

3.1 Nollakohdat ja jaollisuus

Polynomiyhtälön $P(x) = 0$ ratkaisuille (eli yhtälön *juurille*) on olemassa *ratkaisukaava* ainoastaan silloin, kun polynomin aste on korkeintaan neljä. Jos aste on viisi tai enemmän, niin voidaan osoittaa, ettei "yleisen" polynomin ainuttakaan juurta saada selville soveltamalla äärellistä määrää peruslaskutoimituksia ja juuren ottamisia polynomin kertoimiin. Konkreettinen esimerkki tällaisesta on yhtälö $z^5 - 6z + 3 = 0$, jolla on kolme reaalista ja kaksi muuta juurta; ym. ominaisuuden todistaminen on tosin hyvin hankalaa.[6]

Sen sijaan juurten numeerisia likiarvoja voidaan laskea esim. Newtonin menetelmällä, mutta se kuuluu hieman toiseen aihepiiriin.

Yksittäisen juuren löytäminen helpottaa aina tilannetta, koska yhtälön astetta voidaan tämän avulla pienentää.

Lause 3.1 *Jos polynomilla P on nollakohta z_0, niin $P(z)$ on jaollinen polynomilla $z - z_0$, ts. on olemassa sellainen polynomi $Q(z)$, että $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$.*

TODISTUS: Olkoon $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Koska

$$P(z) = P(z) - P(z_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k (z^k - z_0^k)$$

[6] Ensimmäisen todistuksen yleisen 5. asteen yhtälön ratkeamattomuudesta esitti Paolo Ruffini v. 1799 ja hieman yleisemmässä muodossa Niels Henrik Abel v. 1824.

ja jokaisesta termistä $z^k - z_0^k$ voidaan kaavan

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

perusteella erottaa tekijäksi $z - z_0$, niin väite seuraa. Tarvittava apukaava johdetaan samalla periaatteella kuin geometrisen jonon summakaava. $\square$

Mutta onko kaikilla polynomeilla nollakohtia? Vastauksen antaa seuraava ns. Algebran peruslause.

Lause 3.2 *Jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla on (ainakin yksi) nollakohta* $z_0 \in \mathbf{C}$.

Sivuutamme todistuksen, joka on hieman hankala.[7] Tulos on kuitenkin hyvin merkittävä sekä sovellusten kannalta että hieman filosofisemmin ajateltuna. Kompleksiluvuthan otettiin käyttöön, jotta 2. tai 3. asteen yhtälöille saataisiin ratkaisuja. Periaatteessa voisi olla mahdollista, että polynomiyhtälön asteen kasvaessa tarvitaan aina vain yleisempiä lukuja, jotta edes yksi ratkaisu olisi olemassa. Algebran peruslauseen mukaan näin ei käy, vaan kompleksiluvut yksinään ovat riittäviä kaikkien polynomiyhtälöiden täydelliseen ratkaisemiseen.

Yhdistämällä nämä kaksi tulosta voidaan polynomiyhtälön astetta siis aina pienentää yhdellä; kun tätä jatketaan mahdollisimman pitkälle, päädytään seuraavaan tulokseen.

Lause 3.3 *Jos* $n \geq 1$*, niin jokainen* n*-asteinen polynomi voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin, joita on yhteensä* n *kappaletta.*

Joissakin tapauksissa osa tekijöistä on samoja, jolloin kyseessä on moninkertainen nollakohta. Jos yleisesti

$$P(z) = a(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m},$$

missä $z_1, \ldots, z_m$ ovat eri kompleksilukuja, niin nollakohdan z_i kertaluku on k_i. Asteita vertaamalla todetaan, että $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Jos reaalikertoiminen polynomi halutaan jakaa mahdollisimman pieniin tekijöihin ilman, että kertoimiksi täytyy sallia kompleksilukuja, voidaan aina edetä toisen asteen tekijöihin.

Lause 3.4 *a) Jos reaalikertoimisella polynomilla on* k*-kertainen nollakohta* $a + ib$*, niin myös* $a - ib$ *on polynomin* k*-kertainen nollakohta.*
b) Reaalikertoiminen polynomi on joko vakio tai se voidaan jakaa reaalisiin 1. *ja* 2. *asteen tekijöihin.*

[7] Ensimmäisen aukottoman todistuksen esitti Carl Friedrich Gauß väitöskirjassaan v. 1799. Eräs hänen esittämistään todistuksista perustuu siihen, että kahden muuttujan reaaliarvoisen funktion $f(x, y) = |P(x + iy)|$ minimiarvoksi osoitetaan 0.

TODISTUS: Jos $P(a+ib)=0$, niin

$$0=\bar{0}=\overline{P(a+ib)}=P(a-ib)$$

liittoluvun ominaisuuksien ja reaalikertoimisuuden vuoksi.

Jos siis yleisessä tekijöihinjaossa esiintyy 1. asteen kompleksisia tekijöitä $z-(a+ib)$, niin jokaista tällaista vastaa myös tekijä $z-(a-ib)$. Kertomalla nämä keskenään saadaan reaalinen toisen asteen tekijä

$$(z-(a+ib))(z-(a-ib))=z^2-2az+(a^2+b^2).$$

Tällä tavalla kaikki kompleksiset tekijät voidaan yksi kerrallaan poistaa, ja myös a-kohdan kertalukuja koskeva väite seuraa tästä. $\square$

Yhtenä seurauksena voidaan todeta, että jokainen rationaalifunktio (muotoa $P(x)/Q(x)$, missä P ja Q polynomeja) voidaan integroida (reaalisten) alkeisfunktioiden avulla: nimittäjä $Q(x)$ jaetaan reaalisiin 1. tai 2. kertaluvun termeihin ja näiden avulla muodostetaan rationaalifunktion osamurtohajotelma. Integraalilaskennan yhteydessä on esitetty, kuinka näin syntyvät termit voidaan integroida yksi kerrallaan.

3.2 Polynomiyhtälö $z^n=c$

Tarkastellaan esimerkkinä n:nnen juuren laskemista kompleksiluvusta c, eli yhtälön $z^n=c$ kaikkien mahdollisten ratkaisujen määrittämistä. Ideana on kirjoittaa polaarimuodossa $c=re^{i\varphi},\ z=se^{it}$, jolloin saadaan yhtälö

$$s^n e^{int}=re^{i\varphi}.$$

Tämä toteutuu vain silloin, kun $s^n=r$ ja $nt=\varphi+k\cdot 2\pi$ jollakin $k\in\mathbf{Z}$. Saadaan siis $s=r^{1/n}=\sqrt[n]{r}$ ja $t=\varphi/n+k\cdot 2\pi/n$. Jaksollisuuden perusteella tapauksissa $k=0,1,\ldots,n-1$ saadaan kaikki mahdolliset erilaiset arvot.

Määritelmä 3.5 Olkoon $c=|c|e^{i\varphi}$, missä $\varphi\in(-\pi,\pi]$. Tällöin n. juuri luvusta c on

$$\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{|c|}e^{i\varphi/n}=\sqrt[n]{|c|}(\cos(\varphi/n)+i\sin(\varphi/n)).$$

Merkinnällä $\sqrt[n]{c}$ on siis aina yksikäsitteinen arvo; joissakin kirjoissa sen sallitaan tarkoittavan kaikkia yhtälön $z^n=c$ ratkaisuja.

Yhtälön $z^n=c$ kaikki n ratkaisua saadaan siis kaavasta

$$z=\sqrt[n]{|c|}e^{i\varphi/n+i2\pi k/n}=e^{i2\pi k/n}\sqrt[n]{c},$$

missä $k=0,1,2,\ldots,n-1$ (tai mitkä tahansa n peräkkäistä kokonaislukua).

Erityisesti tapauksessa $n=2$ ratkaisut ovat $\sqrt{c}$ ja $e^{i2\pi/2}\sqrt{c}=-\sqrt{c}$ aivan kuten reaalilukujen kohdalla. Aikaisemman neliööntäydennysperiaatteen nojalla toisen asteen yhtälön $az^2+bz+c=0$ ratkaisukaava

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

on siis voimassa myös kompleksisten kerrointen tapauksessa ja ilman rajoitusta $D=b^2-4ac\geq 0$.

Esimerkki 3.6 Määritetään yhtälön $z^3 = 1$ kaikki ratkaisut.

Ei kannata opetella ulkoa kaikkien ratkaisujen lauseketta, vaan mieluummin seurata yleisen päättelyn kulkua alusta alkaen. Jos siis $z = se^{it}$, niin $z^3 = s^3 e^{i3t}$, joten saadaan yhtälö $s^3 e^{i3t} = 1 = 1 \cdot e^{i0}$. Tämä toteutuu silloin kun $s^3 = 1$ ja $3t = 2n\pi$ jollakin $n \in \mathbf{Z}$; ts. $s = 1$ ja $t = 2n\pi/3$. Ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases} z_1 = 1 \cdot e^{i0} = 1, & (n = 0) \\ z_2 = 1 \cdot e^{i2\pi/3} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2, & (n = 1) \\ z_3 = 1 \cdot e^{i4\pi/3} = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2, & (n = 2). \end{cases}$$

Yhtälön $z^n = 1$ ratkaisuja kutsutaan ykkösen juuriksi (roots of unity).

3.3 3. asteen yhtälön ratkaisukaavan tulkinta*

Palataan vielä lyhyesti yhtälön $z^3 - 15z - 4 = 0$ ratkaisukaavan tulkintaan. Uusien tietojemme avulla ratkaisukaavan antama tulos voidaan sieventää muotoon

$$z = \sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{-484}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{-484}}{2}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Koska $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ ja $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ ja lukujen argumentit ovat oikeilla väleillä, niin juurten arvot ovat $2+i$ ja $2-i$. Näiden summana saadaan yhtälön eräs ratkaisu $z = 4$.[8]

[8] Tämän selityksen keksi Rafael Bombelli (julkaistu v. 1572) arvaamalla kuutiojuurten olevan muotoa $2 \pm b\sqrt{-1}$ ja ratkaisemalla kertoimen b kuutioimalla.