MS-A0101 tentti 25.10.2018/ratkaisut

Tehtävä 1

> $a := k \to k^2 \cdot x^k$

$$a := k \mapsto k^2 x^k \tag{1.1}$$

> $limit\left(\text{abs}\left(\frac{a(k+1)}{a(k)}\right), k = \text{infinity}\right)$

$$|x| \tag{1.2}$$

Suppenee, kun $|x| < 1$, hajaantuu muulloin. (Tapauksissa $x = +- 1$ yleinen termi ei lähesty nollaa, joten hajaantuu.)

b) Sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ saadaan suppeneva geometrinen majorantti $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, joten se suppenee, samoin kuin alkuperäinen sarja.

Tehtävä 2

> $limit\left(\frac{x \cdot \sin(2 \cdot x)}{1 - \cos(x)}, x = 0\right)$

$$4 \tag{2.1}$$

> $series(\ln(1 + \exp(x)), x = 0, 3)$

$$\ln(2) + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} x^2 + O(x^4) \tag{2.2}$$

Tehtävä 3

> $f := x \to x \cdot \exp(x)$

$$f := x \mapsto x\, e^x \tag{3.1}$$

> $f'(x)$

$$e^x + x\, e^x \tag{3.2}$$

Tämä on positiivinen, kun $x > -1$.

> $f(0)$

$$0 \tag{3.3}$$

> $W(0) = 0$

$$W(0) = 0 \tag{3.4}$$

> $W'(0) = \frac{1}{f'(0)}$

$$D(W)(0) = 1 \tag{3.5}$$

> $W(x) \cdot \exp(W(x)) = x$

$$W(x)\, e^{W(x)} = x \tag{3.6}$$

> $diff(\%, x)$

$$\left(\frac{d}{dx} W(x)\right) e^{W(x)} + W(x) \left(\frac{d}{dx} W(x)\right) e^{W(x)} = 1 \tag{3.7}$$

> $diff(\%, x)$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} W(x)\right) e^{W(x)} + 2 \left(\frac{d}{dx} W(x)\right)^2 e^{W(x)} + W(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} W(x)\right) e^{W(x)} + W(x) \left(\frac{d}{dx} W(x)\right)^2 e^{W(x)} = 0 \quad (3.8)$$

> $solve\left(\%, \frac{d^2}{dx^2} W(x)\right)$

$$-\frac{\left(\frac{d}{dx} W(x)\right)^2 (W(x) + 2)}{W(x) + 1} \quad (3.9)$$

Edellä kopioitiin hiirellä toisen derivaatan lauseke edellisen käskyn tuloksesta.

Sijoittamalla tiedot kohdassa $x = 0$ saadaan

> $W''(0) = -2$

$$D^{(2)}(W)(0) = -2 \quad (3.10)$$

Tehtävä 4

> $assume(n, posint)$

> $about(n)$

```
Originally n, renamed n~:
  is assumed to be: AndProp(integer,RealRange(1,infinity))
```

> $int(x^n \cdot \exp(-x), x = 0..\text{infinity})$

$$n\sim! \quad (4.1)$$

> $int\left(\frac{x^3}{1 + x^2}, x = 0..2\right)$

$$2 - \frac{\ln(5)}{2} \quad (4.2)$$

> $convert\left(\frac{x^3}{1 + x^2}, parfrac, x\right)$

$$x - \frac{x}{x^2 + 1} \quad (4.3)$$

>

Tehtävä 5

Tällä kurssilla ratkaisun saa kirjoittaa suoraan:

> $p := t \to 3 \cdot \exp(-k \cdot t)$

$$p := t \mapsto 3 e^{-kt} \quad (5.1)$$

> $solve(p(10) = 2, k)$

$$-\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{10} \quad (5.2)$$

> $simplify(\%)$

$$-\frac{\ln(2)}{10}+\frac{\ln(3)}{10} \quad (5.3)$$

> $dsolve\left(y'(x)=2\cdot x\cdot\left(1+y(x)^2\right)\right)$

$$y(x)=\tan\left(x^2+2\,\_C1\right) \quad (5.4)$$

> $solve(subs(x=0, rhs(\%))=1, \_C1)$

$$\frac{\pi}{8} \quad (5.5)$$

rhs = right hand side

Tai suoraan:

> $dsolve\left(\{y'(x)=2\cdot x\cdot\left(1+y(x)^2\right), y(0)=1\}\right)$

$$y(x)=\tan\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right) \quad (5.6)$$

Tehtävä 6

> $dy := y''(x)-3\cdot y'(x)-10\cdot y(x)=0$

$$dy := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x)-3\,\frac{d}{dx}\,y(x)-10\,y(x)=0 \quad (6.1)$$

> $dsolve(\{dy, y(0)=7, y'(0)=0\})$

$$y(x)=5\,e^{-2x}+2\,e^{5x} \quad (6.2)$$

Tai vaiheittain:

> $dsolve(dy)$

$$y(x)=\_C1\,e^{-2x}+\_C2\,e^{5x} \quad (6.3)$$

> $subs(x=0, \{rhs(\%)=7, diff(rhs(\%), x)=0\})$

$$\{-2\,\_C1\,e^0+5\,\_C2\,e^0=0, \_C1\,e^0+\_C2\,e^0=7\} \quad (6.4)$$

> $solve(\%)$

$$\{\_C1=5, \_C2=2\} \quad (6.5)$$