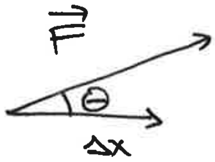
Työ ja konservatiiviset sekä epäkonservatiiviset voimat

Lukion fysiikasta:

Voiman $\vec{F}$ siirtymässä $\Delta\vec{x}$ tekemä työ on

$$W = F\Delta x \cdot \cos\theta$$

missä θ on voiman $\vec{F}$ ja siirtymän $\Delta\vec{x}$ välinen kulma.



Erityisesti

jos $\theta = 0° \Rightarrow W = F\cdot\Delta x$

jos $\theta = 90° \Rightarrow W = 0.$

jos $\theta = 180° \Rightarrow W = -F\cdot\Delta x.$

Vektoreille: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$

↑ pistetulo!

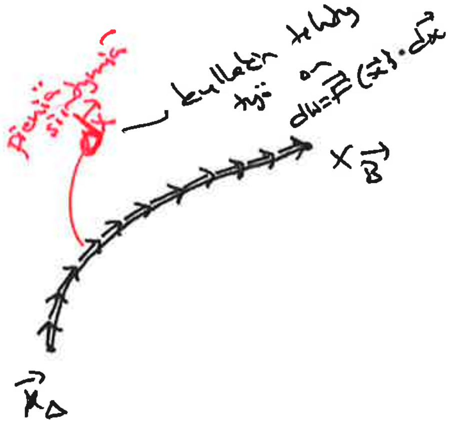
Yo. pätee jos voima on vakio (ei riipu paikasta). Yleisemmin tämä voidaan olettaa vain hyvin pienille siirtymille $d\vec{x}$

$$dW = \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

paikan funktio

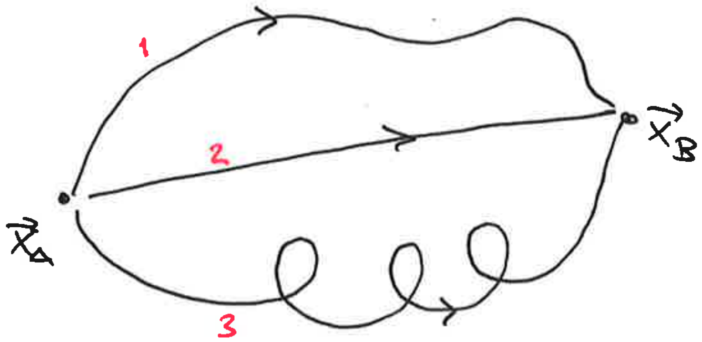
Pitkällä siirtymällä pisteestä $\vec{x}_A$ pisteeseen $\vec{x}_B$ tehty työ saadaan pilkkomalla siirtymä pieniin paloihin ja summaamalla ts. integroimalla

$$W_{AB} = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} dW = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$



Mahdollisia reittejä pisteestä $\vec{x}_A$ pisteeseen $\vec{x}_B$ on monia:

eli polkuja



Kullekin reitille (polulle) voidaan laskea voiman $\vec{F}(\vec{x})$ tekemä työ

$$W_1 = \int_{\vec{x}_A,\ \text{pitkin polkua } 1}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

$$W_2 = \int_{\vec{x}_A,\ \text{pitkin polkua } 2}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

jne...

Jos tehty työ ei riipu reitistä (polusta)
$\Longrightarrow$ voima $\vec{F}$ on konservatiivinen. (esim. gravitaatio, staattiset sähkökentät)

Jos tehty työ riippuu reitin valinnasta
$\Longrightarrow$ voima $\vec{F}$ on epäkonservatiivinen (esim. kitkavoimat)

Systeemi, ympäristö ja energian säilyminen

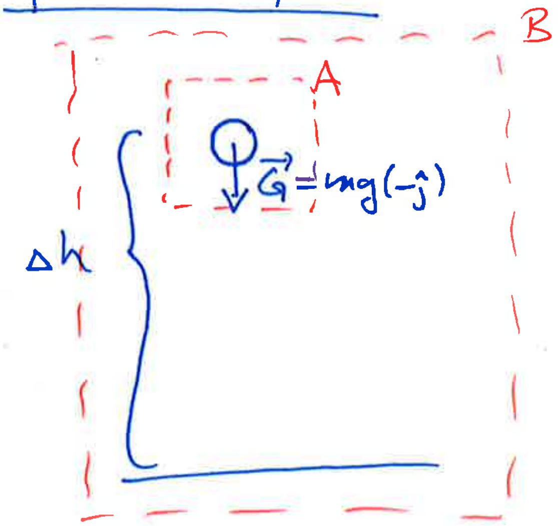
Eri systeemin valintai:

Putoava pallo: tekeekö maapallo (n gravitaatiokenttä) työtä?

pallo
- kyllä: gravitaatiovoima $G = mg$ → työ $W = mg\Delta h$.

pallo + maapallo
- ei: potentiaalienergia $mg\Delta h$ muuttuu kineettiseksi energiaksi mutta kokonaisenergia säilyy.

Systeemi & ympäristö

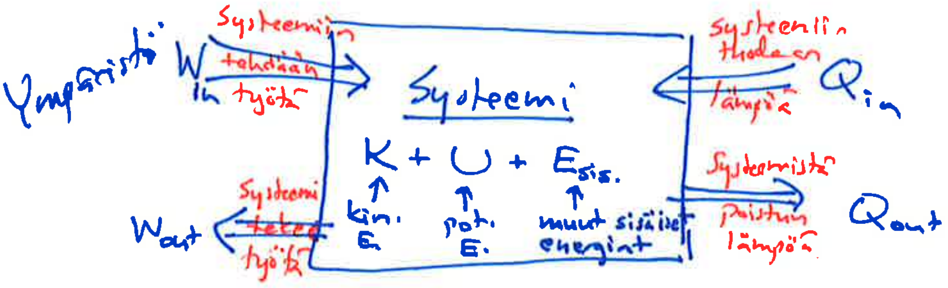


Systeemi A:
$\vec{G}$ ulkoinen voima
⇒ tekee työtä systeemiin
⇒ systeemin energia kasvaa
$E_A = K$ = kineettinen energia

Systeemi B:
ei ulkoisia voimia
⇒ energia säilyy.
⇒ gravitaatiovoima sisäinen
⇒ gravitaatiopotentiaalienergia

⇒ $E_B = K + U$
K: kin. energia
U: potentiaali-energia

Yleisemmin

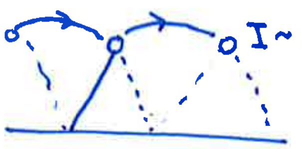


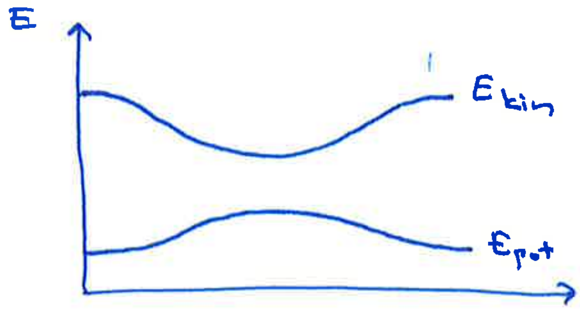
Voi lisätä muitakin energiamuotoja: säteily, massa, $\vec{E}$, $\vec{B}$, ...

- U = kaikki sisäiset konservatiiviset energiat
- E_{sis} = kaikki muut

Esimerkkejä

Kävely





mkp nousee askeleella noin 5cm

$$\Rightarrow \Delta E_{pot} = mg\Delta h = 80\,kg \cdot 10\,m/s^2 \cdot 0{,}05\,m \approx \underline{\underline{40\,J}}$$

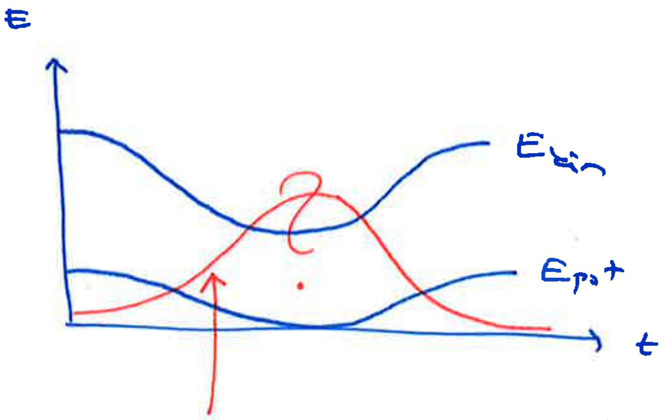
Liike-energia, nopeus ~ 1,5 m/s

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 80\,kg \cdot (1{,}5\,m/s)^2 \approx \underline{\underline{80\,J}}$$

Potentiaalienergian vaihtelut miltei puolet kineettisestä energiasta

$\rightarrow$ liike-energia $\underset{\text{vapautuu}}{\overset{\text{varastoituu}}{\rightleftarrows}}$ potentiaalienergia

Juoksu

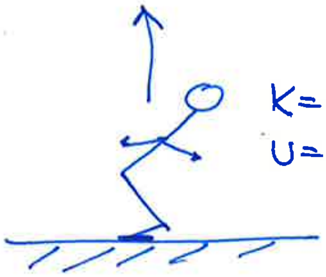


Jänteiden elastiset jännitysominaisuudet

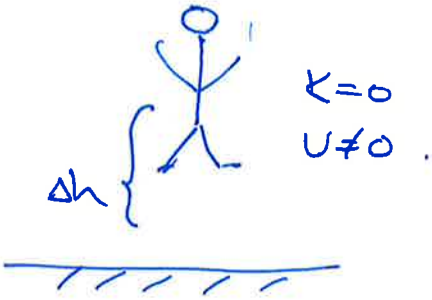
$\rightarrow$ varastoi energian

(Pelkkä akillesjänne varastoi noin 40J)

Hyppy

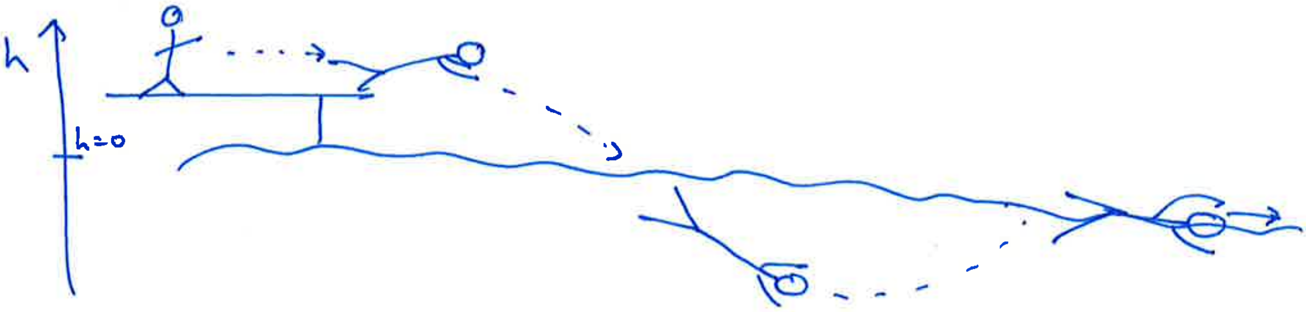


K=0? Systeemi?
U=0 Energiat?
Työ?

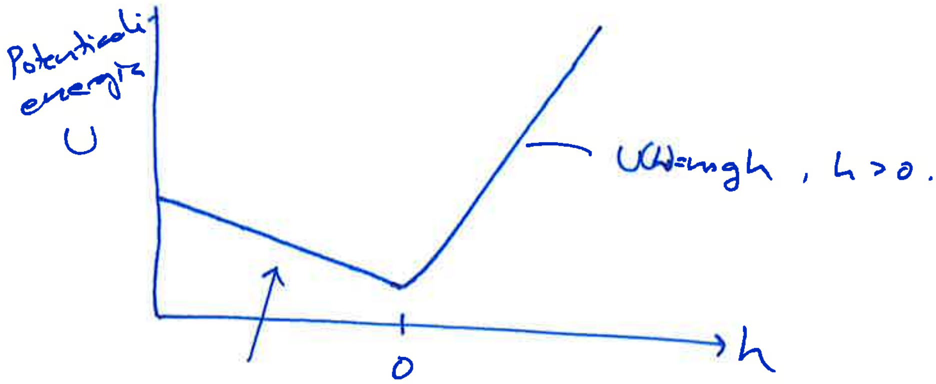


Mistä hyppääjä saa tarvitsemansa energian?

Uinti



Mitä energiamuotoja? Miten energian säilymistä ja erityisesti konservatiivisia voimia hyödynnetään?



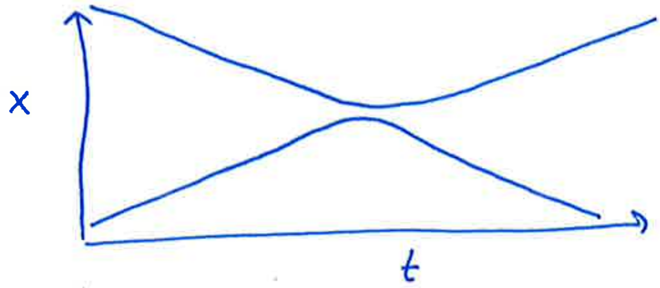
$U = mgh - \rho V g h$

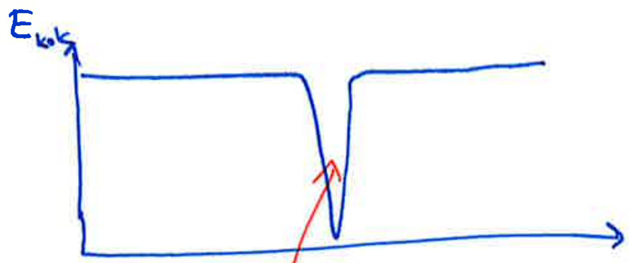
$= (m - \rho V) g h$

Noste!

Miksi noste on konservatiivinen? (Ainakin suunnilleen.)

Elastinen törmäys





mihin energia katosi?
ja ilmestyi takaisin!

Liikemäärä

ei unohdeta liikemäärän säilymistä!

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

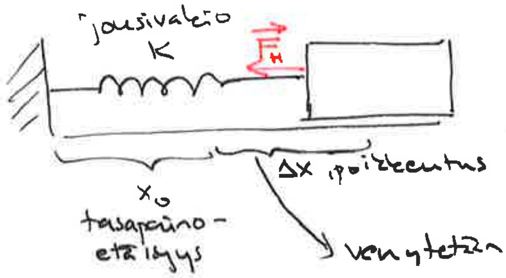
$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m} = \boxed{\frac{p^2}{2m} = E_{kin}}$$

$$\underbrace{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}_{\text{kokonais-liikemäärä}} \underbrace{=}_{\text{säilyy!}} m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

Ilman ulkoisia voimia energia ja liikemäärä säilyvät. Mutta energiamuotoja on monia, liikemäärän muotoja vain yksi.

ELASTISUUSTEORIAA

Jousen venytys & Hooken laki

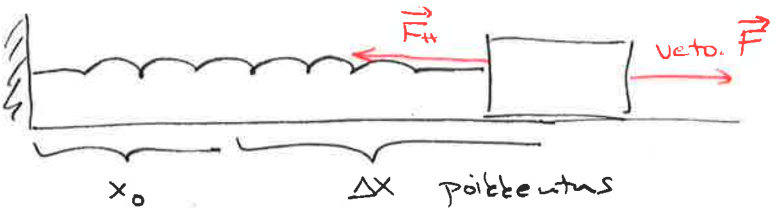


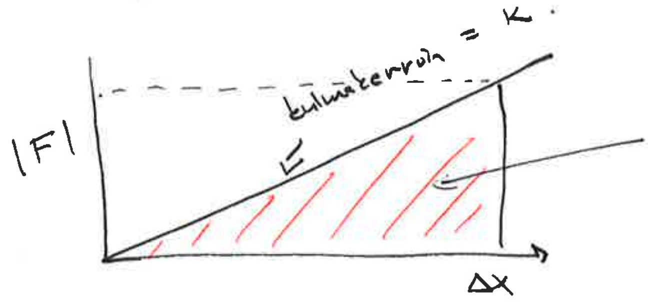
Hooken laki

$$F_H = -k \cdot \Delta x$$

↑ poikkeutus tasapainotilasta

venytetään vetämällä ulkoa





pinta-ala venytyksessä tehtävä työ

$$W = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(k \cdot \Delta x)}_{\text{korkeus}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{leveys}} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 .$$

↑ kolmion pinta-ala

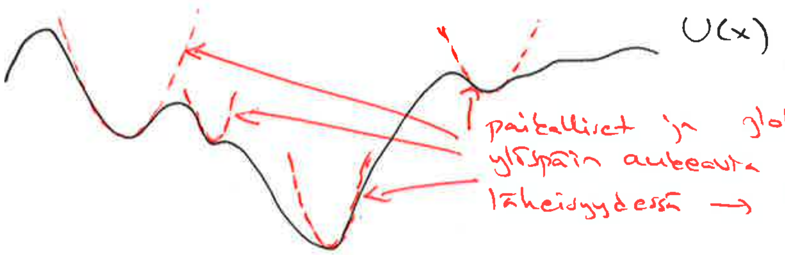
Venytyksen vaatima työ/energia varastoituu jousen potentiaalienergiaksi.

Konservatiivinen voimakenttä

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2} k x^2}$$

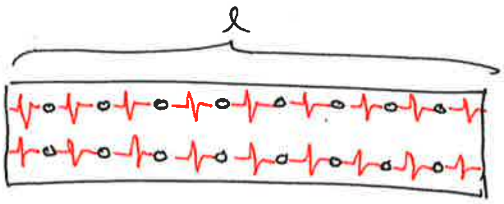
"harmoninen voimakenttä"

(Lähes) mielivaltaisen konservatiivisen voimakentän potentiaalienergia tasapainotilan läheisyydessä on harmoninen:



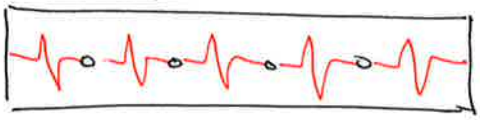
paikalliset ja globaalit minimit ylöspäin aukeavia paraabeleja tasapainotilan läheisyydessä → harmoninen approksimaatio.

Palkin jousimalli



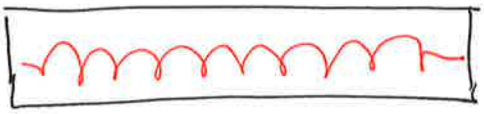
Kappale (palkki) koostuu monesta toisiinsa kytkeytyneistä molekyyleistä. Molekyylien välistä vuorovaikutusta voidaan kuvata yksinkertaisilla jousilla.

Jos yhden "alkeisjousen" jousivakio on k_0 niin

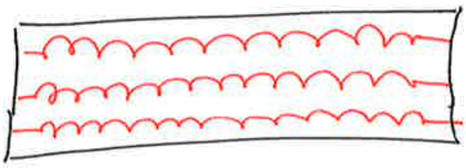


N peräkkäistä alkeisjousta k_0

vastaa

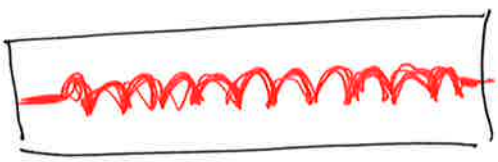


yhtä ekvivalenttia jousta, jonka jousivakio $k_1 = k_0/N$.



M rinnakkaista jousta k_1

vastaa



yhtä ekvivalenttia jousta $k = M \cdot k_1$.

⇒ Palkin "jousivakio"

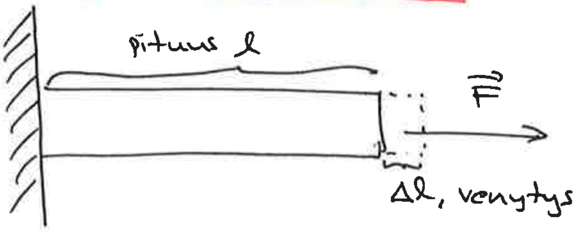
$$\boxed{k = E \cdot \frac{A}{l}}$$

poikkipinta-ala → verrannollinen rinnakkaisten jousten määrään M.

palkin pituus → verrannollinen peräkkäisten jousten määrään N.

jokin materiaalivakio (Youngin moduli)

Palkin venytys



venyttävä voima

Mallinnetaan elastisella venytyksellä

Hooken laki

$$\boxed{F = +k\cdot\Delta l}$$

venymä eli pituuden muutos.

venyttävä voima

"jousivakio"

tarkastellaan vain suuruuksia
⇒ kaikki suureet nyt positiivisia.

jousimalli:

$$\boxed{k = E\cdot\frac{A}{l}}$$

poikkipinta-ala

palkin jousivakio

pituus

materiaalin ominainen kimmomoduli (Youngin moduli)

⇒

$$F = +E\cdot\frac{A}{l}\cdot\Delta l \quad \Big| : A$$

⇒

$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\substack{\text{jännitys} \\ =:\,\sigma}} = +E\cdot\underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\substack{\text{suhteellinen venymä} \\ =:\,\varepsilon}}$$

⇒

$$\sigma = +E\cdot\varepsilon$$

Eli

$$\sigma = E\varepsilon$$

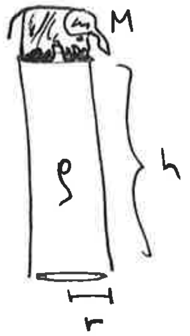
jännitys

Youngin moduli

suhteellinen venymä

Keskeistä termistöä

Esimerkki



Mikä oltava betonipylvään säde jotta pylväs kantaisi norsun?

Korkeus $h = 10\,\mathrm{m}$

Betonin tiheys $\rho \approx 3000\,\mathrm{kg/m^3}$

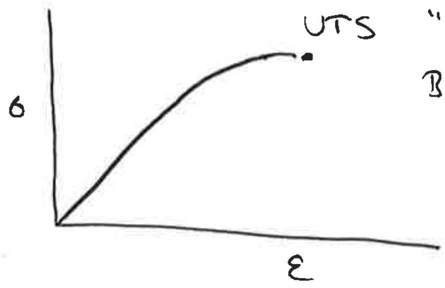
Norsun massa $M \approx 5000\,\mathrm{kg}$

Missä jännitys (puristus) suurin? Pohjalla.

Voima $F = M\cdot g + \underbrace{V\cdot\rho}_{\text{pylvään massa}}\cdot g$, $V = A\cdot h$, $A = \pi r^2$

$\Rightarrow$ jännitys $\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{M\cdot g + V\cdot\rho\cdot g}{A} = \dfrac{Mg}{A} + \rho h g.$ $\quad A = \pi r^2$

Milloin murtuu?



"Ultimate tensile strength" σ_{crit}.

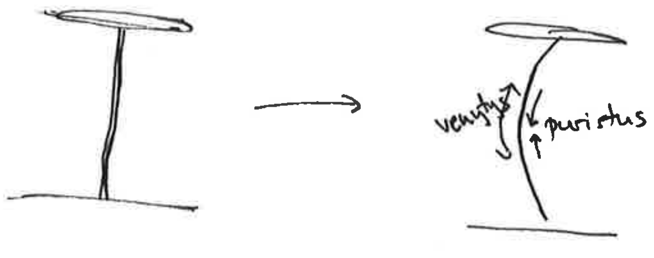
Betonille $\sigma_{crit} \approx 20\,\mathrm{MPa}$ puristuksessa

$\Rightarrow$ kriittinen (minimi) säde r_{crit} kun

$$\sigma = \sigma_{crit} = \frac{Mg}{\pi r_{crit}^2} + \rho h g$$

$$\Rightarrow \quad r_{crit} = \sqrt{\frac{Mg/\pi}{\sigma_{crit} - \rho h g}} \approx \sqrt{\frac{\frac{5000\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{\pi}}{20\,\mathrm{MPa} - \underbrace{3000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\cdot 10\,\mathrm{m}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}_{3\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}}} \approx \underline{\underline{3\,\mathrm{cm}}}$$

Todellisuudessa 3cm tuskin riittää:



betonin "UTS" venytyksessä paljon puristuskestävyyttä pienempi.