Vektoreista

- Vektorilla "suunta" ↗ & "pituus"
- Fysiikan monet suureet vektoreita: voima $\vec{F}$, nopeus $\vec{v}$, kiihtyvyys $\vec{a}$ ja jopa paikka $\vec{r}$.
- Huomaa, että vektorilla voi olla myös <u>dimensio</u>, esim. $\vec{F} = (1N, 2N, 0)$
- Vektoreilla erilaisia esitystapoja. Tutuin karteesisen koordinaatiston komponenttiesitys $\vec{F} = (1N, 2N, 0) = 1N\,\hat{x} + 2N\,\hat{y} + 0\cdot\hat{z}$

  x, y, z-suuntaisia <u>yksikkövektoreita</u>

- Peruslaskutoimitukset lukiosta tuttuja?

  $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$; $\vec{B} = (b_x, b_y, b_z)$, $|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

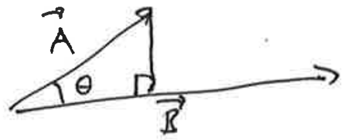
  vektorin pituus tai normi

  $\vec{A} \pm \vec{B} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

  $c \cdot \vec{A} = (c \cdot a_x, c \cdot a_y, c \cdot a_z)$

- Tarvitsemme kaksi laskutoimitusta lisää:
  - pistetulo $\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_x b_x, a_y b_y, a_z b_z)$

    eli "kerrotaan komponenteittain".
  - geometrisesti pistetulo on $\vec{A}$:n projektion $\vec{B}$:lle pituus (kertaa B:n pituus)



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta .$$

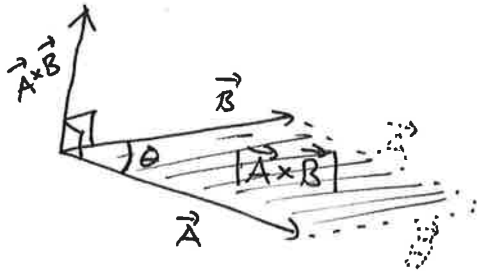
(lukion geometriasta tuttu!)

  - huomaa: pistetulo on itsessään <u>skalaari</u> eli luku (ei vektori!)
  - vektorin normi $|\vec{A}| = \sqrt{\underbrace{\vec{A} \cdot \vec{A}}_{\text{vektorin pistetulo itsensä kanssa.}}}$

• ristitulo $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, -a_x b_z + a_z b_x, a_x b_y - a_y b_x)$

determinantti
(ei tarvitse vielä tuntea, mutta aikanaan se on hyvä muistisääntö)

- geometrisesti



1) ristitulo on vektori, joka on kohtisuorassa vektorien $\vec{A}$ ja $\vec{B}$ virittämälle tasolle.

2) ristitulo(vektorin) pituus on $\vec{A}$:n ja $\vec{B}$:n virittämän suunnikkaan pinta-ala. Geometriasta:

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\theta$$

• Monissa lukion fysiikan kaavoissa esiintyy vektorisuureiden välisiä kulmia. ~~Esim.~~ Nämä kannattaa esittää piste- ja ristitulon avulla. Esim.

Työ $W = F\cdot s\cdot\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{s}$

kulma ja os voima & siirtymän välinen kulma θ.

Voima

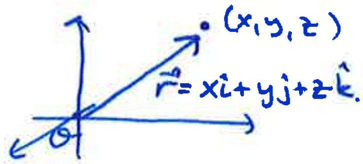
siirtymä

Vääntö (ts. voiman momentti)

$$\cancel{\vec{M}} = \boxed{\vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau}}$$

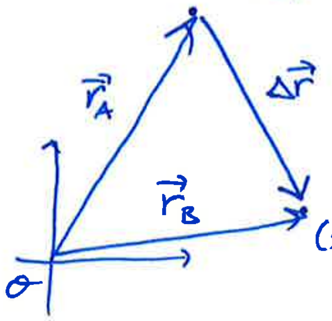
(Sähkömagnetismin kurssi tulee olemaan täynnä piste- ja ristituloja. Termodynamiikassa vähemmän.)

Paikka, nopeus ja kiihtyvyys



Kolmiulotteinen paikka (x,y,z) voidaan kuvata paikkavektorilla $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ kun kiinnitämme origon ja koordinaatiston jonnekin.

Siirtymä (displacement) $\Delta\vec{r}$ on kahden paikkavektorin erotus, eli kuvaa miten yhdestä pisteestä $\vec{r}_A = x_A\hat{i} + y_A\hat{j} + z_A\hat{k}$ siirrytään toiseen pisteeseen $\vec{r}_B = x_B\hat{i} + y_B\hat{j} + z_B\hat{k}$



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

Huomaa: $\Delta\vec{r}$ ei riipu origon paikasta, paikkavektorit $\vec{r}_A$ ja $\vec{r}_B$ sen sijaan ovat koordinaatistoriippuvia.

Jos (kappaleen) paikka riippuu ajasta, kirjoitetaan sen paikkavektori:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}.$$

Nopeus (keskimääräinen ~~hetkellinen~~) on

$$\vec{v}_{av}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{\Delta t} = \frac{\text{"siirtymä ajassa } \Delta t\text{"}}{\text{aika } \Delta t}$$

Hetkellinen nopeus on raja-arvo kun $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \vec{r}\,'(t) = D\vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

Eli nopeus on paikan aikaderivaatta.

Vastaavasti $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$.

Selvästi nopeus ja kiihtyvyys ovat myös vektoreita:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{v_x(t)}\hat{\imath} + \underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{v_y(t)}\hat{\jmath} + \underbrace{\frac{dz(t)}{dt}}_{v_z(t)}\hat{k}$$

$$= v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}.$$

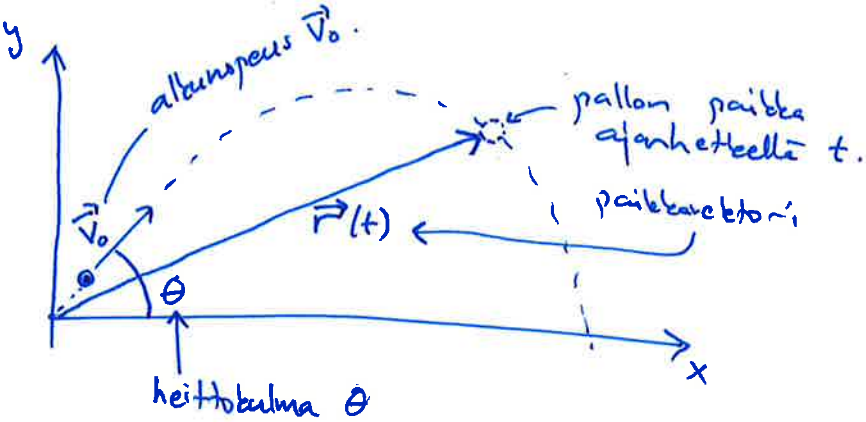
ja

$$\vec{a}(t) = \ldots = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{k}$$

$$= a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k}.$$

Esimerkki: heittoliike.

Koska meillä ei ole vielä integrointia työkaluna, niin tehdään lasku takaperin.



Unohdetaan ilmanvastus.
Heitetään pallo (maanpinnan tasosta, $y=0$) kulmassa θ.
Alkuvauhti olkoon v_0.

Nyt siis alkunopeus $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = v_0 \cos\theta \cdot \hat{\imath} + v_0 \sin\theta \cdot \hat{\jmath}$.

Pallon paikka ajanhetkellä t on (tai voidaan osoittaa että...)

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\theta \cdot t)\,\hat{\imath} + (v_0 \sin\theta \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2)\,\hat{\jmath}.$$

Ratkaistaan nopeus ajanhetkellä t:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 \cos\theta \cdot t)\,\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(v_0 \sin\theta \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2)\,\hat{\jmath}$$

$$= \underbrace{v_0 \cos\theta \cdot \hat{\imath}}_{\text{ei riipu ajasta!}} + \underbrace{(v_0 \sin\theta - g t)\,\hat{\jmath}}_{\text{aivan kuten heitto suoraan ylöspäin!}}$$

Ja kiihtyvyys:

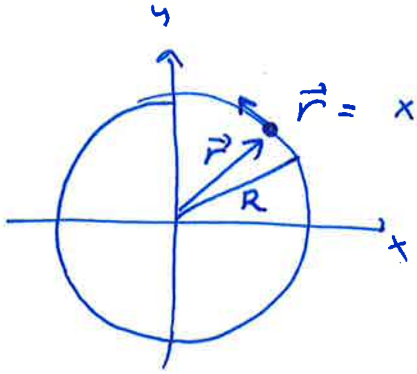
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \overbrace{\frac{d}{dt}(v_0 \cos\theta)}^{0}\,\hat{\imath} + \overbrace{\frac{d}{dt}(v_0 \sin\theta - g t)}^{-g}\,\hat{\jmath}$$

$$= -g\hat{\jmath}.$$

Newton II takaperin: $\sum \vec{F} = m\vec{a}(t) = -mg\hat{\jmath}$. Eli kappaleeseen kohdistuu vain painovoima (alaspäin).

Hyvältä kuulostaa!

Tärkeä erikoistapaus: tasainen ympyräliike.



$\vec r = x(t)\,\hat\imath + y(t)\,\hat\jmath$. Tasaisessa ympyräliikkeessä

$$x(t) = R\cdot\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

"kulmanopeus" palaamme tähän myöhemmin.

Hetkellinen vauhti:

$$v(t) = |\vec v(t)| = \left|\frac{d}{dt}\vec r(t)\right|$$

$$= \left|\frac{d}{dt}(R\cos(\omega t))\,\hat\imath + \frac{d}{dt}(R\sin(\omega t))\,\hat\jmath\right|$$

$$= \left|-R\omega\sin(\omega t)\,\hat\imath + R\omega\cos(\omega t)\,\hat\jmath\right|$$

$$= \cancel{(R\omega)}\sqrt{(R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2}$$

$$= R\omega\sqrt{\sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2} = R\omega = \text{vakio}.$$

$= \text{kiertovauhti} =: v_0$.

Hetkellinen kiihtyvyys:

$$\vec a(t) = \frac{d\vec v(t)}{dt} = -R\omega^2\cos(\omega t)\,\hat\imath - R\omega^2\sin(\omega t)\,\hat\jmath$$

$$= -\omega^2\vec r(t).$$

Eli

$$\vec a(t) = -\omega^2\vec r(t)$$

Kiihtyvyyden suuruus:

$$|\vec a(t)| = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R}.$$

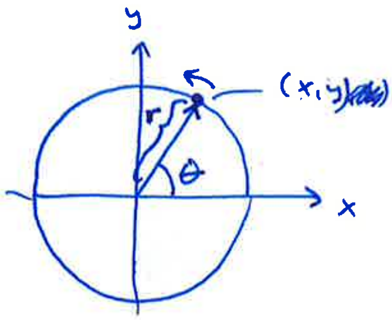
ja suunta on vastakkainen hetkelliselle paikkavektorille → suunta kohti ympyrän keskipistettä.

KESKIHAKUKIIHTYVYYS.

Opetus: nopeudelle kohtisuora kiihtyvyys ei muuta nopeuden suuruutta vaan ainoastaan sen suuntaa

Kiertokulma, kulmanopeus ja -kiihtyvyys

Ympyräliikettä jonkin akselin ympäri helpompi kuvata sylinterikoordinaatistossa



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta . \end{cases}$$

$\downarrow$

esitetään paikkaa (x,y) vain säteen ja kulman avulla (r,θ).

θ = kiertokulma "theta"

Jos r = vakio niin kiertokulman muuttuessa saadaan ympyrärata. Kiertokulman aikaderivaatta on kulmanopeus

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad \text{"omega"}$$

ja sen aikaderivaatta on kulmakiihtyvyys

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}. \qquad \text{"alfa".}$$

Määritelmiä:
kiertoaika $T = \frac{2\pi}{\omega}$ eli yhteen kierrokseen kuluva aika.
Taajuus $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Tasossa (kahdessa ulottuvuudessa) riittää käsitellä kiertokulmaa ja kulmanopeutta skalaareina mutta kuten normaalikin nopeus myös esim. kulmanopeus on vektorisuure kolmessa ulottuvuudessa.

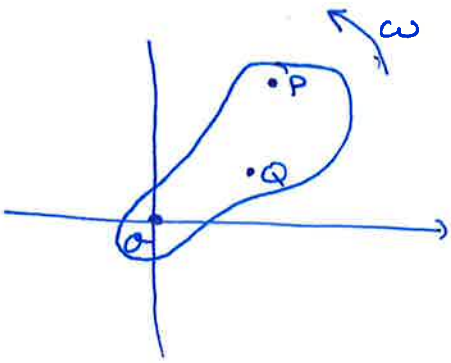
Määritelmä: kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$: suuruus on itse kulmanopeus ja suunta on pyörimisakselin suunta oikean käden ruuvisäännön mukaan.

Vastaavasti kiertokulma $\vec{\theta}$ ja kulmakiihtyvyys $\vec{\alpha}$.

Jäykän kappaleen dynamiikkaa

Jäykkä kappale on sellainen, jonka muoto ei muutu.

Tarkastellaan jäykkää kappaletta, joka pyörii jonkin akselin O ympäri



Muoto säilyy
⇒ jokainen kappaleen piste (P ja Q) pyörii samalla kulmanopeudella ω.

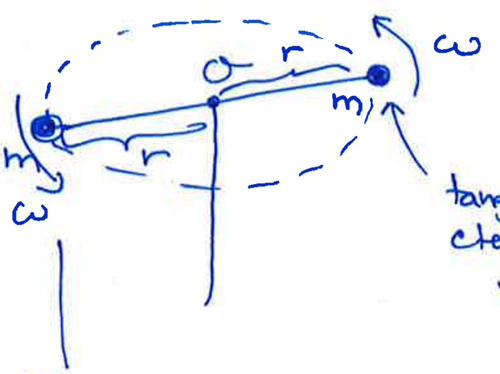
Kappale voi pyörimisen lisäksi olla etenevässä liikkeessä (kuten tavallinen pistemäinen kappale).

Jäykän kappaleen liike voidaan aina jakaa yhdistelmäksi kolmiulotteista etenevää liikettä ja pyörimisliikettä kolmen kohtisuoran akselin ympäri.

⇒ kuusi vapausastetta.

Pyörivän (jäykän) kappaleen liike-energia

Kuten etenevän liikkeen liike-energia ($\frac{1}{2}mv^2$) myös pyörimisliikkeeseen liittyy energiaa:



keskipisteensä ympäri pyörivän sauvan päässä massat m.

tangentiaalinen etenemisnopeus $v = r\omega$. ⇒ kin. energia $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

kin. energia myös $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$

sauvan pyörimisen liike-energia

$$2\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(2mr^2)}_{\text{sauvan hitausmomentti}}\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

$I = 2mr^2$.

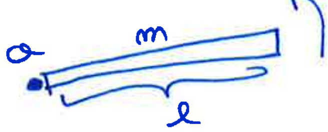
Yleisesti: akselin O ympäri kulmanopeudella ω pyörivän kappaleen pyörimisen liike-energia on

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

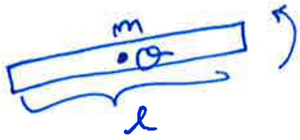
missä hitausmomentti I riippuu kappaleen massasta, muodosta sekä akselin O paikasta.

Muutama kätevä tulos (taulukkotavaraa)

homogeeninen tanko

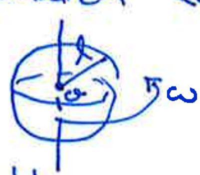


$I = \frac{1}{3}m\ell^2$



$I = \frac{1}{12}m\ell^2$

umpinainen kuula



$I = \frac{2}{5}m\ell^2$

kiekko

$I = \frac{1}{2}m\ell^2$