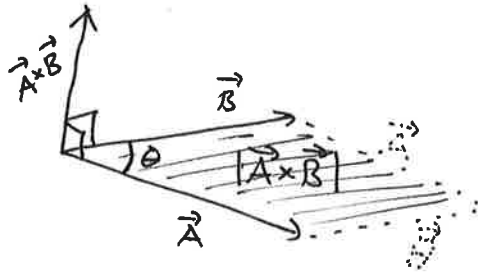


• ristitulo  $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, -a_x b_z + a_z b_x, a_x b_y - a_y b_x)$

determinantti  
(ei tarvitse vielä tuntea,  
mutta aikanaan se on  
hyvä muistisääntö)

- geometrisesti



1) ristitulo on vektori, joka on kohtisuorassa vektorien  $\vec{A}$  ja  $\vec{B}$  virittämälle tasolle.

2) ristitulo (vektorin) pituus on  $\vec{A}$ :n ja  $\vec{B}$ :n virittämän suunnikkaan pinta-ala.

Geometriasta:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta$$

• Monissa funktion fysiikan kaavoissa esiintyy vektorisuureiden välisiä kulmia. ~~Esimerkiksi~~ Nämä kannattaa esittää piste- ja ristitulon avulla. Esim.

Työ  $W = F \cdot s \cdot \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$\swarrow$  kulma, osavoima & siirtymän välinen kulma  $\theta$ .  
 $\uparrow$  voima       $\uparrow$  siirtymä

Vääntö: (ts. voiman momentti)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

(Sähkömagneettisissa kurssi tulee olemaan täynnä piste- ja ristituloja. Termodynamiikassa vähemmän.)

# Pyörimismäärä

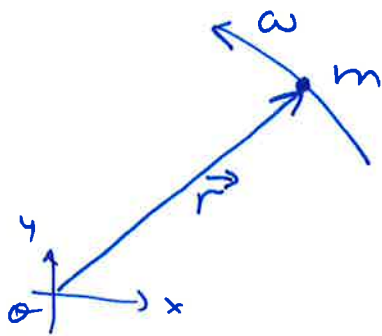
Kokeellisesti havaitaan että ulkoisten voimien puuttuessa suure

$$L = I \cdot \omega \quad \text{säilyy.}$$

$L$  on pyörimismäärä tai kulmaliiemäärä, (vrt. liiemäärä)

Pyörimismäärän säilymislaki on yksi keskeisen fysiikan säilymislaki.

Jos tarkastellaan pistemäistä kappaletta (massa  $m$ )



$$\begin{aligned} L &= I \cdot \omega = \underbrace{mr^2}_{mr^2} \omega \\ &= r \cdot \underbrace{m r \omega}_{v \text{ (tangentiaalinen nopeus)}} \\ &= r \cdot \underbrace{mv}_{\text{liiemäärä } p} \\ &= r \cdot p. \end{aligned}$$

Määritelmä:

Pistemäisen kappaleen pyörimismäärä

on

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

(liiemäärän ensimmäinen momentti)

Ja tästä voidaan johtaa esimerkiksi pyöriksen jäykän kappaleen pyörimismäärä

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}.$$



# Vääntömomentti

↳ säilyy vaan miten se siis muuttuu?

ulkoisen voiman aiheuttama vääntömomentti:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = - \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{r} + \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

pyörimismäärän muutosnopeus (aita-derivaatta)      Liikemäärän aikaderivaatta = voima (Newton II)      paikan aikaderivaatta = nopeus  $\vec{v}$

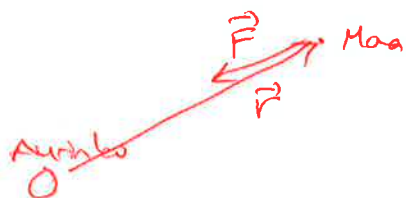
$$= - \vec{F} \times \vec{r} + \vec{p} \times \vec{v}$$

$\vec{p} \times \vec{v} = m\vec{v} \times \vec{v}$   
 samansuuntaiset  $\vec{v} \times \vec{v} = v \cdot v \cdot \sin \theta = 0$   
 "vipuvarsi"  $\vec{F} \times \vec{r} = \vec{\tau}$   
 Vääntömomentti

Esim.

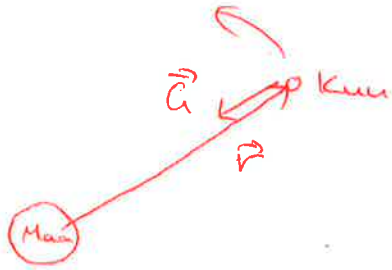


oven sarana ei aiheuta vääntöä (jos avaimen kuvan mukaan symmetrisesti)



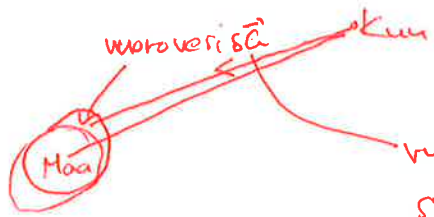
Auringon maahan kohdistama gravitaatiovoima  $\vec{F} \parallel \vec{r}$   
 $\Rightarrow$  ei vääntöä  
 $\Rightarrow$  maapallon liento liikkeen pm (suunnilleen) säilyy

Mutta



Maa ei aiheuta vääntöä kuuun,  
jos maa ajattelisiin jäykäksi (ja  
symmetriseksi) kappaleeksi

Toiselta



vuorovesi aiheuttaa pienen  
sivuttaisen komponentin kuuun  
kohdistuvalle gravitaatiovoimalle.

⇒ Vääntö

⇒ pm kavea

⇒ kuuun vauhti kasvaa

⇒ kuu loittounee (4 senttiä/vuosi)

Vuorovesi NIIV nopealla!  
(tai pm  
syrjymisen  
nopealla)

maan pyörimisen hidastuu  
→ päivä pitenee.

→ kunnes kuu kausi ja  
päivä samanpituiset, eli  
kuu paikallaan pyörivään  
maahan nähden.