

---

# Plasmafysiikan perusteet

Seppo Karttunen



# PLASMAFYSIIKAN PERUSTEET

Seppo Karttunen

Valtion teknillinen tutkimuskeskus  
Ydinvoimatekniikan laboratorio  
Tekniikantie 4, 01251 Espoo

Raportti TKK-F-B134  
28.6. 1991

ISBN 951-22-0750-8  
ISSN 0355-7804

---

Teknillisen korkeakoulun kurssin "Plasmafysiikka ja fuusioreaktorit" (Tfy-56.139)  
plasmafysiikan osan luennot kevätlukukaudella 1991.

## ALKUSANAT

Tämä raportti on syntynyt useana vuotena luennoimani kurssin *Plasmafysiikka ja fuusioreaktorit* (Tfy -56.139) plasmafysiikan osan sisällöstä. Luentojen tarkoituksena on lyhyt johdatus plasmafysiikkaan ja plasmafysiikan fuusiosovelluksiin. Kurssin suppeudesta johtuen tärkeitä plasmafysiikan osa-alueita, kuten kuljetusilmiöt, plasman säteily ja epälineaariset ilmiöt, on jouduttu kokonaan jättämään sisällön ulkopuolelle. Lähdemateriaalina on käytetty monisteen lopussa lueteltuja kirjoja sekä TkT Jorma Virtamon 70-luvun alussa pitämiä plasmafysiikan luentoja TKK:ssa. Lausun parhaat kiitokseni DI Mikko Alavalle, dosentti Jukka Heikkiselle, DI Timo Pättikankaalle, professori Rainer Salomaalle ja kurssin assistenttina toimineelle DI Seppo Sipilälle käsikirjoituksen tarkastamisesta ja lukuisista hyödyllisistä kommentteista ja parannusehdotuksista.

Seppo Karttunen  
Espoo 1991

# Sisällysluettelo

<b>1 Johdanto</b>	<b>5</b>
1.1 Plasman perusominaisuuksia . . . . .	6
1.2 Plasmafysiikan perusjaottelu . . . . .	8
1.3 Lämpöydinfuusio . . . . .	9
<b>2 Varatun hiukkasen liike</b>	<b>12</b>
2.1 Liikkeyhtälöt . . . . .	12
2.2 Liike yksisuuntaisessa magneettikentässä . . . . .	13
2.3 $E \times B$ -ajautuminen . . . . .	15
2.4 Epähomogeeninen magneettikenttä . . . . .	17
2.5 Adiabaattiset invariantit . . . . .	20
2.6 Tasoallon sähkömagneettinen kenttä . . . . .	24
2.7 Ponderomotiivinen voima . . . . .	25
<b>3 Magnetohydrodynamiikka</b>	<b>29</b>
3.1 Magnetohydrodynamiikan perusyhtälöt . . . . .	29
3.2 Ideaalinen MHD-teoria . . . . .	33
3.3 Magneettikentän resistiivinen diffuusio . . . . .	34
3.4 Magnetohydrodynaaminen tasapaino . . . . .	35

3.5	MHD-epästabiilisuudet . . . . .	37
3.6	Magnetohydrodynaamiset aallot . . . . .	40
3.7	Coulombin törmäykset . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Aallot kylmässä plasmassa</b>	<b>45</b>
4.1	Aaltoihin liittyviä käsitteitä . . . . .	45
4.2	Itseiskonsistentti kenttä . . . . .	48
4.3	Approksimaatiot ja perusyhtälöt . . . . .	49
4.4	Johtavuus- ja dielektrisyystensori . . . . .	51
4.5	Yleinen dispersiorelaatio . . . . .	53
4.6	Törmäysten vaikutus . . . . .	55
4.7	Aallot magneettikentättömässä plasmassa . . . . .	56
4.8	Kylmä magneettikentällinen plasma . . . . .	60
4.9	Alfvénin aallot . . . . .	62
4.10	Suuntiin $\theta = 0, \pi/2$ etenevät aallot . . . . .	63
4.11	Resonanssit ja katkaisut . . . . .	65
4.12	CMA-diagrammi . . . . .	66
4.13	Appleton-Hartreen dispersiorelaatio . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Plasman kineettinen teoria</b>	<b>73</b>
5.1	Hiukkasjakautumafunktio . . . . .	73
5.2	Vlasov-Maxwellin yhtälöt . . . . .	74
5.3	Debyen varjostettu potentiaali . . . . .	76
5.4	Plasmavärähtelyt kuumassa plasmassa . . . . .	78
5.5	Bohm-Grossin dispersiorelaatio . . . . .	81

5.6	Landau-vaimennus . . . . .	82
5.7	Mikroepästabiilisuudet . . . . .	84
5.8	Ioniakustinen aalto . . . . .	86
	<b>Kirjallisuutta plasmafysiikasta</b>	<b>91</b>



# Luku 1

## Johdanto

Plasma määritellään varattujen hiukkasten systeemiksi, jossa hiukkasten väliset vuorovaikutukset määrää Coulombin voima. Yleisimmin plasma käsitetään ionisoituneeksi kaasuksi. Plasmoina voidaan pitää myös elektrolyyttejä ja elektroni-kaasua metalleissa. Termin "plasma" otti käyttöön plasmavärähtelyjen keksijä Irving Langmuir vuonna 1928 [Proc. Natl. Acad. Sci. 14 627].

Coulombin voimalla on pitkä kantama ja se vaikuttaa useisiin partikkeleihin samanaikaisesti. Tämä johtaa kollektiivisiin vuorovaikutuksiin ja hyvin rikkaaseen ilmiömaailmaan. Plasma ei ole siten vain sähköä johtava kaasu, jossa hiukkasvuorovaikutukset ovat lyhyen kantaman biljardipallotyyppisiä törmäyksiä.

Plasmaa voidaan pitää aineen neljäntenä olomuotona kiinteän, nesteen ja kaasun jälkeen. Analogia antiikin Kreikan alkuaineisiin on ilmeinen (maa, vesi, ilma ja tuli). Kuumennettaessa kaasua uloimmat elektronit irtoavat ja muodostuu elektronien ja ionien seos, joka pysyy ulkoisesti neutraalina. Energiaa lisättäessä ionisaatio tulee yhä täydellisemmäksi. Jo hyvin pienellä ionisaatioasteella 0.1-1 % kaasu saa tyypillisiä plasman ominaisuuksia. Ionisaatio seuraa kaasun kuumennuksesta, ulkopuolisesta säteilystä tai hiukkaspommituksesta.

Maailmankaikkeuden materiasta on plasmaa yli 99 %, joten plasmatila on aineen yleisin olomuoto. Aurinko ja tähdet ovat ionisoituneita (korkea lämpötila). Planeettojen ja tähtien välinen kaasu ionisoituu säteilyn seurauksena. Auringon ultraviolettisäteily ionisoi ilmakehän uloimmat kerrokset noin 60 km ylöspäin (ionosfääri). Vielä ulompana sijaitsevat nk. van Allenin vyöhykkeet, jotka muodostuvat maan magneettikenttään loukkuun jääneistä varatuista hiukkasista. Maan päällä plasmatila on harvinainen. Luonnossa plasmaa syntyy vain salamaniiskuissa. Keinotekoisia plasmajoja ovat kaaripurkaukset, salamavalot ja laboratorio-plasmat esimerkiksi fuusiolaitteissa.

Plasmafysiikan tärkeimmät sovellutukset koskevat auringon fysiikkaa (auriongpilkut, auringon korona, aurinkotuuli, jne), astrofysiikkaa (tähtien rakenne, radio-



astronomia), ionosfäärin ilmiöitä ja lämpöydin fuusiota, jossa polttoaine on plasmatilassa. Onnistuessaan fuusio on lopullinen ja kestävä ratkaisu ihmiskunnan energiakysymykseen, joten siihen liittyviin plasmafysiikan sovellutuksiin uhrataan huomattava tutkimuspanos useimmissa kehittyneissä maissa. Muita plasmafysiikan sovellutuksia ovat MHD-generaattori (kineettinen energia suoraan sähköksi), plasmamoottorit (sähkö kineettiseksi energiaksi), mikroaaltokomponentit, plasmakemia ja materiaalipintojen plasmakäsittely. Myös maan magnetismin tutkimus voidaan lukea plasmafysiikaksi (magnetohydrodynamiikka).

Plasmafysiikan voidaan katsoa alkavan 1920-luvulta ja ensimmäisiä alan pioneereja olivat Langmuir ja Tonks, jotka tutkivat plasmavärähtelyjä [Phys. Rev. **33** (1929), 195]. Toisen tärkeän plasmailmiön, varjostetun Coulombin potentiaalilin havaitsivat Debye ja Hückel tutkiessaan varausten liikkumista elektrolyyteissä. Virtaa kuljettavan plasman kuroutumisen (pinch), jolla on tärkeä merkitys plasman magneettisessa koossapidossa, havaitsi Bennett jo 1930-luvulla [Phys. Rev. **45** (1934) 890]. Plasma-aaltojen tutkimuksessa edelläkävijöitä olivat Appleton ja Harte, jotka tutkivat radioaaltojen etenemistä ionosfäärissä. Ruotsalaista Hannes Alfvénia pidetään magnetohydrodynamiikan (MHD) isänä. MHD-teoria lähti alkuun Alfvénin töistä 1940-luvun alussa [Arkiv. f. Mat. **29B** (1942) No. 2]. Plasmojen kineettinen teoria syntyi myös 40-luvulla Vlasovin ja Landaun toimesta. Vlasovin yhtälö on kineettisen teorian perusyhtälö, josta Landau löysi plasma-aalloille törmäyksettömän vaimennusmekanismin, joka tunnetaan hänen mukaansa Landau-vaimennuksena [J. Phys. (USSR) **10** (1946), 25].

## 1.1 Plasman perusominaisuuksia

Kollektiiviset ilmiöt (esim. aallot) johtuvat Coulombin voiman pitkästä kantamasta, jolloin hiukkanen tuntee vuorovaikutuksen suuren hiukkasjoukon kanssa. Varatun hiukkasen Coulombin potentiaalilin kantama on ääretön ( $\phi \sim 1/r$ ). Hiukkasjoukossa muiden hiukkasten aiheuttama varjostus rajoittaa potentiaalilin kantaman äärellisen pituiseksi (nk. Debye-pituus,  $\lambda_D$ ):

$$\phi(r) \sim \frac{1}{r} e^{-r/\lambda_D}; \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n q^2}}, \quad (1.1)$$

missä  $T$  on plasman lämpötila,  $n$  tiheys ja  $q$  hiukkasten varaus. Kollektiivisten ilmiöiden esiintyminen edellyttää, että  $\lambda_D$ -säteisen Debye-pallon sisällä olevien hiukkasten lukumäärä on suuri:  $n \lambda_D^3 \gg 1$ . Tämä pitää useimmiten paikkansa, kuten taulukko 1.1 osoittaa.

Koska plasman varaukset eivät ole sidottuja, plasman sähkönjohtavuus on hyvä. Tästä syystä plasmoissa esiintyy suuria virtoja, mistä johtuen magneettiset voimat ovat tärkeitä. Usein plasmaan vaikuttaa myös ulkoinen magneettikenttä

Taulukko 1.1: *Plasmaparametrien suuruusluokat erilaisille plasmaille*

	$n$ [m <sup>-3</sup> ]	$T$ [K]	$B$ [T]	$\omega_p$ [s <sup>-1</sup> ]	$\Omega_e$ [s <sup>-1</sup> ]	$\lambda_D$ [m]	$n\lambda_D^3$
Tähtien väli	10 <sup>6</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>-10</sup>	6×10 <sup>4</sup>	20	7	3×10 <sup>8</sup>
Auringon korona	10 <sup>12</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>-8</sup>	6×10 <sup>7</sup>	2×10 <sup>3</sup>	0.07	3×10 <sup>8</sup>
Ionosfääri	10 <sup>12</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>-5</sup>	6×10 <sup>7</sup>	2×10 <sup>6</sup>	2×10 <sup>-3</sup>	10 <sup>4</sup>
Fuusioplasmat							
– tokamak	10 <sup>20</sup>	10 <sup>8</sup>	5	6×10 <sup>11</sup>	9×10 <sup>11</sup>	7×10 <sup>-5</sup>	3×10 <sup>7</sup>
– laserkohtio	10 <sup>31</sup>	10 <sup>8</sup>	?	2×10 <sup>17</sup>	?	2×10 <sup>-10</sup>	10 <sup>2</sup>

(ionosfääri, fuusioplasmat). Varausten hyvästä liikkuvuudesta johtuen plasma pyrkii säilyttämään paikallisen neutraalisuuden. Ehto neutraalisuudelle saadaan seuraavasti: Maxwellin ensimmäisen yhtälön ( $E' = nq/\epsilon_0$ ) mukaan varausten erottaminen etäisyydelle  $r$  aiheuttaa potentiaalin  $\phi_r \simeq nq^2r^2/\epsilon_0$ . Terminen energia riittää tähän, jos pätee  $k_B T > \phi_r$  eli  $r < \lambda_D$ . Tämä merkitsee, että poikkeamia neutraalisuudesta voi esiintyä vain Debye-pallon sisällä. Siten hitaissa ilmiöissä plasmaa voidaan pitää neutraalina.

Hyvin nopeissa ilmiöissä varaukset voivat värähdellä toistensa suhteen (plasmavärähtelyt). Varatun hiukkasen (varaus  $q$  ja massa  $m$ ) Newtonin liikeyhtälöstä  $m\ddot{r} = qE$  ja ensimmäisestä Maxwellin yhtälöstä sähkökentälle  $E$  saadaan liikeyhtälö  $\ddot{r} - \omega_p^2 r = 0$ , joka antaa hiukkaselle värähtelevän ratkaisun plasmataajuudella

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{\epsilon_0 m}} \quad (1.2)$$

Plasmavärähtely plasmataajuudella on plasman tärkein ominaismoodi. Plasmoissa voi esiintyä lisäksi lukuisia määriä erilaisia aaltomuotoja erityisesti silloin, kun plasma on ulkoisessa magneettikentässä.

Edellä mainittujen lisäksi usein esiintyviä suureita ovat: hiukkasen gyrotaajuus  $\Omega = qB/m$ , joka tunnetaan myös nimillä Larmor-taajuus tai syklotronitaajuus, gyrosäde (Larmor-säde)  $r_L = v_{th}/\Omega$ , missä  $v_{th} = (k_B T/m)^{1/2}$  on hiukkasten termien nopeus ja  $B$  magneettikenttä (magneettivuon tiheys). Kyseiset suureet voivat olla hyvin erisuuruiset eri hiukkaslajeille. Esimerkiksi vetyplasmassa elektronien ja ionien (protonien) gyrotaajuuksien suhteelle saadaan  $\Omega_e/\Omega_i = m_i/m_e = 1840$ . Plasmaparametrien suuruusluokat erityyppisille plasmalle on esitetty taulukossa 1.1. Plasmafysiikalle on tyypillistä, että täsmälleen samat ilmiöt voidaan havaita, vaikka parametrit muuttuvat kymmeniä kertalukuja.

## 1.2 Plasmafysiikan perusjaottelu

**A. Riippumattomien hiukkasten plasma:** Hiukkasten vuorovaikutus ulkoisten sähkö- ja magneettikenttien kanssa on paljon voimakkaampi kuin hiukkasten keskinäinen vuorovaikutus. Koska hiukkaset ovat toisistaan riippumattomia, riittää koko systeemin kuvaamiseksi, kun ratkaistaan yksittäisen hiukkasen liikeyhtälöt. Kollektiivisia hiukkasilmiöitä plasmamielessä ei tapahdu. Esimerkkinä riippumattomien hiukkasten systeemistä voidaan mainita hiukkaskiihdyttimet, kosminen säteily ja van Allenin vyöhykkeet.

**B. Magnetohydrodynamiiikka:** Magnetohydrodynamiiikka (MHD) on sähköä johtavan nesteen tai kaasun (fluid) hydrodynamiiikkaa. Törmäykset ovat hallitsevia ja MHD-teoria soveltuu ilmiöille, joiden periodi ja aallonpituus ovat suuria törmäysaikaan ja vapaaseen matkaan verrattuna. Ulkoisen kentän synnyttämä virta noudattaa Ohmin lakia, missä resistiivisyys aiheutuu hiukkasten välisistä törmäyksistä. Magnetohydrodynamiiikalla voidaan kuvata matalataajuisia aaltoja (Alfvénin aallot) sekä hitaita MHD-epästabiilisuuksia, jotka ovat erittäin tärkeitä fuusioplasmojen magneettisessa koossapidossa. MHD-epästabiilisuuksien ilmaantuminen johtaa yleensä plasman koossapidon menetykseen.

Magnetohydrodynamiiikalla voidaan tutkia myös johtavien nesteiden (metallisula) virtausta magneettikentässä (maapallon sisus ja maan magnetismi). Siten MHD-teoria soveltuu hyvin erityyppisten ilmiöiden kuvaukseen. Ideaalinen MHD-teoria saadaan olettamalla plasman johtavuus äärettömäksi.

**C. Törmäyksetön plasma:** Plasma on ilmiön kannalta törmäyksetöntä, kun hiukkasten välinen törmäystaajuus  $\nu_c$  on paljon pienempi kuin tarkasteltavan ilmiön (aallon) taajuus ( $\nu_c \ll \omega$ ). Hiukkasten väliset törmäykset jätetään kokonaan huomiotta (Vlasovin yhtälö) tai ne käsitellään seuraavan kertaluvun korjauksena. Törmäysten tarkempi käsittely vaatii täydellisen Fokker-Planck yhtälön käyttöä, johon ei tämän kurssin yhteydessä puututa.

Plasma-aaltojen teoriassa oletetaan pääosin törmäyksetön plasma, sillä magnetohydrodynamiiikalla voidaan kuvata vain hyvin matalataajuisia aaltoja. Taajuuden lähestyessä törmäystaajuutta aallon vaimennus kasvaa voimakkaasti ja sen eksitointi käy yhä vaikeammaksi. Jos aallon vaihenopeus on paljon suurempi kuin hiukkasten terminen nopeus, voidaan plasmaa kuvata fluid-mallilla, joka ei riipu hiukkasten nopeusjakautuman yksityiskohdista. Aalto havaitsee vain plasman makroskooppisia ominaisuuksia, kuten paine ja lämpötila. Mikäli plasman paineen vaikutus on pieni, sanotaan plasman olevan kylmää ja lämpötila voidaan asettaa nollassa. Plasma-aaltojen teoria kylmässä plasmassa muodostaa tärkeän kokonaisuuden ja antaa hyvän pohjan ymmärtää aaltojen käyttäytymistä plasmassa.

Kun aallon vaihenopeus on lähellä hiukkasten termistä nopeutta, hiukkasten nopeusjakautuman yksityiskohdat — mikrokooppiset ominaisuudet — käyvät yhä

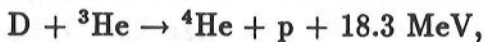
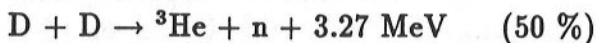
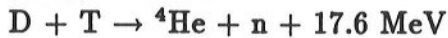
tärkeämmiksi. Plasman kuvaamiseen tarvitaan tällöin täydellisempää kineettistä teoriaa (Vlasovin ja Maxwellin yhtälöt). Kineettinen teoria tuo mukanaan kokonaan uusia ilmiöitä, joita fluid-mallissa ei ole lainkaan. Esimerkkinä kineettisestä ilmiöstä on sähköstaattisten aaltojen Landau-vaimennus puhtaasti törmäyksettömässä plasmassa. Fluid- ja MHD-mallin yhtälöt saadaan kineettisen teorian perusyhtälön (Vlasovin yhtälö) nopeusmomentteina.

Korostettakoon lopuksi, että plasman kylmyys, kuumuus tai törmäyksettömyys eivät ole plasman omia absoluuttisia ominaisuuksia, vaan ne riippuvat tarkasteltavasta ilmiöstä — sen karakteristisista nopeus- ja aikaskaaloista. Siten tietyssä lämpötilassa oleva plasma voi olla kuumaa joillekin ilmiöille ja toisessa tapauksessa saman plasman lämpötilaefektit voidaan jättää kokonaan huomiotta.

### 1.3 Lämpöydinfuusio

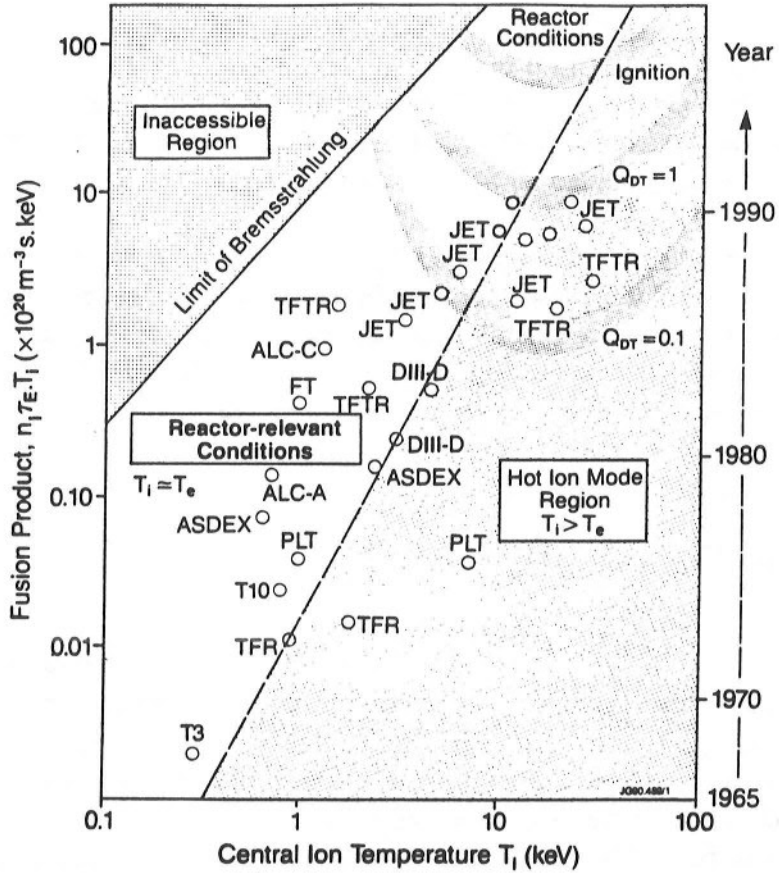
Fissioenergia perustuu raskaiden ytimien (esim.  $^{235}\text{U}$ ) halkaisemiseen ja ytimien sidosenergian vapauttamiseen. Ytimien sidosenergiaa voidaan vapauttaa myös fuusioreaktioissa, joissa kaksi kevyttä ydintä sulautuu yhteen. Auringon ja tähtien energian tuotanto perustuu fuusioon. Fuusiolla on myös tärkeä rooli alkuainesynteesissä, sillä lähes kaikki vetyä raskaammat alkuaineet rautaan saakka ovat syntyneet fuusioiden kautta tähtien sisuksissa. Poikkeuksena on helium, josta suurin osa on syntynyt alkuräjähdyksen yhteydessä.

Energian tuottamisen kannalta tärkeimmät fuusioreaktiot ovat:



missä D ( ${}^2\text{H}$ ) ja T ( ${}^3\text{H}$ ) ovat vedyn raskaat isotoopit deuterium ja tritium, n on neutroni ja p protoni. Fuusioreaktioissa vapautuvat energiamäärät ovat valtavia — esimerkiksi DT-reaktiossa vapautuva 17.6 MeV vastaa polttoaineen energiasältöä 93 000 kWh/g!

Fuusioituvilla ytimillä tulee olla riittävästi energiaa, jotta ne voittaisivat ydinten välisen sähköisen repulsion (Coulombin valli). Ytimien terminen energia riittää Coulombin vallin läpäisemiseen, kun polttoaine kuumennetaan noin  $10^8$  K ( $k_B T \simeq 10$  keV) lämpötilaan. Tällöin polttoaine on täysin ionisoitunutta eli plasmatilassa. Tämä selittää plasmafysiikan tärkeän roolin fuusioenergiatutkimuksessa.



Kuva 1.1: Fuusiotulon  $n_i \tau_E T_i$  ( $m^{-3} s keV$ ) arvoja plasman ionilämpötilan  $T_i$  ( $keV$ ) funktiona eri tokamak-laitteille. Kuvassa on myös vuosiluvut, jotka kertovat tokamakien kehityskulun.

Kuumentamisen lisäksi polttoaineplasma on pidettävä koossa riittävän kauan, jotta fuusioenergiaa ehtii vapautua enemmän kuin kuumentamiseen ja koossapitoon joudutaan käyttämään. Tällöin fuusiovahvistus ylittää ykkösen ( $Q > 1$ ). Fuusioplasman koossapitoehto, joka tunnetaan Lawsonin kriteerinä, on hyvin yksinkertainen. Sen mukaan polttoaineen tiheyden  $n$  ja energian koossapitoajan  $\tau_E$  tulo tulee ylittää eräs lämpötilasta riippuva minimiarvo. Helpoin koossapitoehto saadaan deuterium-tritium-plasmalle, jolle Lawsonin kriteeri ( $Q = 1$ ) voidaan kirjoittaa

$$n \tau_E > 10^{20} m^{-3} s \quad \text{ja} \quad T > 5 \times 10^7 K \quad (k_B T > 5 keV).$$

Magneettisesti koossapidetyn plasman tiheys on tyypillisesti  $n = 10^{20} m^{-3}$ , joten energian koossapitoajan tulee olla vähintään yksi sekunti. Nykyisissä suurissa tokamakeissa saavutetaan helposti yli  $10^8 K$ :n lämpötiloja ja koossapitotulo on hyvin lähellä Lawsonin ehtoa. Kehitys on ollut ripeää, sillä 1980-luvun vaihteessa  $n \tau_E$ -tulon arvo oli tekijän sata pienempi kuin Lawsonin kriteeri.

Relevantilla lämpötila-alueella ( $T \simeq 10$  keV) fuusiolaitteen suorituskyvyn koosapidon osalta ilmaisee vain yksi parametri nk. fuusiotulo  $n\tau_E T$ . Kuvassa 1.1 on esitetty eri tokamakeilla saavutettuja fuusiotulon arvoja plasman lämpötilan funktiona. Kuvasta voidaan todeta, että Euratomin JET (Joint European Torus) tokamakilla on päästy aivan "breakeven"-olosuhteiden ( $Q_{DT} \simeq 1$ ) tuntumaan.

Fuusioenergialla on merkittäviä etuja, jotka tekevät siitä lopullisen ja kestävän ratkaisun keskitettyyn energian tuotantoon.

- ehtymättömät polttoainevarannot (D-pitoisuus vedessä 16 ppm)
- polttoainejäte ei-radioaktiivista (helium)
- fuusiopalo ei voi riistäytyä hallinnasta
- ei suurkatastrofin vaaraa
- ei tarvita ydinasemateriaaleja
- kehityspotentiaali

Fuusioenergian haittoina voidaan pitää monimutkaista ja vaikeaa tekniikkaa, mikä tekee fuusioenergian nykyistä ydinvoimaa kalliimmaksi. Radioaktiivisuudesta ei fuusiosakaan päästä täysin eroon, sillä DT- ja DD-reaktioissa syntyvät neutronit aktivoivat reaktorin sisärakenteita. Neutroniaktiivointiin voidaan kuitenkin vaikuttaa materiaalivalinnoilla ja reaktorin suunnittelulla, mikä on huomattava etu fissioenergiaan verrattuna, jossa suurin aktiivisuusinventaarior löytyy käytetystä polttoaineesta.

Ensimmäisen polven fuusioreaktorit käyttävät polttoaineena deuteriumin ja tritiumin seosta. Tritium on radioaktiivista (beeta-aktiivinen,  $T_{1/2} = 12.3$  a) eikä sitä esiinny luonnossa lukuunottamatta ilmakehän ylimpiä kerroksia, jossa sitä on hyvin pieniä määriä kosmisen säteilyn tuottamana. Radiomyrkkynä tritium on lievä ja vaarallinen vain sisäisenä annoksena. Se pyrkii laimenemaan nopeasti ympäristöön jouduttuaan.

Tritiumia voidaan hyötää litiumista fusioneutronien avulla. Hyötö perustuu siihen, että yksi fuusiossa syntynyt neutroni voi tuottaa enemmän kuin yhden uuden tritiumytimen ts. tritiumia syntyy litiumista enemmän kuin DT-fuusiossa palaa. Tritiumin hyötö ja turvallinen käsittely vaikeuttavat ensimmäisen polven DT-reaktoreiden suunnittelua. Ongelma helpottuu olennaisesti seuraavan polven DD- ja  $D^3\text{He}$ -reaktoreissa.

On olemassa myös fuusioreaktioita, joiden käyttöön ei liity lainkaan radioaktiivisuutta. Esimerkkinä voidaan mainita vedyn ja boorin välinen reaktio, jossa syntyy vain heliumia:  $p + {}^{11}\text{B} \rightarrow {}^3\text{He} + 8.7 \text{ MeV}$ . Kyseinen reaktio tarjoaisi täysin puhtaan ja ehtymättömän energialähteen.

# Luku 2

## Varatun hiukkasen liike

Tässä luvussa esitettävät tarkastelut eivät ole varsinaisesti plasmafysiikkaa, koska yksinomaan ulkoiset sähkö- ja magneettikentät määräävät varatun hiukkasen liikkeen. Törmäyksettömässä plasmassa tämä vastaa tilannetta, jossa muiden hiukkasten aiheuttamat mikrokooppiset tai tasoitetut kentät jätetään huomiotta. Plasman käyttäytymisen ymmärtäminen kuitenkin perustuu monilta osin yksittäisen varatun partikkelin liikkeeseen. Esimerkiksi monet fuusioplasmojen magneettisen koossapidon perusideat on saatu juuri yhden varatun partikkelin käyttäytymisen pohjalta.

### 2.1 Liikkeyhtälöt

Varatun hiukkasen (varaus  $q$  ja massa  $m$ ) liike sähkömagneettisessa kentässä  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  voidaan ratkaista Newtonin liikkeyhtälöstä, jossa voimaterminä on Lorentzin voima

$$m \dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

missä kentät voivat olla sekä ajan että paikan funktioita. Yhtälö (2.1) pystytään ratkaisemaan analyttisesti vain hyvin yksinkertaisissa tapauksissa. Yleisemmässä tapauksissa joudutaan turvautumaan numeerisiin menetelmiin.

Yhtälöstä (2.1) seuraa välittömästi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

mikä paljastaa, että partikkelin liike-energiaa ei voida muuttaa magneettikentällä ts. Lorentzin voiman magneettinen komponentti ei tee työtä. Yhtälöstä (2.2)

seuraa myös:  $v = \text{vakio}$ , jos  $\mathbf{E} = 0$ . Tällöin yhtälön (2.1) mukaan kiihtyvyys on kohtisuoraan nopeutta vastaan  $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$  (vrt. ympyräliike).

Relativistisen hiukkasen liikeyhtälö on muotoa

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.3)$$

missä  $m_0$  on partikkelin lepomassa ja  $c$  valon nopeus.

## 2.2 Liike yksisuuntaisessa magneettikentässä

**A. Yksisuuntainen vakiomagneettikenttä:** Yksinkertaisin tapaus on  $\mathbf{E} = 0$  ja  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ , missä  $B$  on vakio ja  $\mathbf{z}$  on  $z$ -akselin suuntainen yksikkövektori. Koska sähkökenttä häviää, yhtälön (2.2) mukaan nopeus on vakio:  $v = (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)^{1/2} = \text{vakio}$ , missä  $v_{\parallel} = v_z$  on magneettikentän suuntainen ja  $v_{\perp} = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$  magneettikenttää vastaan kohtisuora nopeuskomponentti. Liikeyhtälö (2.1) on komponenttimuodossa

$$\dot{v}_x = \Omega v_y \quad (2.4)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x \quad (2.5)$$

$$\dot{v}_z = 0, \quad (2.6)$$

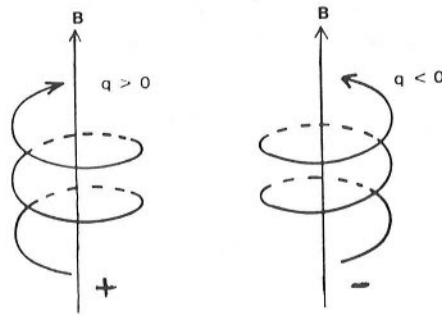
missä  $\Omega = qB/m$ , jota kutsutaan partikkelin gyrotaajuudeksi, Larmorin taajuudeksi tai syklotronitaajuudeksi. Yhtälöstä (2.6) nähdään, että kentän suuntainen nopeus  $v_z = v_{\parallel}$  on vakio. Yllä todettiin nopeuden  $v$  olevan myös vakio, joten  $v_{\perp} = \text{vakio}$ . Derivoimalla yhtälö (2.4) ajan suhteen ja sijoittamalla siihen  $\dot{v}_y$  yhtälöstä (2.5) saadaan yksinkertainen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö  $v_x$ :lle ja vastaavasti  $v_y$ :lle

$$\ddot{v}_x = -\Omega^2 v_x; \quad \ddot{v}_y = -\Omega^2 v_y, \quad (2.7)$$

joiden yleinen ratkaisu on muotoa

$$v_x = v_{\perp} \cos(\Omega t + \theta) \quad (2.8)$$





Kuva 2.1: Varatun hiukkasen liikerata vakiomagneettikentässä.

$$v_y = -v_{\perp} \sin(\Omega t + \theta) \quad (2.9)$$

$$v_z = v_{\parallel}, \quad (2.10)$$

missä  $\theta$  on integroimisvakio. Integroimalla vielä kerran saadaan

$$x - x_0 = (v_{\perp}/\Omega) \sin(\Omega t + \theta) \quad (2.11)$$

$$y - y_0 = (v_{\perp}/\Omega) \cos(\Omega t + \theta) \quad (2.12)$$

$$z - z_0 = v_{\parallel} t \quad (2.13)$$

Ratkaisu esittää magneettikenttää vastaan kohtisuorassa  $xy$ -tasossa tasaista ympyräliikettä nopeudella  $v_{\perp}$  ja magneettikentän suuntaan tasaista liikettä nopeudella  $v_{\parallel}$ . Kokonaisratkaisu on siten kuvan 2.1 mukainen ruuviviiva (heliksi).

Ympyräliikkeen kulmataajuus on juuri syklotronitaajuus  $\Omega$  ja rataliikkeen sädetä  $r_L = v_{\perp}/|\Omega|$  kutsutaan Larmorin säteeksi. Kiertosuunta riippuu varauksen  $q$  merkistä ja on vastakkainen elektroneille (vastapäivään) ja ioneille (myötäpäivään). Ympyrän keskipistettä  $(x_0, y_0, v_{\parallel} t + z_0)$  kutsutaan johtokeskukseksi (guiding centre). Usein riittää ratkaista vain johtokeskuksen liike, jolloin itse hiukkanen löytyy Larmorin säteen päästä.

Edellä esitetty yksinkertainen esimerkki osoittaa plasman magneettisen koossapidon perusajatuksen: varattujen hiukkasten liike on rajattu kahdessa dimensiossa ( $xy$ -taso) ja jäljelle jää vain yksi dimensio — kentän suunta, jossa partikkelin liike on vapaata. Kentän suuntainen liike voidaan rajata esimerkiksi suljetuilla voimaviivoilla, kuten tehdään tokamak-tyyppisissä plasman koossapitolaitteissa. Asiaa mutkistaa kentän epähomogeenisuuksista ja kaareutumisesta johtuva hiukkasten ajautuminen (drift) kentän poikkisuunnassa, jota käsitellään tuonnempana. Lisäksi koossapitoon vaikuttavat plasmaefektit, kuten MHD-epästabiiliisuudet, jotka viime kädessä määräävät koossapidon tehokkuuden.

**B. Yksisuuntainen paikasta riippuva kenttä:** Tarkastellaan seuraavaksi yksisuuntaista paikasta riippuvaa staattista magneettikenttää, joka on muotoa  $\mathbf{B} = B(x)\mathbf{z}$ . Oletetaan edelleen  $\mathbf{E} = 0$ , joten  $v = \text{vakio}$ . Koska  $\mathbf{B}$  on puhtaasti  $z$ -suuntaan, saadaan lisäksi  $v_{\parallel} = \text{vakio}$ , mistä seuraa, että  $v_{\perp} = \text{vakio}$ . Nyt liikeyhtälöstä (2.1) saadaan

$$\dot{v}_x = \Omega(x)v_y \quad (2.14)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega(x)v_x, \quad (2.15)$$

jotka voidaan esittää muodossa

$$\frac{dv_x}{dy} = \Omega(x) \quad (2.16)$$

$$\frac{dv_y}{dx} = -\Omega(x). \quad (2.17)$$

Koska  $\Omega(x)$  on tunnettu  $x$ :n funktio, niin myös  $v_y = -\int \Omega(x)dx$  on tunnettu  $x$ :n funktio. Siten partikkelin radalle saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y(x)}{[v_{\perp}^2 - v_y(x)^2]^{1/2}}, \quad (2.18)$$

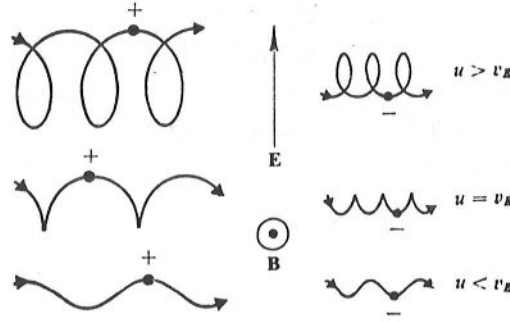
joka on suoraan integroitavissa, koska yhtälön oikea puoli on tunnettu  $x$ :n funktio.

## 2.3 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -ajautuminen

Oletetaan  $z$ -suuntainen vakiomagneettikenttä  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ , mutta lisätään  $y$ -suuntainen sähkökenttä  $\mathbf{E} = E\mathbf{y}$ . Sähkökenttä oletetaan vakioksi ja se on valittu kohtisuoraan kenttään  $\mathbf{B}$  nähden, koska magneettikentän suuntainen sähkökenttä johtaa yksinkertaisesti kiihtyvään liikkeeseen  $z$ -suuntaan. Nyt liikeyhtälön (2.1) komponentit ovat muotoa

$$\dot{v}_x = \Omega v_y \quad (2.19)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x + \frac{qE}{m}. \quad (2.20)$$



Kuva 2.2: Varatun partikkelin ajautuminen sähkö- ja magneettikentän alaisena.

Sijoittamalla yrite  $v_x = V_x + qE/m\Omega$  ylläolevat yhtälöt redusoituvat muotoon

$$\dot{V}_x = \Omega v_y \quad (2.21)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega V_x. \quad (2.22)$$

Nämä ovat täsmälleen samat kuin tapauksessa  $E = 0$ , joille saatiin edellisessä kohdassa kosini- ja siniratkaisut. Siten  $y$ -suuntainen sähkökenttä aiheuttaa  $x$ -suuntaisen ajautumisen nopeudella  $qE/m\Omega$  (kts. kuva 2.2). Ajautuminen on kohtisuoraan sekä sähkö- että magneettikenttää vastaan. Tästä syystä sitä kutsutaan  $E \times B$ -ajautumiseksi ( $E \times B$ -drift), jolle pätee yleisessä tapauksessa

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.23)$$

Saatu ajautuminen riippuu puhtaasti kentistä — ei hiukkasen ominaisuuksista. Siksi elektronit ja ionit ajautuvat samalla nopeudella samaan suuntaan. Fysikaalisesti ajautuminen voidaan ymmärtää siten, että positiivisesti varatun hiukkasen kiertyessä sähkökentän suuntaan tai sitä vastaan se kiihtyy tai hidastuu, mikä vastaavasti muuttaa gyrosädettä epäsymmetrisesti (kuva 2.2. Negatiivisesti varatulla hiukkasella sekä sähkökentän vaikutus että gyroliikkeen kiertosuunta ovat vastakkaisia, joten ajautumissuunta säilyy samana varauksesta riippumatta.

Sähkökenttä kiihdyttää varattuja partikkeleita, joten tilanne on analoginen, kun hiukkaseen vaikuttaa vastaavan suuruinen voima  $\mathbf{F}$ . Tällöin ajautumisnopeudeksi tulee

$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{q B^2}. \quad (2.24)$$

Nyt ajautumisen suunta riippuu varauksen merkistä päinvastoin kuin sähkökentän tapauksessa. Ajautumisnopeus on partikkelin massasta riippumaton.

Jos sähkökentässä on hidas aikariippuvuus ( $\dot{E}/E\Omega \ll 1$ ) saadaan  $E \times B$ -ajautumisen lisäksi sähkökentän suuntainen nk. polarisaatio-ajautuminen (polarization-drift), joka on muotoa

$$\mathbf{v}_p = \frac{q}{m\Omega^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt}, \quad (2.25)$$

joka riippuu kenttien lisäksi hiukkasen varauksesta  $q$  ja massasta  $m$ . Koska ionit ja elektronit ajautuvat eri suuntiin, plasmaan syntyy virta, joka kestää niin kauan kuin sähkökenttä muuttuu ajassa.

## 2.4 Epähomogeeninen magneettikenttä

Yleisessä tapauksessa varatun hiukkasen liikeyhtälöä (2.1) ei voida ratkaista analyttisesti. Approksimatiivisia ratkaisuja voidaan kuitenkin löytää tapauksissa, joissa kenttä muuttuu vähän yhden Larmor-periodin aikana, ts.

$$\frac{1}{\Omega B} \frac{dB}{dt} \ll 1, \quad \frac{r_L |\nabla B|}{B} \ll 1. \quad (2.26)$$

Usein riittää tutkia vain johtokeskuksen liikettä, joka kertoo tärkeimmät ajautumisnopeudet ja suunnat. Tähän päästään ottamalla aikakeskiarvo yli Larmor-periodin, joka edustaa nopeaa aikaskaalaa.

**A. Heikosti epähomogeeninen magneettikenttä:** Tarkastellaan ensiksi yksisuuntaista heikosti epähomogeenista ja staattista magneettikenttää, joka on muotoa  $\mathbf{B} = B(y)\mathbf{z}$ . Oletetaan  $\Omega' = d\Omega/dy$  pieneksi ja kehitetään  $\Omega(y)$  johtokeskuksen ympärillä

$$\Omega(y) \simeq \Omega(y_0) + (y - y_0)\Omega'(y_0) + \dots \quad (2.27)$$

Derivoimalla liikeyhtälö (2.1) komponenteittain ajan suhteen ja sijoittamalla  $\dot{v}_x$  ja  $\dot{v}_y$  päästään yhtälöihin

$$\dot{v}_x = -\Omega(y)^2 v_x + \Omega'(y) v_y^2 \quad (2.28)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega(y)^2 v_y - \Omega'(y) v_x v_y. \quad (2.29)$$

Sijoitetaan ylläoleviin yhtälöihin edellä saatu Taylor-kehitemä (2.27) ja otetaan huomioon vain ensimmäisen kertaluvun termit, jolloin saadaan

$$\ddot{v}_x + \Omega_0^2 v_x = -2\Omega\Omega'_0(y - y_0)v_x + \Omega'_0 v_y^2 \quad (2.30)$$

$$\ddot{v}_y + \Omega_0^2 v_y = -2\Omega\Omega'_0(y - y_0)v_y - \Omega'_0 v_x v_y, \quad (2.31)$$

missä on merkitty:  $\Omega_0 = \Omega(y_0)$  ja  $\Omega'_0 = \Omega'(y_0)$ . Oikean puolen termit ovat pieniä (ensimmäistä kertalukua), joten niihin voidaan sijoittaa  $y$ :lle,  $v_x$ :lle ja  $v_y$ :lle nolllannen kertaluvun ratkaisut, jotka ovat samat kuin kohdassa 2.2. Muutamien sievennysten jälkeen saadaan

$$\ddot{v}_x + \Omega_0^2 v_x = -\frac{v_\perp^2 \Omega'_0}{2} [1 + 3 \cos 2(\Omega_0 t + \theta)] \quad (2.32)$$

$$\ddot{v}_y + \Omega_0^2 v_y = \frac{3v_\perp^2 \Omega'_0}{2} \sin 2(\Omega_0 t + \theta). \quad (2.33)$$

Yhtälöiden (2.32) ja (2.33) ratkaisut ovat

$$v_x = v_\perp \cos(\Omega_0 t + \theta) + \frac{v_\perp^2 \Omega'_0}{2\Omega_0^2} \cos 2(\Omega_0 t + \theta) - \frac{v_\perp^2 \Omega'_0}{2\Omega_0^2} \quad (2.34)$$

$$v_y = -v_\perp \sin(\Omega_0 t + \theta) - \frac{v_\perp^2 \Omega'_0}{2\Omega_0^2} \sin 2(\Omega_0 t + \theta). \quad (2.35)$$

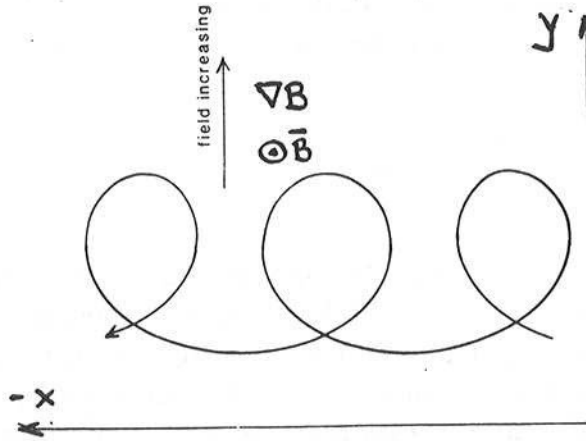
Integroidaan Larmor-periodin  $T = 2\pi/\Omega_0$  yli, jolloin saadaan hiukkasen johtokeskuksen nopeuden aikakeskiarvoksi

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{v_\perp^2 \Omega'_0}{2\Omega_0^2} \mathbf{x} + v_{\parallel} \mathbf{z}, \quad (2.36)$$

koska sin- ja cos-termit häviävät keskiarvon otossa. Ratkaisusta (2.36) voidaan havaita, että johtokeskus joutuu  $x$ -suuntaiseen ajautumisliikkeeseen, jota kutsutaan gradienttiajautumiseksi (gradient drift). Yleisessä muodossa se voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{v}_G = \frac{W_\perp}{qB^3} \mathbf{B} \times \nabla B, \quad (2.37)$$

missä  $W_\perp = mv_\perp^2/2$  on kohtisuora liike-energia. Gradienttiajautuminen on seurausta magneettikentän muuttumisesta Larmor-ympyrän eri kohdissa. Suuremman kentän puolella gyrosäde on pienempi kuin pienen kentän puolella, mikä johtaa hiukkasen ajautumiseen (kts. kuva 2.3).



Kuva 2.3: Varatun partikkelin gradienttiajautuminen.

**B. Lievästi kaareutuva magneettikenttä:** Tarkastellaan seuraavaksi heikosti kaareutuvaa staattista magneettikenttää, jolle oletetaan muoto  $\mathbf{B} = B_y(z)\mathbf{y} + B_z\mathbf{z}$ . Heikolla kaarevuudella tarkoitetaan, että  $B_y$  ja  $dB_y/dz$  ovat pieniä. Ratkaistavan liikeyhtälön komponentit ovat nyt muotoa

$$\dot{v}_x = \Omega v_y - \Omega_y v_z \quad (2.38)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x \quad (2.39)$$

$$\dot{v}_z = \Omega_y v_x, \quad (2.40)$$

missä  $\Omega_y = qB_y/m$ . Derivoimalla ajan suhteen yllä olevat yhtälöt voidaan kirjoittaa

$$\ddot{v}_x + \Omega^2 v_x = -\dot{v}_z \Omega_y - \Omega'_y v_z^2 \quad (2.41)$$

$$\ddot{v}_y + \Omega^2 v_y = \Omega \Omega_y v_z \quad (2.42)$$

missä  $\Omega'_y = d\Omega_y/dz$ . Yhtälön (2.41) oikean puolen ensimmäinen termi  $\dot{v}_z \Omega_y = \Omega_y^2 v_x$  on seuraavaa kertalukua ja voidaan unohtaa. Tämän jälkeen yhtälöiden ratkaisuksi tulee

$$v_x = v_\perp \cos(\Omega t + \theta) - v_\parallel^2 \Omega'_y / \Omega^2 \quad (2.43)$$

$$v_y = -v_\perp \sin(\Omega t + \theta) + v_\parallel \Omega_y / \Omega, \quad (2.44)$$

missä  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  ja  $\theta$  ovat vakioita. Ottamalla aikakeskiarvo Larmor-periodin yli saadaan partikkelin kulkeutumismuutoksiksi

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{v_{\parallel}^2 \Omega'_y}{\Omega^2} \mathbf{x} + \frac{v_{\parallel} \Omega'_y}{\Omega} \mathbf{y} + v_{\parallel} \mathbf{z}. \quad (2.45)$$

Magneettikentän kaareutumisesta ( $\Omega'_y$ ) johtuen saatiin  $x$ -suuntainen ajautuminen ( $v_C = -v_{\parallel}^2 \Omega'_y / \Omega^2$ ), jota kutsutaan kaarevuusajautumiseksi (curvature drift). Lisäksi yhtälöstä (2.45) nähdään, että  $y$ -suuntainen kulkeutuminen  $v_{\parallel} \Omega'_y / \Omega$  pitää johtokeskuksen liikkeen magneettikentän  $\mathbf{B}$  suuntaisena  $yz$ -tason suunnassa ( $v_y/v_z = B_y/B$ ). Yleisessä muodossa kaarevuusajautuminen voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{v}_C = \frac{2W_{\parallel}}{qB^4} [\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}], \quad (2.46)$$

missä  $W_{\parallel} = mv_{\parallel}^2/2$  on kentän suuntainen liike-energia.

On huomattava, että magneettikentän eri epähomogeenisuustyypit eivät ole riippumattomia toisistaan. Esimerkiksi alueessa, jossa ei ole virtaa, pätee Ampèren lain mukaan:  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , joten

$$0 = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla B^2 - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

mistä seuraa:  $\nabla B = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / B$ . Siten gradientti- ja kaarevuusajautuminen esiintyvät yhdessä ja kokonaisajautuminen on muotoa

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_C = \frac{W_{\perp} + 2W_{\parallel}}{qB^3} \mathbf{B} \times \nabla B. \quad (2.47)$$

Kokonaisajautumisen suunta riippuu varauksen merkistä. Esimerkiksi maan magneettikentässä, jossa  $\mathbf{B}$  osoittaa pohjoiseen ja kentän gradientti  $\nabla B$  alaspäin, protonit kulkeutuvat länteen ja elektronit itään kentän suuntaisen liikkeensä lisäksi.

## 2.5 Adiabaattiset invariantit

**A. Ajasta riippuva magneettikenttä:** Suureita, jotka pysyvät likipitäen vakioina magneettikentän muuttuessa ajallisesti tai paikallisesti hitaasti, kutsutaan adiabaattisiksi invariantiksi. Tarkastellaan ensimmäiseksi hiukkasen magneettista momenttia ajasta riippuvassa magneettikentässä  $\mathbf{B} = B(t)\mathbf{z}$ . Magneettikentän oletetaan muuttuvan hitaasti Larmor-periodiin verrattuna ts.  $dB/dt \ll \Omega B$ .

Maxwellin kolmannen yhtälön<sup>1</sup> mukaan ajasta riippuva magneettikenttä indusoi sitä vastaan kohtisuoran sähkökentän

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.48)$$

Koska  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , niin liikeyhtälöstä (2.1) seuraa  $v_{\parallel} = \text{vakio}$ , joten pätee  $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_{\perp}$ . Tästä seuraa liike-energian muutosnopeudeksi indusoidussa sähkökentässä yhtälön (2.2) mukaan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp}. \quad (2.49)$$

Nyt voidaan laskea Larmor-kierroksen aikana  $2\pi/\Omega$  tapahtunut liike-energian muutos

$$\delta W_{\perp} = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.50)$$

missä  $d\mathbf{s} = \mathbf{v}_{\perp} dt$  ja  $d\mathbf{a}$  kierron rajaaman pinnan elementti. Käytetään Maxwellin yhtälöä (2.48), jolloin

$$\delta W_{\perp} = -q \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \simeq |q| \dot{B} \pi r_L^2 = W_{\perp} \frac{2\pi}{|\Omega|} \frac{\dot{B}}{B}. \quad (2.51)$$

Tästä seuraa

$$\frac{\delta W_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{\delta B}{B} \implies \delta \left( \frac{W_{\perp}}{B} \right) = 0, \quad (2.52)$$

missä  $\delta B$  on magneettikentän muutos Larmor-periodin aikana. Tulokseksi saatiin, että suure  $\mu = W_{\perp}/B$  on likipitään liikevakio ja sitä kutsutaan ensimmäiseksi adiabaattiseksi invariantiksi. Myös magneettivuo Larmor-ympyrän läpi pysyy likipitään vakiona, mikä voidaan todeta seuraavasta

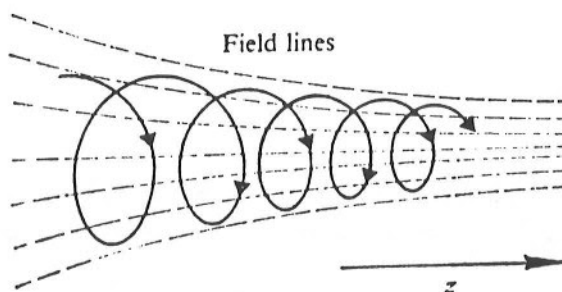
$$\Phi = \pi r_L^2 B = (2\pi m/q^2) \mu \simeq \text{vakio}.$$

Edellä saatu suure  $\mu$  on helppo osoittaa hiukkasen rataliikkeeseen liittyväksi magneettiseksi momentiksi, mikä nähdään heti magneettisen momentin määritelmästä

$$J \pi r_L^2 = q \pi r_L^2 / (2\pi/\Omega) = q v_{\perp}^2 / 2\Omega = W_{\perp} / B = \mu.$$

<sup>1</sup>Maxwellin yhtälöt on esitetty koottuna seuraavan luvun kohdassa 3.1





Kuva 2.4: Aksiaalisesti symmetrinen magneettikenttä, jonka vuontiheys kasvaa kentän suuntaan.

**B. Paikasta riippuva magneettikenttä:** Tarkastellaan seuraavaksi  $\mu$ :n invarianssia paikallisesti epähomogeenisessa magneettikentässä. Kohdassa 2.4 tarkasteltiin kentän epähomogeenisuustapauksia, joissa  $W_{\perp}$  pysyi vakiona. Tällöin hiukkasten ajautuminen tapahtui kohtisuoraan  $\nabla B$ :tä vastaan, joten ajautumisliikkeen suunnassa magneettikenttä pysyi muuttumattomana ja siten myös suure  $\mu = W_{\perp}/B$  oli vakio. Valitaan kuvan 2.4 mukainen aksiaalisesti symmetrinen magneettikenttä, joka muuttuu hitaasti kentän suuntaan  $B_z = B_z(z)$ . Magneettikentän lähteettömyydestä ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) seuraa, että kentällä täytyy olla myös nollasta poikkeava radiaalikomponentti ( $B_r \neq 0$ ). Sylinterikoordinaatistossa lausuttuna

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (2.53)$$

mistä radiaalikomponentti voidaan ratkaista

$$B_r = -\frac{1}{r} \int r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr. \quad (2.54)$$

Koska kenttä on likipitään vakio Larmor-radon sisällä ja lisäksi radiaalikomponentti on pieni ( $B_r \ll B_z$ ), yllä olevasta yhtälöstä saadaan

$$B_r \simeq -\frac{r_L}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq -\frac{r_L}{2} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (2.55)$$

Kirjoittamalla liikeyhtälön  $z$ -komponentille

$$m \dot{v}_{\parallel} = |q| v_{\perp} B_r \simeq -\frac{1}{2} |q| r_L v_{\perp} (\partial B / \partial z) = -\mu (\partial B / \partial z),$$

ja kertomalla tämä puolittain nopeudella  $v_{\parallel} \simeq dz/dt$  päästään yhtälöön

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}. \quad (2.56)$$

Käyttämällä tulon derivoimissääntöä ja yhtälöä (2.56) voidaan kirjoittaa

$$B \frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}(\mu B) - \mu \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(W_{\perp} + W_{\parallel}) = \frac{dW}{dt}. \quad (2.57)$$

Koska sähkökenttää ei ole ( $E = 0$ ), säilyy liike-energia vakiona ( $dW/dt = 0$ ), joten myös tässä tapauksessa magneettinen momentti pysyy likipitään vakiona

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{W_{\perp}}{B}\right) = 0 \quad (2.58)$$

eli suureen  $\mu = W_{\perp}/B$  adiabaattinen invariantti pätee myös paikallisesti epähomogeenisessa magneettikentässä.

Eräs ensimmäisistä plasman magneettisen koossapidon periaatteista — magneettinen peili (magnetic mirror) — perustuu juuri  $\mu$ :n invarianttiin, jolla voidaan rajoittaa varattujen hiukkasten liike myös magneettikentän suunnassa. Koska  $\mu = W_{\perp}/B$  pysyy vakiona hiukkasen kulkiessa kohti suurempaa vuontiheyttä, kohtisuoran liike-energian  $W_{\perp}$  täytyy kasvaa mukana. Toisaalta  $W = W_{\perp} + W_{\parallel}$  on vakio, joten yhdensuuntaisen liike-energian  $W_{\parallel}$  täytyy vastaavasti pienentyä. Kun magneettikenttä on kasvanut niin suureksi, että  $W_{\perp} = W$  ja  $W_{\parallel} = 0$ , hiukkanen ei pysty enää etenemään vaan heijastuu. Siten kuroutunut magneettikenttä toimii varatuille partikkeleille magneettisena peilinä. Kuromalla kenttä kahdesta kohtaa voidaan varattuja partikkeleita vangita peilipisteiden väliin, missä ne kulkevat edestakaisin. Magneettista peiliä käsitellään tarkemmin fuusion ja plasman koossapitomenetelmien yhteydessä.

Adiabaattisia invariantteja on muitakin. Tässä yhteydessä mainitaan vain toinen eli pitkittäinen adiabaattinen invariantti, jonka mukaan suure  $\Psi$

$$\Psi = \oint v_{\parallel} ds \quad (2.59)$$

pysyy likipitään vakiona ts.  $\delta\Psi = 0$  (osoita). Esimerkkinä pitkittäisestä adiabaattisesta invariantista voidaan ottaa peilipisteiden välissä kulkeva hiukkanen, jonka rata muodostaa suljetun käyrän  $s$ . Jos peilipisteitä siirretään hitaasti (verratuna partikkelin transit-aikaan peilipisteiden välillä) lähemmäksi toisiaan, radan  $s$  pituus pienenee, joten kentän suuntaisen nopeuden  $v_{\parallel}$  täytyy kasvaa.

## 2.6 Tasoallon sähkömagneettinen kenttä

Tarkastellaan varatun partikkelin liikettä monokromaattisen tasoallon kentässä. Nyt systeemin perustajuutena on aaltoon liittyvien kenttien taajuus, joka vaikuttaa myös partikkeliin. Lähtökohdaksi otetaan relativistinen liikeyhtälö (2.3), joka kirjoitetaan muodossa

$$\frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}) = \frac{q}{m_0}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.60)$$

missä  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  on Lorentzin tekijä. Ottamalla puolittain nopeuden pistetulo saadaan (osoita)

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (2.61)$$

Olkoon tasoallon sähkökenttä muotoa  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Tällöin Maxwellin kolmannelta yhtälöstä (2.48) seuraa aallon magneettikentälle  $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega$ . Tyhjässä etenevälle sähkömagneettiselle aallolle pätee  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  ja  $\omega = kc$ . Sijoitetaan juuri saatu  $\mathbf{B}$ :n lauseke liikeyhtälöön (2.60) ja puretaan ristitulot, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$\frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}) = \frac{q\mathbf{E}}{m_0} \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega}\right) + \frac{q}{m_0\omega}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} \quad (2.62)$$

Kerrotaan (pistetulo) yhtälö (2.62) puolittain suurella  $(m_0\omega/k^2)\mathbf{k}$ , jolloin oikean puolen ensimmäinen termi häviää ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ ) ja toinen termi on täsmälleen sama kuin yhtälössä (2.61). Vähentämällä nyt yhtälöt puolittain nähdään välittömästi

$$\lambda \equiv \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega}\right) = \text{vakio}. \quad (2.63)$$

Otetaan käyttöön uusi muuttuja  $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , jolloin nopeus  $\mathbf{v}$  voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'\dot{\phi} = \mathbf{r}'(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{r}'\omega \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega}\right), \quad (2.64)$$

missä  $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/d\phi$ . Nyt saadaan  $\gamma\mathbf{v} = \lambda\omega\mathbf{r}'$ , joten liikeyhtälön (2.62) vasen puoli voidaan lausua

$$\frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}) = \lambda\omega^2\mathbf{r}'' \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega}\right), \quad (2.65)$$

missä on käytetty relaatiota  $dr'/dt = r''d\phi/dt$ . Liikkeyhtälön (2.62) oikean puolen viimeiseen termiin sijoitetaan edellä saatu  $v$ :n lauseke, jolloin se tulee muotoon

$$\frac{q}{m_0\omega}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} = \frac{q}{m_0}\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega}\right)(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E})\mathbf{k}. \quad (2.66)$$

Nyt voidaan termit (2.65) ja (2.66) sijoittaa liikkeyhtälöön (2.62), jolloin yhteinen termi  $[1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})/\omega]$  supistuu ja saadaan  $r$ :lle uusi yhtälö muuttujana  $\phi$

$$\mathbf{r}'' = \frac{q}{m_0\lambda\omega^2} [\mathbf{E} + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E})\mathbf{k}]. \quad (2.67)$$

Tarkastellaan yksinkertaista esimerkkitapausta, jossa sähkömagneettinen aalto etenee  $z$ -suuntaan:  $\mathbf{k} \parallel z$ ,  $\mathbf{E} = E\mathbf{x} \cos \phi$  ja  $\mathbf{B} = (kE/\omega)\mathbf{y} \cos \phi$ , missä  $\phi = \omega t - kz$ . Sijoitetaan nämä liikkeyhtälöön (2.67), jolloin saadaan komponenttimuodossa

$$x'' = \frac{qE \cos \phi}{m_0\lambda\omega^2}, \quad x' = \frac{qE \sin \phi}{m_0\omega^2}, \quad x = -\frac{qE \cos \phi}{m_0\omega^2}, \quad (2.68)$$

$$z'' = \frac{qEx' \cos \phi}{m_0c\lambda\omega}, \quad z' = \frac{q^2E^2(1 - \cos 2\phi)}{4m_0^2\omega^3c}, \quad z = \frac{q^2E^2(\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi)}{4m_0^2\omega^3c}. \quad (2.69)$$

Integroimisvakioiden määrittämiseksi on oletettu hiukkaselle levosta lähtevä liike ja vakiolle  $\lambda = 1$ . Integrointi  $\phi$ :n suhteen:  $\phi: 0 \rightarrow \phi$ .

Tasoaallon sähkökenttä  $\mathbf{E}$  aiheuttaa luonnollisesti  $x$ -suuntaisen värähtelyliikkeen. Myös  $z$ -suunnassa on värähtelevä komponentti, joka on seurausta  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -liikkeestä. Lisäksi  $z$ -suuntaan esiintyy ajautumisnopeus, joka ei häviä aikakeskiarvon otossa. Yleisessä muodossa tämä monokromaattisen tasoaallon etenemissuuntaan tapahtuva varatun partikkelin ajautumisnopeus on

$$\mathbf{v}_{EM} = \frac{q^2}{2m_0^2\omega^2} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle. \quad (2.70)$$

Edellä saatua aallon etenemissuuntaista ajautumista ei pidä sekoittaa säteilypaineseen, joka on seurausta säteilyn absorptiosta tai heijastumisesta.

## 2.7 Ponderomotiivinen voima

Edellä saatiin relativistisessa tapauksessa varatun hiukkasen liike sähkömagneettisen aallon kentässä, jossa aallon amplitudi oletettiin vakioksi. Jos aallon ampli-

tudille oletetaan paikkariippuvuus, saadaan toisessa kertaluvussa hiukkasiin kohdistuva voima, jota kutsutaan ponderomottiiviseksi voimaksi. Sen vaikutusta voidaan verrata sähkömagneettisen säteilyn aiheuttamaan paineeseen. Säteilypaine on pienillä intensiteetillä heikko, mutta voi nousta intensiivisissä lasersuihkuissa hyvin merkittäväksi. Esimerkiksi laserfuusiossa valon intensiteetti on tyypillisesti  $10^{18} - 10^{19} \text{ W/m}^2$ . Tätä vastaava säteilypaine on luokkaa  $10^{10} \text{ N/m}^2$ . Ponderomottiivisen voima on esimerkki epälineaarista efektistä, jonka vaikutus on tärkeä vasta voimakkaiden kenttien tapauksessa.

Kirjoitetaan varatun hiukkasen liikeyhtälö voimakkaassa sähkömagneettisessa kentässä (DC-kentille oletetaan  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$ )

$$m\dot{\mathbf{v}} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.71)$$

missä viimeinen  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ -termi on epälineaarinen. Valitaan sähkökenttä reaalisiksi:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cos \omega t$ . Yleensä sovellettavaa kompleksista muotoa  $\exp(i\omega t)$  ei voida tässä yhteydessä käyttää, koska epälineaarinen tulomuotoinen termi toisi epäfysikaalisia reaaliosia imaginaariosien tulotermeistä johtuen (kts. kohta 4.1).

**1. kertaluku:** Unohdetaan epälineaarinen  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ -termi, joka on  $v/c$ -kertaa pienempi kuin  $\mathbf{E}$ -termi. Tällöin liikeyhtälö (2.71) voidaan heti ratkaista

$$m\mathbf{v}^{(1)} = \frac{q}{m\omega} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \sin \omega t, \quad (2.72)$$

josta saadaan edelleen integroimalla

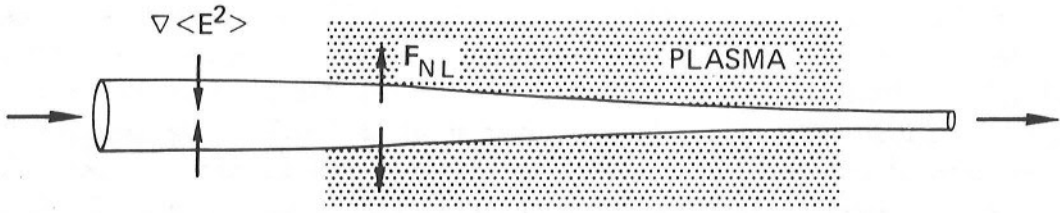
$$\delta\mathbf{r}^{(1)} = -\frac{q}{m\omega^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \cos \omega t. \quad (2.73)$$

**2. kertaluku:** Toisen kertaluvun ratkaisu löydetään sijoittamalla liikeyhtälön (2.71) oikealle puolelle ensimmäisen kertaluvun ratkaisut

$$m\dot{\mathbf{v}}^{(2)} = q[\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{v}^{(1)} \times \mathbf{B}], \quad (2.74)$$

missä ensimmäisen kertaluvun sähkökenttä saadaan sarjakehitelmästä:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \dots = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + (\delta\mathbf{r}^{(1)} \cdot \nabla)\mathbf{E}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$ . Magneettivuon tiheys  $\mathbf{B}$  on ensimmäistä kertalukua ja sille saadaan Maxwellin yhtälön (2.48) mukaan

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{\omega} (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}})_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \sin \omega t. \quad (2.75)$$



Kuva 2.5: Ponderomotiivisen voiman aiheuttama lasersäteen epälineaarinen itsefokusoituminen plasmassa.

Nyt toisen kertaluvun liikeyhtälölle (2.74) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}}^{(2)} &= q[(\delta\mathbf{r}^{(1)} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{E}} \cos \omega t - \frac{1}{\omega}\mathbf{v}^{(1)} \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) \sin \omega t] \\ &= -\frac{q^2}{m\omega^2}[(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{E}} \cos^2 \omega t + \tilde{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) \sin^2 \omega t]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Otetaan aikakeskiarvo nopeasti värähtelevän taajuuden  $\omega$  yli, jolloin saadaan hiukkaseen vaikuttava epälineaarinen toista kertalukua oleva ponderomotiivinen voima

$$\mathbf{F}_{NL} = m\langle\dot{\mathbf{v}}^{(2)}\rangle_{\omega} = -\frac{q^2}{2m\omega^2}[(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}})], \quad (2.77)$$

missä keskiarvoille on sijoitettu  $\langle\cos^2 \omega t\rangle_{\omega} = \langle\sin^2 \omega t\rangle_{\omega} = 1/2$ . Purkamalla yhtälön (2.77) ristitulot:  $\tilde{\mathbf{E}} \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}\nabla\tilde{E}^2 - (\tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{E}}$  ponderomotiivisen voiman lauseke redusoituu muotoon

$$\mathbf{F}_{NL} = -\frac{q^2}{4m\omega^2}\nabla\tilde{E}^2. \quad (2.78)$$

Plasman tapauksessa ponderomotiivinen voima (2.78) kerrotaan hiukkastiheydellä  $n_0$ , jolloin voimaksi tilavuusyksikköä kohden saadaan

$$\mathbf{f}_{NL} = -\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\nabla\langle\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\rangle, \quad (2.79)$$

missä  $\omega_p^2 = n_0q^2/m\epsilon_0$  plasmataajuus (neliö). Tuloksista (2.78) ja (2.79) nähdään, että ponderomotiivinen voima työntää hiukkasia kohti heikomman intensiteetin aluetta.

Ponderomotiivinen voima on tärkeä voimakkaiden sähkömagneettisten kenttien (laser tai maser) vaikuttaessa plasmassa. Esimerkkinä voidaan mainita intensiivisen lasersäteen itsefokusoituminen plasmassa, joka on esitetty kuvassa 2.5. Lasersuihkulle, jolla on esimerkiksi Gaussinen kentän profiili poikkisuunnassa, ponderomotiivinen voima  $\sim -\nabla \bar{E}^2$  vaikuttaa negatiivisen gradientin suuntaan (ulospäin). Siten se työntää hiukkasia ulospäin suihkun alueelta, jolloin tiheys  $n_0$  ja plasmataajuus  $\omega_p$  pyrkivät pienemään suihkun sisällä. Tämä kasvattaa taitekerrointa  $n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , mikä johtaa säteen itsefokusoitumiseen, koska valo taittuu kohti aluetta, missä on suurempi taitekerroin. Lisävalaistusta sähkömagneettisten aaltojen perusominaisuuksista plasmoissa löytyy luvusta 4 ja erityisesti kohdasta 4.7.

## Luku 3

# Magnetohydrodynamikka

Tässä luvussa tarkastellaan plasman käyttäytymistä törmäysten hallitsemassa tilanteessa. Tällöin plasmaa voidaan kuvata magnetohydrodynamikalla (MHD), jolla tarkoitetaan sähköä johtavan ja magneettikentän alaisen nesteen tai kaasun (fluid tai plasma) hydrodynamikkaa. MHD-ilmiöt ovat hitaita, matalataajuisia ja suurimittakaavaisia vastaaviin törmäysparametreihin verrattuna. Ilmiön aikaskaala on pitkä törmäysten väliseen aikaan verrattuna ( $\tau, \omega^{-1} \gg \nu_c^{-1}$ , missä  $\nu_c$  on törmäystaajuus) ja pituuskaala pitkä hiukkasten vapaaseen matkaan nähden ( $\lambda \gg \lambda_c$ ). Paikalliset varausten erottumiset ehtivät neutraloitua, joten plasmaa voidaan pitää yksikomponenttisena fluidina. Tästä syystä elektroni- ja ionikomponentteja ei tarvitse käsitellä erikseen, kuten on laita nopeissa ilmiöissä. MHD-ilmiöissä vaikuttavat samanaikaisesti hydrodynaamiset ja sähkömagneettiset voimat, jotka kytkevät kentät ja plasman liikkeet toisiinsa. Tärkeän ryhmän magnetohydrodynamikassa muodostavat matalataajuiset Alfvénin aallot (ruotsalaisen Hannes Alfvénin mukaan) sekä monimuotoiset MHD-epästabiilisuuudet, jotka ovat erittäin tärkeitä fuusioplasmojen magneettisessa koossapidossa.

### 3.1 Magnetohydrodynamikan perusyhtälöt

Magnetohydrodynamikka on hydrodynamikkaa, jossa sähkömagneettiset voimat vaikuttavat merkittävästi systeemin käyttäytymiseen. Perusyhtälöt voidaan johtaa suoraan Vlasovin yhtälöstä nopeusmomentteina. Seuraavassa kuitenkin annetaan MHD-teorian perusyhtälöt ja tehdään niissä tarkoituksenmukaiset approksimaatiot. Suuresta törmäystaajuudesta johtuen hiukkasia voidaan pitää lokalisoituneina ja kussakin pisteessä voidaan määritellä plasman neste-elementti, jolla on tietty massatiheys  $\rho$  ja virtausnopeus  $v$ .

Ensimmäinen MHD-yhtälöistä on jatkuvuusyhtälö (nollas momentti)



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

joka ilmaisee massan säilymisen. Jatkuvuusyhtälöstä voidaan nopeasti todeta massan säilyminen. Integroidaan yli suljetun tilavuuden ja käytetään Gaussin lausetta, jolloin massan muuttumisnopeus vastaa massan virtausta tilavuutta rajoittavan pinnan läpi.

Ensimmäisenä nopeusmomenttina saadaan plasman liikeyhtälö

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + Q\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.2)$$

missä  $Q$  ja  $\mathbf{j}$  ovat varaustiheys ja virtatiheys. Vasemman puolen konvektiivinen derivaatta  $\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  kertoo suureen muutosnopeuden sen liikkeessä plasman mukana, joten se antaa neste-elementin liikemäärän kokonaismuutoksen. Oikealla puolella ovat neste-elementtiin vaikuttavat voimat, jotka johtuvat plasman paineesta, varaustiheydestä ja magneettikentästä. Yhtälöstä on jätetty pois viskositeettitermi (vrt. Navier-Stokesin yhtälö), mikä on oikeutettua, kun Reynoldsin luku on suuri ( $Re = v\rho L/\eta_v \gg 1$ , missä  $\eta_v$  on viskositeettikerroin ja  $L$  pituuskaala). Useimmissa tapauksissa viskositeettitermi ei ole tärkeä.

Näiden lisäksi tarvitaan plasman tilanyhtälö, joka sitoo plasman paineen ja tiheyden toisiinsa.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right)(p/\rho^\gamma) = 0 \quad (3.3)$$

MHD-teoriassa tilan muutokset oletetaan usein adiabaattisiksi, jolloin ominaislämpösuhteelle  $\gamma$  käytetään arvoa 5/3. Jos tilan muutokset ovat isotermisiä, valitaan ominaislämpösuhteelle  $\gamma = 1$ .

Sähkömagneettisten efektien ottaminen huomioon vaatii Ohmin lain ja Maxwellin yhtälöt. Ohmin laki kertoo kenttien aiheuttaman virran

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.4)$$

missä  $\sigma$  on törmäysten määräämä plasman sähkönjohtavuus (kts. kohta 3.7).

Maxwellin yhtälöt puolestaan määrävät kentät, kun lähteinä toimivat varaus- ja virtatiheys tunnetaan. Täydellisinä Maxwellin yhtälöt ovat

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = Q/\epsilon_0 \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

missä  $\epsilon_0$  on tyhjän dielektrisyysvakio ja  $\mu_0$  tyhjän permeabiliteetti, joille pätee  $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ . Edellä esitetyt yhtälöt (3.1)–(3.8) toimivat magnetohydrodynamiikan perusyhtälöinä. Näissä tehdään usein seuraavat yksinkertaistukset:

(i) jätetään varaustiheystermi  $Q\mathbf{E}$  pois likeyhtälöstä (3.2), mikä on hitaille ilmiöille hyvin pätevä neutraalisuusolettamus. Tämän jälkeen Poissonin yhtälöä (3.5) ei tarvita.

(ii) siirrosvirta  $\epsilon_0(\partial\mathbf{E}/\partial t)$  on tärkeä vain nopeissa ilmiöissä ja se voidaan jättää pois Maxwellin yhtälöstä (3.8).

Tämän jälkeen magnetohydrodynamiikan perusyhtälöt voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.9)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.10)$$

$$p/\rho^\gamma = \text{vakio}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.15)$$

Jos lisäksi Ohmin laissa (3.12) asetetaan johtavuus äärettömäksi ( $\sigma = \infty$ ) saadaan ideaalinen MHD-teoria.

Pienennetään MHD-yhtälöiden lukumäärää eliminoimalla yllä saadusta ryhmästä virtatiheys  $\mathbf{j}$  ja sähkökenttä  $\mathbf{E}$ . Sijoitetaan  $\mathbf{j}$  viimeisestä Maxwellin yhtälöstä (3.15) plasman likeyhtälöön (3.10), joka tulee muotoon

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (3.16)$$

Vastaavasti virtatiheys voidaan eliminoida sijoittamalla  $\mathbf{j}$  Ohmin laista (3.12) viimeiseen Maxwellin yhtälöön:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Operoidaan  $\nabla \times$ :llä, eliminoidaan sähkökenttä  $\mathbf{E}$  Maxwellin yhtälön (3.14) avulla ja puretaan  $\nabla \times \nabla \times$ -operaattori, jolloin saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.17)$$

missä  $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ . Yhtälössä (3.17) on käytetty myös Maxwellin yhtälöä (3.13) ja lisäksi on oletettu, että sähkönjohtavuus ei ole paikan funktio  $\sigma \neq \sigma(\mathbf{r})$ . Tilan-yhtälön (3.11) avulla voidaan paine  $p$  eliminoida yhtälöstä (3.16), joten jäljellä on kolme yhtälöä (3.9), (3.16) ja (3.17), jotka sisältävät kolme tuntematonta suuretta  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  ja  $\mathbf{B}$ .

Tarkastellaan lähemmin plasman liikeyhtälöä (3.16) ja puretaan oikeanpuolen jälkimmäisen termin roottorin ristitulo

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2. \quad (3.18)$$

Nyt voidaan skalaaritermien gradientit yhdistää ja yhtälö (3.16) voidaan kirjoittaa

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p + \frac{B^2}{2\mu_0}) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \quad (3.19)$$

Tästä muodosta nähdään, että magneettikentällä on paineeseen  $p$  verrattava vaikutus  $B^2/2\mu_0$ , jota kutsutaankin magneettiseksi paineeksi. Oikean puolen toinen termi  $(1/\mu_0)(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$  on nolasta poikkeava vain, jos voimaviivat kaartuvat tai vuontiheys muuttuu kentän suuntaan. Tämä termi aiheuttaa plasmaan jännitystä kentän suunnassa. Magneettinen paine ja jännitys ovat hyvin kuvaavia suureita pyrittäessä ymmärtämään plasman käyttäytymistä magneettikentässä.

Magneettisesti koossapidetyille plasmalle määritellään tärkeä suure nimeltään beta-arvo  $\beta$ , joka ilmaisee plasman paineen suhteen magneettiseen paineeseen

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B^2}. \quad (3.20)$$

Plasman  $\beta$ -arvo kertoo, kuinka tehokkaasti magneettikenttää käytetään plasman koossapitoon. Ideaalikoossapidossa  $\beta = 1$ , jolloin plasman ulkopuolinen magneettinen paine on täsmälleen sama kuin plasman paine  $p$  eikä plasman sisällä

ole lainkaan magneettikenttää. Yleensä osa magneettikentästä on plasman sisällä ja tätä vastaava magneettinen paine yhdessä plasman paineen kanssa on tasapainossa ulkopuolisen magneettisen paineen kanssa. Tästä syystä  $\beta$ -arvo jää käytännössä usein paljon ykköstä pienemmäksi.

## 3.2 Ideaalinen MHD-teoria

Kun oletetaan plasman sähkönjohtavuus äärettömäksi ( $\sigma = \infty$ ;  $\eta = 0$ ), saadaan ideaalinen MHD-teoria, jolla on tärkeä asema fuusioplasmojen magneettisessa koossapidossa. Korkeassa lämpötilassa, mikä on tyypillistä fuusioplasmoille, plasman johtavuus kasvaa nopeasti ( $\sigma \sim T^{3/2}$ ) ja ideaalinen MHD-malli pätee hyvin (kts. kohta 3.7). Rajoituksena on MHD-teorian vaatimus tarkasteltavan ilmiön hitaudesta törmäysten väliseen aikaan verrattuna. Ideaalisessa magnetohydrodynamikassa Ohmin laki (3.12) korvautuu yhtälöllä

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.21)$$

Nyt ideaaliset MHD-yhtälöt voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.22)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (3.23)$$

$$p = \text{vakio} \times \rho^\gamma, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.25)$$

Ideaalisen MHD-ryhmän viimeisessä yhtälössä (3.25) pois jätetty diffuusiotermin  $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$  on pieni, jos nk. magneettinen Reynoldsin luku on suuri

$$R_M = \frac{vL}{\eta} \gg 1, \quad (3.26)$$

missä  $L$  on magneettikentän muutoskaala ja  $v$  virtausnopeuden suuruusluokka. Magneettinen Reynoldsin luku  $R_M$  on yksinkertaisesti yhtälön (3.17) oikean puolen termien suuruusluokkien suhde.

Yhtälöstä (3.25) voidaan tehdä kaksi johtopäätöstä:

- Plasman mukana liikkuvan suljetun käyrän läpi kulkeva magneettivuo pysyy vakiona (osoita).
- Virtauksen mukana kulkeva neste-elementti, joka jollakin hetkellä on magneettisella voimaviivalla, pysyy koko ajan samalla voimaviivalla (osoita).

Alfvén kuvasi yllä mainittuja tuloksia havainnollisesti siten, että magneettiset voimaviivat ovat "jäätäneet" kiinni plasmaan. Plasma voi virrata vapaasti kentän suuntaan, mutta poikkisuuntaan kenttäviivat taipuvat plasman liikkumisen mukana.

### 3.3 Magneettikentän resistiivinen diffuusio

Jos plasman tai johtavan nesteen resistiivisyys on tarpeeksi suuri, magneettinen Reynoldsin luku jää pieneksi ( $R_M \ll 1$ ). Tällöin ensimmäinen termi yhtälön (3.17) oikealla puolella on dominoiva ja yhtälö redusoituu muotoon

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3.27)$$

joka on tyypiltään diffuusioyhtälö. Se kuvaa magneettikentän tai magneettisten voimaviivojen diffuusiota resistiivisessä plasmassa ja johtavassa nesteessä. Tästä syystä kerrointa  $\eta = 1/\mu_0\sigma$  kutsutaan magneettiseksi diffuusiokertoimeksi, joka on läheistä sukua plasman resistiivisyydelle.

Diffusion vuoksi magneettivuon tiheys pyrkii pienenemään johtavassa nesteessä. Plasman magneettisessa koossapidossa purkauksen alussa plasma on kylmää ja resistiivistä, jolloin ulkoinen magneettikenttä pyrkii diffundoitumaan plasman sisään. Plasman kuumentuessa sen johtavuus kasvaa ja voimaviivat "jäätävät" vähitellen paikalleen plasman sisällä. Diffusion syynä on törmäysten aiheuttama hiukkasten ratojen (gyroliike) häiriytyminen, mikä puolestaan häiritsee magneettikentän synnyttävää virtaa sallien magneettikentän vähittäisen diffusion.

Karakteristiselle diffusioajalle  $\tau_B$  löydetään suuruusluokka-arvio yhtälön (3.27) dimensiotarkastelulla

$$\tau_B \simeq \frac{L^2}{\eta} = \mu_0\sigma L^2. \quad (3.28)$$

Laboratorioplasmoissa diffusioajat asettuvat tyypillisesti millisekuntiskaalaan, mikä johtuu pääosin  $L^2$ -termin pienuudesta astroplasmoihin verrattuna. Diffusioaika kasvaakin nopeasti astrofysikaalisille kappaleille. Esimerkiksi auringon

koronassa  $\tau_B \simeq 10^{18}$  s ( $3 \times 10^9$  vuotta). Maan sydämelle magneettikentän diffuusiaika on luokkaa 30 000 vuotta, mikä on liian lyhyt selittämään maan magneettikentän nykyisen tason. Tästä syystä maan magneettikentän olemassaolo pyritään selittämään muulla tavoin (dynamoteoria).

Kummassakin edellä esitettyssä esimerkissä magneettinen Reynoldsin luku on suuri, joten systeemin tarkka kuvaaminen edellyttää yhtälön (3.17) käyttöä. Yleisessä tapauksessa ( $R_M \sim 1$ ) magneettiset voimaviivat ovat edelleen kiinni plasmassa, mutta pääsevät kuitenkin diffuusion ansiosta jonkin verran luistamaan plasman suhteen.

### 3.4 Magnetohydrodynaaminen tasapaino

Ideaalisen MHD-teorian mukainen tasapaino saavutetaan asettamalla aikaderivaatat ja nopeus nolliksi yhtälöissä (3.22) – (3.25). Tällöin päästään nk. magnetostaattisiin yhtälöihin

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.29)$$

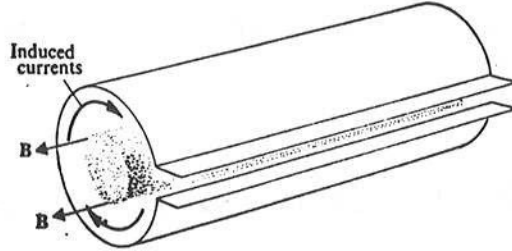
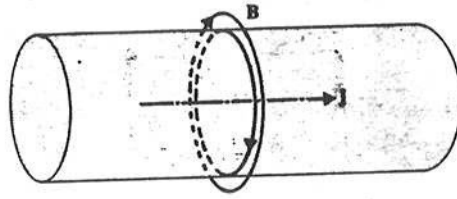
Näistä nähdään välittömästi, että

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{j} \cdot \nabla p = 0. \quad (3.30)$$

Yhtälöiden (3.30) mukaan sekä magneettikenttä että virta ovat kohtisuorassa painegradienttia vastaan. Käytännön kolmidimensioisissa plasmassa on aina olemassa painegradientti ja siten myös hyvin määritellyt vakiopainepinnat, joita pitkin magneettiset voimaviivat ja virta kulkevat. Kyseisiä pintoja kutsutaan magneettisiksi pinnoiksi tai vuopinnoiksi. Vaikka yhtälöt (3.30) näyttävät yksinkertaisilta, on erityisesti kolmidimensioisen tasapainotilan konstruointi varsin mutkikas tehtävä. Yleensä esimerkiksi fuusiolaitteissa on jonkinasteinen symmetria, mikä helpottaa tasapainotilan löytämistä.

Tarkastellaan yksinkertaisena esimerkkinä lineaarisen Z-pinteen (Z-pinch) tasapainotilaa. Z-pinne on yksinkertainen plasman koossapitomenetelmä, jossa sylinterimäisen plasmapatsaan läpi ajetaan voimakas aksiaalinen virta (z-suunta) kuvan 3.1 mukaisesti. Virta aiheuttaa atsimutaalisen ( $\theta$ -suunta) magneettikentän ja seurauksena syntyy  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -voima, joka kuroo plasmata radiaalisesti kokoon. Magneettikentän suunta on aina sellainen, että kyseinen voima on radiaalisesti sisäänpäin. Tasapainotila saavutetaan, kun plasman paine pysäyttää  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -voiman aiheuttaman kuroutumisen, mikä on ilmaistuna ensimmäisessä tasapainoyhtälössä (3.29).

Tasapainoyhtälöistä (3.29) saadaan eliminoimalla virta  $\mathbf{j}$



Kuva 3.1: Virta ja magneettikenttä lineaarisissa  $Z$ - ja  $\theta$ -pinteissä.

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (3.31)$$

joka lausuttuna sylinterikoordinaatistossa on

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B}{\mu_0 r} \frac{d(rB)}{dr}. \quad (3.32)$$

Kerrotaan yhtälö (3.32) puolittain  $r^2$ :lla ja integroidaan 0:sta säteen arvoon  $a$ .

$$\int_0^a \frac{dp}{dr} r^2 dr = \frac{1}{\mu_0} \int_0^a (rB) d(rB) \quad (3.33)$$

Suoritetaan osittaisintegrointi ja oletetaan  $p(a) = 0$ , jolloin sijoitustermi häviää ja saadaan

$$2 \int_0^a r p dr = \frac{1}{2\mu_0} a^2 B(a)^2. \quad (3.34)$$

Jos tilanyhtälössä (3.11) valitaan  $\gamma = 1$ , niin plasman paine voidaan lausua muodossa  $p = 2nk_B T$ , missä  $n (= n_e = n_i)$  partikkelitiheys ja  $T (= T_e = T_i)$  lämpötila, jotka oletetaan samoiksi sekä elektroneille että ioneille. Oletetaan lämpötila  $T$  vakioiksi koko plasmassa, jolloin päästään muotoon

$$2 k_B T N = \frac{\pi a^2 B(a)^2}{2\mu_0}, \quad (3.35)$$

missä  $N = \int n 2\pi r dr$  partikkelilukumäärä pituusyksikköä kohden (viivatiheys). Maxwellin yhtälö (3.15) sylinterikoordinaatistossa on

$$\frac{1}{r} \frac{d(rB)}{dr} = \mu_0 j. \quad (3.36)$$

Yhtälöstä (3.36) voidaan heti ratkaista integroimalla magneettikentän arvo plasman pinnalla:  $B(a) = \mu_0 I / 2\pi a$ , missä  $I = \int 2\pi r j dr$  on Z-pinteen kokonaisvirta. Sijoitetaan  $B(a)$ :n lauseke yhtälöön (3.35), jolloin Z-pinteen tasapainotilalle voidaan kirjoittaa

$$\mu_0 I^2 = 16\pi N k_B T, \quad (3.37)$$

joka tunnetaan nimellä Bennettin relaatio. W.H. Bennett tutki kuroutumisilmiötä (pinch) jo 1930-luvulla. Yhtälö (3.37) kertoo minkälaiseen tasapainotilaan ( $N$  ja  $T$ ) Z-pinne asettuu, kun sen läpi ajetaan tietty virta  $I$ .

Toinen lineaarinen pinnetyyppi on nk.  $\theta$ -pinne ( $\theta$ -pinch), jossa indusoidaan atsimutaalisuuntainen ( $\theta$ -suunta) virta, jolloin magneettikentästä tulee aksiaalinen ( $z$ -suunta). Myös  $\theta$ -pinteessä magneettikenttä on aina sen suuntainen, että plasmaan kohdistuva  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -voima on radiaalisesti sisäänpäin.

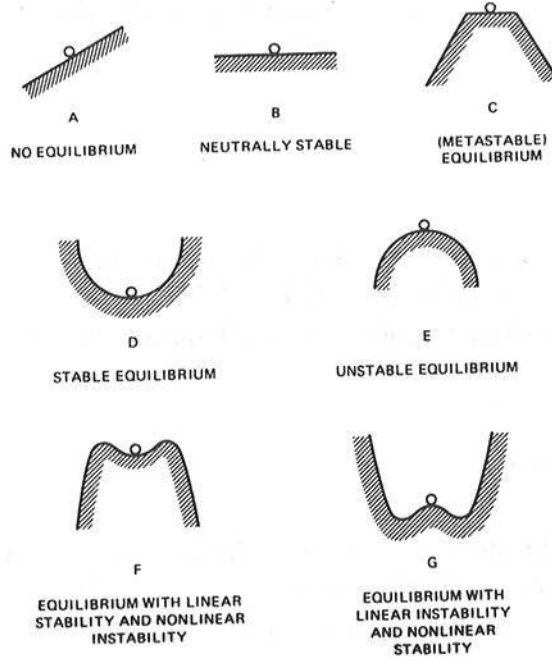
### 3.5 MHD-epästabiilisuudet

Edellisessä kohdassa käsiteltiin plasman tasapainotilan määräytymistä. Kun tasapainotila on löytynyt, on ratkaistava onko se stabiili vai johtaako pieni häiriö systeemin värähtelemiseen tai hajoamiseen eli epästabiilisuuteen. Tämä on plasman koossapidon kannalta elintärkeä kysymys. Plasman epästabiilisuus ei fuusiosovellutuksissa ole välttämättä kohtalokasta, mikäli häiriön kasvunopeus jää riittävän hitaaksi esimerkiksi energian koossapitoaikaan nähden tai tuloksena on värähtelevä tila kahden tasapainoaseman välillä. Kuvassa 3.2 on esitetty erilaisia tasapainotiloja ja niiden stabiilisuusominaisuuksien mekaaniset analogiat.

Epästabiilisuuksia ajavat voimat ovat seurausta plasman virta- ja painegradientteista yhdistettynä magneettikentän epäsuotuisaan kaarevuuteen. MHD-moodeja stabiloivia efektejä ovat (i) voimaviivojen taipuminen, jota vastustaa magneettinen jännitys, (ii) voimaviivojen puristuminen, joka lisää puristusta vastustavaa magneettista painetta sekä (iii) kenttäviivojen suotuisa kaarevuus painegradienttia vastaan (kts. kuva 3.3).

Yleisin menetelmä stabiilisuustarkasteluissa on pienen häiriön lisääminen tasapainotilaan. Systeemin yhtälöt linearisoidaan pienen häiriön suhteen, ts. häiriösuureen neliölliset termit jätetään mitättöminä pois. Linearisoidussa systeemissä voidaan häiriön aikariippuvuudelle olettaa  $\exp(-i\omega t)$ . Tämä johtaa paikasta





Kuva 3.2: Mekaaniset analogiat eri tasapaino- ja stabiilisuustyypeille.

riippuvaan ominaisarvo-ongelmaan, jossa ominaisarvona on  $\omega^2$ . Riippuen ominaisarvon merkistä saadaan joko värähteleviä, vaimenevia (stabiileja) tai kasvavia (epästabiileja) ratkaisuja.

Tarkastellaan seuraavaksi ideaalisen MHD-tasapainon stabiilisuutta. Kirjoitetaan suureille

$$p = p_0 + p_1; \quad \rho = \rho_0 + \rho_1; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1,$$

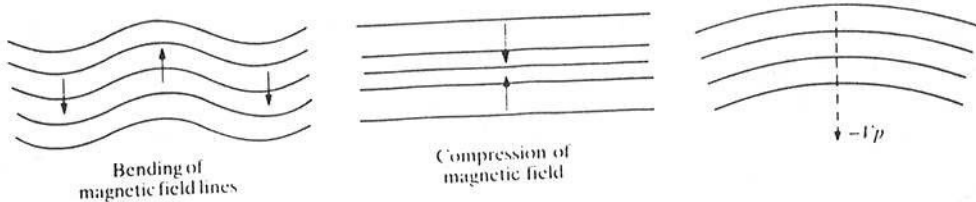
missä tasapainoarvoa on merkitty alaindeksillä "0" ja alaindeksi "1" viittaa pienen häiriöön, jolle oletetaan ( $p_1 \ll p_0$ , jne). Tasapainotilan

suureet ovat tunnettuja paikan funktiota. Virtausnopeuden  $\mathbf{v}$  tasapainoarvo on nolla. Sijoitetaan yllä olevat suureet ideaalisiin MHD-yhtälöihin (3.22)–(3.25) ja suoritetaan linearisointi. Tämän jälkeen saadaan häiriösuureille yhtälöt

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (3.38)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 + (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (3.40)$$



Kuva 3.3: Magneettikentän MHD-epästabiilisuuksia stabiloivia efektejä: (a) voimaviivojen taipuminen, (b) voimaviivojen puristuminen, (c) voimaviivojen suotuisa kaarevuus.

Merkitään plasman neste-elementin poikkeamaa tasapainoasemastaan  $\mathbf{r}_0$  vektorilla:  $\xi(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , jolloin nopeudelle voidaan kirjoittaa  $\mathbf{v}_1 = \partial \xi / \partial t$ . Nyt yhtälöt (3.38)–(3.40) voidaan lausua  $\xi$ :n avulla

$$p_1 = -(\xi \cdot \nabla)p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi \quad (3.41)$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0). \quad (3.42)$$

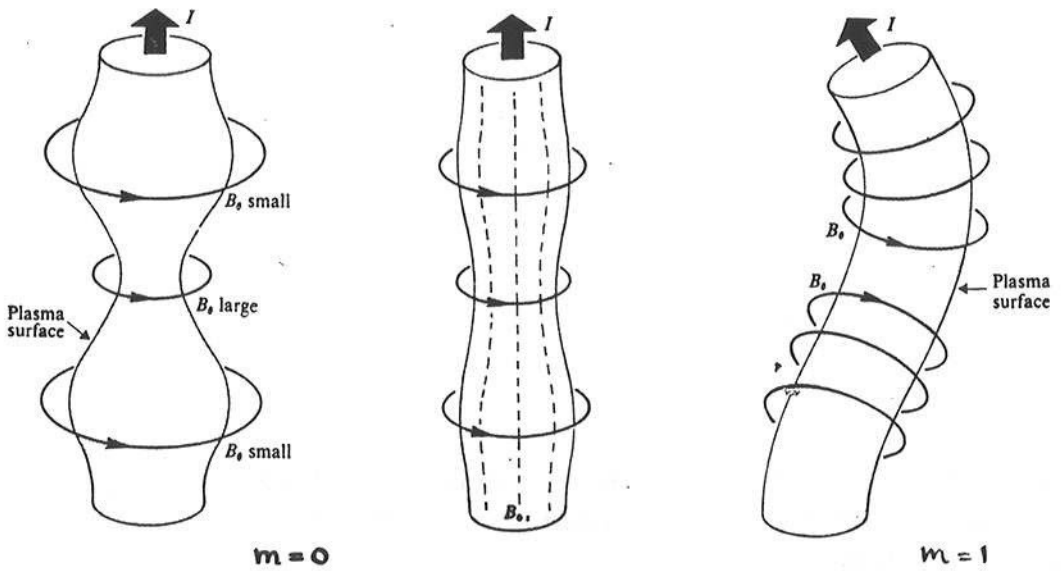
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 + (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1] \quad (3.43)$$

Oletetaan häiriön aikariippuvuudeksi  $\exp(-i\omega t)$  ja sijoitetaan  $p_1$  yhtälöstä (3.41) ja  $\mathbf{B}_1$  yhtälöstä (3.42) yhtälöön (3.43), jolloin päästään muotoon

$$-\rho_0 \omega^2 \xi(\mathbf{r}_0, \omega) = \mathbf{F}[\xi(\mathbf{r}_0, \omega)], \quad (3.44)$$

missä  $\mathbf{F}$  on lineaarinen differentiaalioperaattori. (3.44) määrittelee yhtälön siirtymälle  $\xi$ . Kun systeemin reunaehdot on kiinnitetty, yhtälö (3.44) on ominaisarvotyyppiä, joka määrää mahdolliset ominaisarvot  $\omega^2$ . Jos kaikki ominaisarvot ovat positiivisia ( $\omega^2 > 0$ ), ratkaisut ovat värähteleviä ja systeemi on stabiili. Mikäli joku ominaisarvoista on negatiivinen ( $\omega^2 < 0$ ), niin tätä vastaava  $\xi$ :n ratkaisu on eksponentiaalisesti kasvava, joten kyseessä on epästabiilisuus.

Edellä esitetty tarkastelu perustui häiriöteoriaan, jossa häiriö oletettiin pieneksi ja yhtälöt voitiin linearisoida. Häiriöteoria kertoo vain epästabiilisuuden luonteen tai tyypin. Häiriön kasvun myötä linearisoitu ratkaisu ei enää päde, koska epälineaariset seuraavan kertaluvun termit tulisi ottaa myös huomioon. Siten ideaalisten MHD-epästabiilisuuksien saturaatiokysymysten ratkaisu vaatii epälineaaristen yhtälöiden (3.22)–(3.25) käsittelyä.



Kuva 3.4: Z-pinneplasman makkara- ( $m = 0$ ) ja mutkaepästabiilisuudet ( $m = 1$ ). Plasman sisällä olevalla pitkittäisellä magneettikentällä on stabiloiva vaikutus.

Esimerkkinä MHD-epästabiilisuuksista voidaan mainita edellä esitetyn Z-pinneplasman makkara- ja mutkaepästabiilisuudet (sausage and kink instability), joita on havainnollistettu kuvassa 3.4. Sylinterikoordinaatistossa voidaan plasman siirtymä esittää muodossa  $\xi(r) \exp(ikz + im\theta)$ , missä  $m$  on kokonaisluku.

Sylinterisymmetrisessä tapauksessa  $m = 0$  saadaan makkaraepästabiilisuus, joka on helppo ymmärtää kvalitatiivisesti. Jos plasma kuroutuu paikallisesti, niin plasman pinnalla oleva magneettivuon tiheys kasvaa kuten  $B = I/2\pi\mu_0 r$  ja plasmaa kurova magneettinen paine kasvaa entisestään, mikä pyrkii kuroma plasmaa lisää. Siten tasapainotilaan tullut pieni häiriö (kuroutuma) lähtee kasvamaan. Jos plasman sisällä on aksiaalinen magneettikenttä (synnytetty ulkoisilla keloilla), se pyrkii stabiloimaan  $m = 0$  moodin. Tämä johtuu siitä, että plasman kuroutuminen kuroo myös sisällä olevat plasmaan "jäätäneet" voimaviivat ja sisäinen magneettisen paineen kasvu pysäyttää kuroutumisen.

Mutkaepästabiilisuudelle (moodi  $m = 1$ ) pätee samantyyppinen selitys. Plasma-sylinterin taipuminen lisää magneettivuon tiheyttä koveralla puolella ja vähentää sitä kuperalla puolella. Tämä johtaa magneettisen paineen lisääntymiseen koveralla puolella ja plasma pyrkii taipumaan yhä lisää. Myös moodin  $m = 1$  tapauksessa plasmaan ulkopuolisesti synnytetty aksiaalinen magneettikenttä pyrkii stabiloimaan taipumisen. Stabiloiva voima on seurausta voimaviivojen taivuttamisen aiheuttamasta magneettisesta jännityksestä, joka vastustaa voimaviivojen taipumista.

### 3.6 Magnetohydrodynamiset aallot

Tarkastellaan tämän luvun loppuksi matalataajuisia MHD-aaltoja ideaalisen teorian (ääretön johtavuus) pohjalta. Lähtökohdana on häiriöteoreettinen käsittely

kuten MHD-epästabiilisuuksien kohdalla. Tällä kerralla ei kuitenkaan tarkastella häiriön kasvua vaan oletetaan homogeeninen ( $p_0$  ja  $\mathbf{B}_0$  vakioita) virraton plasma ja pyritään selvittämään pieniamplitudisen aallon etenemisominaisuuksia tällaisessa plasmassa. Lähdetään suoraan linearisoiduista yhtälöistä (3.41)–(3.43), jotka homogeenisen plasman tapauksessa redusoituvat muotoon

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0). \quad (3.45)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \nabla(\gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0. \quad (3.46)$$

Sijoitetaan häiriösuureille tasoaltoyrite<sup>1</sup>, joka on muotoa  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ , missä  $\mathbf{k}$  on aallon aaltovektori ja  $\omega$  on aallon kulmataajuus. Tällöin derivaatat korvautuvat:  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$  ja  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$  ja osittaisdifferentiaaliyhtälöt (3.45)–(3.46) muuttuvat algebrallisiksi yhtälöiksi

$$\mathbf{B}_1 = i\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0). \quad (3.47)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{k}(\gamma p_0 \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu_0} (i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0. \quad (3.48)$$

Oletetaan magneettikenttä  $\mathbf{B}_0$   $z$ -akselin suuntaiseksi ja olkoon  $\theta$  aaltovektorin  $\mathbf{k}$  ja kentän  $\mathbf{B}_0$  välinen kulma. Sijoitetaan  $\mathbf{B}_1$  yhtälöstä (3.47) yhtälöön (3.48) ja otetaan skalaaritulo vuorotellen  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}$  ja  $(\mathbf{k} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n}$  suhteen, jolloin saadaan kolme yhtälöä

$$\omega^2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{k}) = c_s^2 k^2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{k}) - v_A^2 k^3 \xi_z \cos \theta + v_A^2 k^2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{k}) \quad (3.49)$$

$$\omega^2 \xi_z = c_s^2 k (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{k}) \cos \theta \quad (3.50)$$

$$(\omega^2 - v_A^2 k^2 \cos^2 \theta) (\mathbf{k} \times \mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \quad (3.51)$$

missä  $c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$  on äänennopeus ja  $v_A^2 = B_0^2 / \mu_0 \rho_0$  tunnetaan nimellä Alfvénin nopeus. Viimeisestä yhtälöstä nähdään heti, että ei-triviaalille ratkaisulle ( $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ ) täytyy päteä

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \theta, \quad (3.52)$$

<sup>1</sup>tasoalloista tarkemmin seuraavan luvun kohdassa 4.1

joka kertoo aallon taajuuden  $\omega$  ja aaltoluvun  $k$  välisen yhteyden. Yleisesti tällaista riippuvuutta  $\omega = \omega(k)$  tai  $f(k, \omega) = 0$  kutsutaan dispersiorelaatioksi. Yhtälöstä (3.51) havaitaan, että plasman siirtymä  $\xi$  on suunnassa  $k \times z$  eli kohtisuorassa sekä magneettikenttää että aaltovektoria vastaan. Kyseinen moodi tunnetaan nimellä Alfvénin aalto.

Yhtälöistä (3.49) ja (3.50) voidaan  $(k \cdot \xi)$  ja  $\xi_z$  eliminoida, jolloin saadaan toisen asteen yhtälö  $\omega^2$ :lle. Nyt tulee  $(k \cdot \xi)$  olla nolasta poikkeava. Tämän ratkaisu antaa

$$\omega^2 = (k^2/2)\{v_A^2 + c_s^2 \pm [(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\}. \quad (3.53)$$

Tästä dispersiorelaatiosta saadaan kaksi ratkaisua, joita nimitetään nopeaksi (+) ja hitaaksi (-) magnetosoniseksi aalloksi. Kenttää vastaan kohtisuoraan etenevässä tapauksessa  $\cos \theta = 0$  saadaan vain nopea aalto, jolle  $\omega^2 = k^2(v_A^2 + c_s^2)$ . Koska  $\xi_z = 0$ , on plasman liike aallon etenemissuuntaan eli aalto on pitkittäinen. Kentän suuntaan ( $\cos \theta = 1$ ) etenevälle hitaalle aallolle saadaan  $\omega^2 = k^2 v_A^2$ , joka on puhtaasti poikittainen. Nopean aallon dispersiorelaatio  $\omega^2 = k^2 c_s^2$  ei riipu lainkaan magneettikentästä. Tämä johtuu siitä, että nopea aalto on pitkittäinen eli tässä tapauksessa plasman siirtymät ovat myös magneettikentän suunnassa eivätkä siten riipu kentästä.

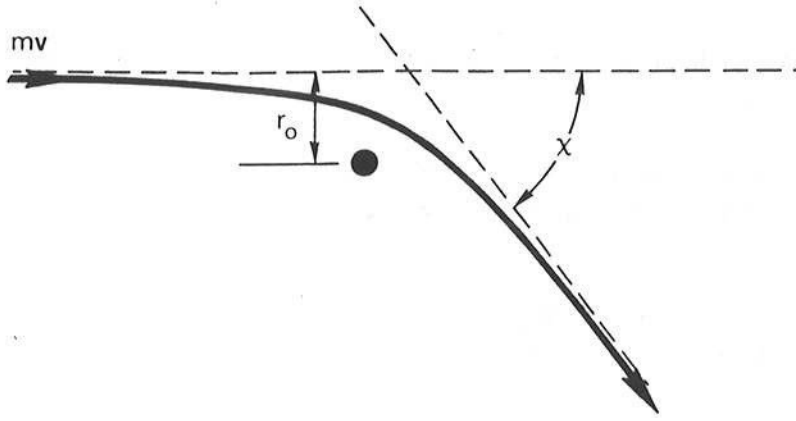
### 3.7 Coulombin törmäykset

Neutraalien atomien tai elektronin ja atomin törmätessä voimien vaikutus tapahtuu paikallisesti ja törmäys on hyvin määritelty biljardipallotyyppinen tapahtuma. Elektronin törmätessä positiivisesti varattuun ioniin, se kokee pitkän kantaman Coulombin voiman jo kaukaa ja muuttaa suuntaansa vähitellen kuvan 3.5) mukaisesti. Arvioidaan seuraavassa törmäysvaikutusalan ja törmäystaajuuden suuruusluokat yksinkertaistetulla mallilla. Olkoon elektronin nopeus  $v$  ja  $r_0$  elektronin ja ionin välinen lyhyin etäisyys, jota kutsutaan törmäysparametriksi (impact parameter). Coulombin voima  $F = q_e q_i / 4\pi \epsilon_0 r^2$  vaikuttaa elektroniin likipitään ajan  $T \simeq r_0 / v$ . Nyt voidaan kirjoittaa elektronin impulssin muutos törmäyksessä

$$\delta(m_e v) = |FT| \simeq \frac{q_e q_i}{4\pi \epsilon_0 r_0 v}. \quad (3.54)$$

Arvioidaan törmäysvaikutusala suurikulmaiselle törmäykselle, jossa  $\chi \leq \pi/2$  ja impulssin muutos itse impulssin  $m_e v$  luokkaa. Jos merkitään  $\delta(m_e v) \simeq m_e v$ , voidaan (3.54):n mukaan törmäysparametri ratkaista

$$r_0 = \frac{q_e q_i}{4\pi \epsilon_0 m_e v^2}. \quad (3.55)$$



Kuva 3.5: Elektronin rata sen ohittaessa positiivisesti varatun ionin.

Nyt saadaan törmäysvaikutusalaksi

$$\sigma_c = \pi r_0^2 = \frac{q_e^2 q_i^2}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v^4}, \quad (3.56)$$

ja elektronin törmäystaajuudeksi elektroni-ioni-törmäyksessä

$$\nu_{ei} = n\sigma_c v = \frac{nq_e^2 q_i^2}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v^3}. \quad (3.57)$$

Korvataan nopeus elektronin termisellä nopeudella  $(k_B T_e / m_e)^{1/2}$ , joka tuo törmäystaajuuden lämpötilariippuvuuden näkyviin

$$\nu_{ei} = \frac{nq_e^2 q_i^2}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}. \quad (3.58)$$

Törmäystaajuuden lausekkeesta nähdään, että  $\nu_{ei}$  pienenee voimakkaasti korkeissa lämpötiloissa. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että suurissa lämpötiloissa elektronien nopeudet kasvavat eivätkä ne kaarru enää yhtä voimakkaasti ionin kentässä, koska ne ovat vähemmän aikaa vahvan Coulombin voiman vaikutuspiirissä.

Edellä esitetty tarkastelu päti yhdelle suurikulmaiselle sironnalle. Käytännössä ionin pitkän kantaman Coulombin voima aiheuttaa lukuisia pienikulmaisia poikkeamia, joiden kumulatiivinen vaikutus näkyy suurikulmaisena törmäyksenä. Jos tämä otetaan huomioon, korvataan edellä saatu törmäystaajuus (3.58) lausekkeella

$$\nu_{ei} = \frac{nq_e^2 q_i^2 \ln \Lambda}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}, \quad (3.59)$$

missä  $\ln \Lambda = \langle \lambda_D / r_0 \rangle$  on nk. Coulombin logaritmi. Tyypillisissä laboratorio- ja fuusioplasmoissa  $\ln \Lambda \simeq 10 - 20$ .

Törmäysten aiheuttaman kitkan perusteella voidaan arvioida plasman resistiivisyys, josta sähkönjohtavuudelle  $\sigma$  saadaan

$$\sigma = \frac{n q_e q_i}{m_e \nu_{ei}} \simeq \frac{16 \pi \epsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2}}{q_e q_i m^{1/2} \ln \Lambda}. \quad (3.60)$$

Myös plasman johtavuudessa on sama voimakas lämpötilariippuvuus kuin törmäystaajuudessa. Tästä johtuen ei tokamakeissa päästä puhtaalla virran aiheuttamalla resistiivisellä kuumennuksella yli 5 keV:n lämpötiloihin.æ

# Luku 4

## Aallot kylmässä plasmassa

### 4.1 Aaltoihin liittyviä käsitteitä

**A. Tasoaalto:** Tasoaallolla tarkoitetaan kenttää, jonka aika- ja paikkariippuvuus on muotoa

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.1)$$

Fysikaalinen kenttä on  $\Psi$ :n reaalisosa.  $\Psi$  esittää aaltoa, jonka amplitudi on  $A$ , aallonpituus  $\lambda = 2\pi/k$  ja kulmataajuus on  $\omega$ . Plasmafysiikassa kulmataajuutta  $\omega$  nimitetään usein vain taajuudeksi, joka tarkasti ottaen on  $\nu = \omega/2\pi$ . Aallon vakiovaihepinnat etenevät aaltovektorin  $\mathbf{k}$  suuntaan vaihenopeudella:  $v_{ph} = \omega/k$ .

Yhtälö, jonka ratkaisua tasoaalto esittää, asettaa yleensä funktionaalisen riippuvuuden aaltovektorin  $\mathbf{k}$  ja kulmataajuuden  $\omega$  välille

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad f(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad k = k(\omega, \hat{\mathbf{k}}),$$

jota kutsutaan dispersiorelaatioksi. Tasoaaltoyrittteen (4.1) sijoittaminen korvaa derivointioperaatiot seuraavasti:  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$  ja  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ , ja yhtälöt muuttuvat algebrallisiksi (vrt. kohta 3.6). On muistettava, että tasoaaltoyrittettä (4.1) voidaan soveltaa vain lineaarisiin systeemeihin. Mikäli systeemissä on tulomuotoisia termejä, saadaan epäfysikaalisia reaalisia ratkaisuja seurauksena imaginaariosien tuloista. Epälineaarisisissa ongelmissa tasoaaltoyrite on valittava reaaliseksi — esimerkiksi  $\cos(kz - \omega t)$  tai  $(\Psi + \Psi^*)/2$ , missä  $\Psi^*$  on (4.1):n kompleksikonjugaatti.

**B. Aaltopaketti ja ryhmänopeus:** Käytännössä esiintyvillä aalloilla kulmataajuus  $\omega$  ja aaltoluku  $k$  ovat jakaantuneet jollekin alueelle. Jos  $\omega$  ja  $k$  ovat jakaantuneet diskreetisti, aalto voidaan esittää summana tasoaaltoja (vrt. Fourier sarja). Mikäli kulmataajuus ja aaltoluku ovat jakaantuneet jatkuvasti voidaan aalto esittää integraalina (vrt. Fourier-muunnos)



$$\Psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kz - \omega t)} dk \quad (4.2)$$

Ratkaisua (4.2) kutsutaan aaltopaketiksi. Yksinkertaisuuden vuoksi esimerkkinä on 1-dimensioiden tapaus. Asettamalla  $t = 0$  havaitaan, että kerroin  $a(k)$  on alkuhetkellä vallitsevan kentän  $\Psi(z, 0)$  Fourier-muunnos

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z, 0) e^{-ikz} dz \quad (4.3)$$

Tutkitaan aaltopaketin kehitystä ajan funktiona olettamalla, että aaltoluvun  $k$  arvot ovat keskittyneet arvon  $k_0$  läheisyyteen. Kehitetään  $\omega(k)$  Taylorin sarjaksi ja otetaan huomioon vain ensimmäiset termit

$$\omega(k) \simeq \omega_0 + (k - k_0)v_g + \dots,$$

missä  $\omega_0 = \omega(k_0)$  ja  $v_g = (d\omega/dk)_{k=k_0}$ . Sijoitetaan  $\omega(k)$ :n kehitelmä aaltopakettiin (4.2)

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kz - \omega_0 t - v_g k t + v_g k_0 t)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 v_g - \omega_0) t} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kz - v_g k t)} dk \\ &= \Psi(z - v_g t, 0) e^{i(k_0 v_g - \omega_0) t}, \end{aligned}$$

Yllä saadun ratkaisun mukaan aaltopaketti etenee muotoaan muuttamatta nopeudella  $v_g$ , jota kutsutaan ryhmänopeudeksi. Yleisesti ryhmänopeus voidaan esittää muodossa

$$v_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k=k_0} \quad (4.4)$$

Ryhmänopeuden  $v_g$  ja vaihenopeuden  $v_{ph}$  välillä vallitsee yhteys

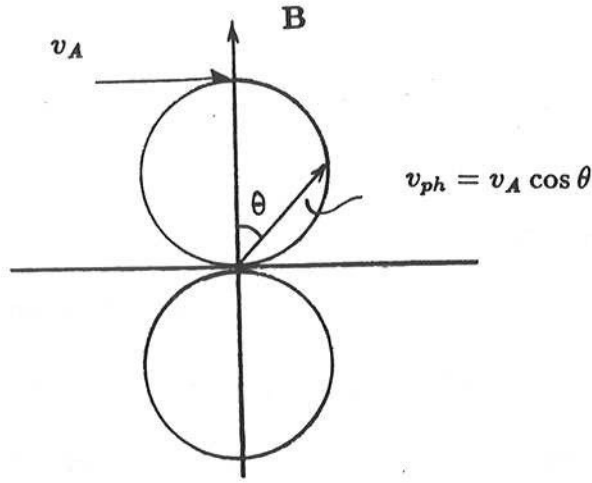
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_{ph})}{dk} = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}. \quad (4.5)$$

Riippuen vaihenopeuden derivaatasta voidaan erottaa kolme perustapaa

$$dv_{ph}/d\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad v_g = v_{ph} \quad \text{väliaine ei-dispersiivinen}$$

$$dv_{ph}/d\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad v_g < v_{ph} \quad \text{väliaine normaalisti dispersiivinen}$$

$$dv_{ph}/d\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad v_g > v_{ph} \quad \text{väliaine anomaalisesti dispersiivinen}$$



Kuva 4.1: Dispersiorelaatiota  $\omega^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \theta$  (Alfvénin aallot) vastaava aallonormaalipinta.

**C. Aallonormaalipinta:** Tarkastellaan dispersiorelaatiota  $k = k(\omega, \hat{\mathbf{k}})$  tietyllä taajuudella  $\omega$ , jolloin aaltoluku  $k$  on vielä etenemissuuntansa  $\hat{\mathbf{k}}$  funktio ( $\hat{\mathbf{k}}$  on  $\mathbf{k}$ :n suuntainen yksikkövektori). Aallonormaalipinta on  $\mathbf{k}$ :n suuntaisen ja  $v_{ph}$  pituisen vektorin kärkipisteen ura. Siten aallonormaalipinta on vektorin  $\mathbf{v}_{ph}$  polaarikuvio (kts. kuvan 4.1 esimerkkitapaus)

$$\mathbf{v}_{ph} = \frac{\omega \hat{\mathbf{k}}}{k(\omega, \hat{\mathbf{k}})}. \quad (4.6)$$

Aallonormaalipinnan sijasta voidaan käyttää taitekerroinpintaa, joka on vektorin  $\mathbf{n} = [ck(\omega, \hat{\mathbf{k}})/\omega] \hat{\mathbf{k}}$  polaarikuvio. Skalaarisuuretta  $n = kc/\omega$  kutsutaan taitekerroimeksi.

**D. Aallon energiavirtaus:** Aallon energiavirtausta kylmässä plasmassa kuvaa Poyntingin vektori  $\mathbf{S} = (1/\mu_0) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Koska Poyntingin vektori on tulomuotoa, on lähdettävä tasoaallon reaaliosista, ts.

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \text{Re}\{\mathbf{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\} \times \text{Re}\{\mathbf{B}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\}. \quad (4.7)$$

Tasoaallon energiavuo saadaan ottamalla aikakeskiarvo periodin yli Poyntingin vektorista

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}\{(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}^*)\cdot\mathbf{r}}\}, \quad (4.8)$$

missä  $*$  tarkoittaa kompleksikonjugaattia. Tasoaallolle kolmas Maxwellin yhtälö (3.7) redusoituu algebralliseksi:  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ , jonka avulla voidaan magneettivuon tiheys  $\mathbf{B}$  eliminoida energiavuosta (4.8). Suure  $\mathbf{E}^* \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})$  on reaalinen, joten

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\omega\mu_0} \mathbf{E}^* \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \operatorname{Re}\{k e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}^*)\cdot\mathbf{r}}\}. \quad (4.9)$$

Nyt voidaan erottaa seuraavat tapaukset:

$k$  on reaalinen ( $\operatorname{Im}\{k\} = 0$ )  $\Rightarrow$  amplitudi = vakio;  $\langle \mathbf{S} \rangle =$  vakio: aalto etenee

$k$  imaginaarinen ( $\operatorname{Im}\{k\} > 0$ )  $\Rightarrow$  amplitudi pienenee;  $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ : aalto häipyä

$k$  kompleksinen ( $\operatorname{Im}\{k\} > 0$ )  $\Rightarrow$  amplitudi ja  $\langle \mathbf{S} \rangle$  pienenevät: aalto vaimenee.

Häipyvässä (evanescent) tapauksessa aalto ei voi edetä, mikä yleensä merkitsee aallon heijastumista. Vaimenevassa tapauksessa aallon energiaa absorboituu plasmaan.

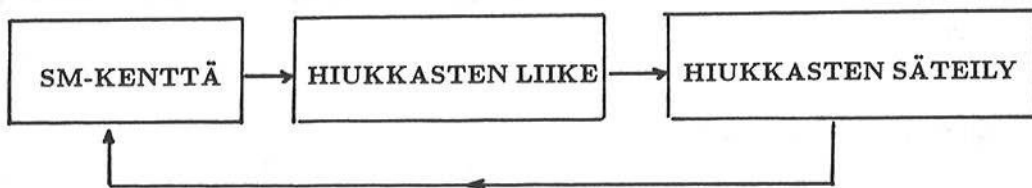
**E. Terminologiaa:** Aaltoa sanotaan mekaanisesti pitkittäiseksi, kun hiukkasten kollektiivinen liike tapahtuu aallon etenemissuunnassa  $\mathbf{k}$ . Jos hiukkasliike tapahtuu kohtisuorassa suunnassa aallon etenemissuuntaan  $\mathbf{k}$  nähden, aaltoa kutsutaan mekaanisesti poikittaiseksi.

Aalto on sähköisesti pitkittäinen, kun aallon värähtelevä sähkökenttä on  $\mathbf{k}$ :n suuntaan ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ). Tällöin tasoaaltotapauksessa kolmas Maxwellin yhtälö (3.7) antaa  $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega = 0$ , eli aaltoon ei liity lainkaan magneettista komponenttia. Siksi sähköisesti pitkittäistä aaltoa kutsutaan myös sähköstaattiseksi aalloksi. Sähköisesti poikittainen aalto on sähkömagneettinen, koska nyt aallon magneettinen komponentti on nollasta eroava ja kentille pätee  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ . Aalto voi olla myös sekamoodi, jolla on sekä pitkittäinen että poikittainen sähkökentän komponentti.

## 4.2 Itseiskonsistentti kenttä

Edellisen luvun lopussa käsiteltiin matalataajuisia aaltoja, joita voitiin kuvata magnetohydrodynaamisesti. Matalasta taajuudesta johtuen plasma pysyi paikallisesti neutraalina ts. elektronit ja ionit liikkuvat yhdessä ja aallot muistuttivat hydrodynaamisia aaltoja lisättynä johtavuuden ja magneettikentän tuomilla lisäpiirteillä. Suurilla taajuuksilla tilanne muuttuu ja elektronit kevyempinä voivat värähdellä kenttien mukana raskaiden ionien pysyessä lähes paikallaan.

Ajatellaan plasmaan synnytettyä sähkömagneettista (SM) aaltoa, joka saa hiukkaset värähtelemään, jolloin ne joutuvat kiihtyvään liikkeeseen. Varattujen hiukkasten liike ja säteily vaikuttavat SM-aaltoon, minkä seurauksena syntyy itseiskonsistentti (itseistyvä) kenttä. Tällä tarkoitetaan kenttää, joka saa hiukkaset värähtelemään siten, että hiukkasten säteilykenttä muodostaa kyseisen kentän. Käytännössä itseiskonsistentti kenttä määräytyy seuraavasti: Kentät  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  lii-



Kuva 4.2: *Itseiskonsistentti kenttä.*

keyhtälöissä määräävät varausten  $q$  liikkeen ja virran  $j$ . Nämä toimivat Maxwellin yhtälöissä lähteinä kentille  $E$  ja  $B$ , jotka merkitään samoiksi, mistä lähdettiin liikkeelle.

### 4.3 Approksimaatiot ja perusyhtälöt

Tarkasti kuvattuna plasman sähkömagneettinen kenttä muodostuu varattujen partikkelien mikrokooppisista kentän flukтуаatioista. Kenttä on kuitenkin tarkoituksenmukaista kuvata tasoitetulla eli efektiivisellä kentällä, jonka kaikki hiukkaset keskimäärin kokevat. Tasoitetun kentän käyttö on oikeutettua, jos Debye-pallossa on paljon hiukkasia ts.  $n\lambda_D^3 \gg 1$  ja tutkittavan aallon taajuus on paljon suurempi kuin hiukkasten välinen törmäystaajuus ( $\omega \gg \nu_c$ ).

Plasmaa pidetään kaksikomponenttisena "fluidina" (elektronit ja ionit), jonka kummallekin komponentille määritellään paikallisesti keskimääräinen hiukkastiheys  $n_e(\mathbf{r}, t)$  ja  $n_i(\mathbf{r}, t)$  sekä virtausnopeudet  $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t)$  ja  $\mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t)$ . Nämä ovat hyvin määriteltyjä, jos tarkasteltavan moodin aallonpituus on paljon suurempi kuin hiukkasten välinen keskimääräinen etäisyys ( $\lambda \gg n^{-1/3}$ ). Päinvastoin kuin magnetohydrodynamiikassa kaksikomponenttisuus sallii varausten erottumisen paikallisesti ja mahdollistaa siksi myös suurtaajuiset värähtelyt plasmassa.

Plasman kylmyydellä tarkoitetaan sitä, että hiukkasten termiset nopeudet ovat paljon pienempiä kuin plasmassa tapahtuviin kollektiivisiin ilmiöihin liittyvät nopeudet (esim. aallon vaihenopeus) ts.  $v_{th} = (k_B T/m)^{1/2} \ll v_{ph}$  ja plasman aiheuttamat painevaikutukset ovat heikkoja sähkömagneettisen Lorentzin voiman rinnalla:  $|\nabla p| \ll |qn(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})|$ . Tässä luvussa plasmaa pidetään homogeenisena eli aallonpituus on paljon pienempi kuin plasman epähomogeenisuusskaala.

Aalto oletetaan pieneksi häiriöksi ja jatkuvuus- ja liikeyhtälöt (3.1) (3.2) molemmille plasman komponenteille linearisoidaan. Maxwellin yhtälöt (3.5)–(3.8) ovat lineaarisia, joten ne voidaan ottaa käyttöön sellaisinaan. Lepotilassa plasma on varausneutraali ( $q_e n_{e0} + q_i n_{i0} = 0$ ) ja virtausnopeudet  $\mathbf{v}_{e0}$  ja  $\mathbf{v}_{i0}$  ovat nollia.

Ainoa vaikuttava kenttä lepotilassa on ulkoinen staattinen magneettikenttä  $\mathbf{B}_0$ . Aaltoon liittyvät suureet  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $Q$  oletetaan pieniksi häiriöiksi. Maxwellin yhtälöiden (3.5)–(3.8) lähdeterminit varaustiheys  $Q$  ja virtatiheys  $\mathbf{j}$  voidaan nyt kirjoittaa

$$Q(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=e,i} q_s n_s(\mathbf{r}, t) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=e,i} q_s n_s(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t), \quad (4.11)$$

missä alaindeksi  $s$  ilmaisee hiukkaslajin (elektronit, ionit). Jos hiukkastiheys sisältää tasapainoarvonsa  $n_{s0}$  lisäksi pienen häiriön, niin virtatiheyteen tulee lineaarisen termin  $q_s n_{s0} \mathbf{v}_s$  lisäksi myös epälineaarinen toisen kertaluvun termi, joka jätetään pois.

Linearisoidaan jatkuvuusyhtälö (3.1) ja liikeyhtälö (3.2) komponenteittain

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + n_{s0} \nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0). \quad (4.13)$$

Jatkuvuusyhtälöstä (4.12) ja määritelmistä (4.10) ja (4.11) nähdään välittömästi myös varauksen säilymlaki

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (4.14)$$

Kerrotaan linearisoitu liikeyhtälö (4.13) tekijällä  $q_s n_{s0}$ , jolloin se saadaan muotoon

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_{ps}^2 \mathbf{E} + \Omega_s \mathbf{j}_s \times \hat{\mathbf{b}}, \quad (4.15)$$

missä

$$\omega_{ps} = \sqrt{\frac{q_s^2 n_{s0}}{\epsilon_0 m_s}} \quad (4.16)$$

on  $s$ -komponentin plasmataajuus sekä

$$\Omega_s = \frac{q_s B_0}{m_s} \quad (4.17)$$

on  $s$ -komponentin gyrotaajuus (syklotronitaajuus) ja  $\hat{\mathbf{b}}$  on ulkoisen magneettikentän  $\mathbf{B}_0$  suuntainen yksikkövektori.

Valitaan häiriösuureille tasoaaltoyrite, jonka aika- ja paikkariippuvuus on tyypistä:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ , missä  $\mathbf{E}$  on tasoaallon amplitudi. Nyt osittaisdifferentiaaliyhtälöt muuttuvat algebralliseksi systeemiksi suureiden amplitudeille, koska eksponenttitekijä supistuu pois. Maxwellin (3.5)–(3.8) yhtälöt reduoituvat muotoon

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -\frac{iQ}{\epsilon_0} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.19)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\mu_0 \mathbf{j} - \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}. \quad (4.21)$$

Liiketyhtälöstä saadaan tasoaaltoyritteellä

$$-i\omega \mathbf{j}_s = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E} + \Omega_s \mathbf{j}_s \times \hat{\mathbf{b}}. \quad (4.22)$$

Varauksen säilymlaki (4.14) pelkistyy tasoaaltotapauksessa yhtälöksi  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \omega Q$ . Yhdistämällä tämä Maxwellin yhtälön (4.18) kanssa eliminoidaan varaustiheys  $Q$  pois

$$\mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \mathbf{j} \right) = 0. \quad (4.23)$$

## 4.4 Johtavuus- ja dielektrisyystensori

Plasman  $s$ -komponentin johtavuus kertoo minkälainen virta  $\mathbf{j}_s$  syntyy sähkökentässä  $\mathbf{E}$ . Liiketyhtälöstä (4.22) havaitaan, että se antaa suoraan käänteisen muodon, joka voidaan kirjoittaa tensorimuodossa  $\mathbf{E} = \sigma_s^{-1} \cdot \mathbf{j}$  (totea kirjoittamalla liiketyhtälö (4.22) komponenttimuodossa), missä

$$\sigma_s^{-1} = \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{ps}^2} \begin{pmatrix} -i\omega & -\Omega_s & 0 \\ \Omega_s & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

kun ulkoinen magneettikenttä  $\mathbf{B}_0$  on valittu  $z$ -akselin suuntaan ( $\hat{\mathbf{b}} \parallel \mathbf{z}$ ). Suoriteetaan matriisin kääntäminen, jolloin saadaan  $s$ -komponentin johtavuustensori

$$\sigma_s = i\epsilon_0 \omega \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2} \begin{pmatrix} 1 & i\Omega_s/\omega & 0 \\ -i\Omega_s/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Omega_s^2/\omega^2 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

joka antaa  $s$ -komponentin virran sähkökentässä, ts.  $\mathbf{j}_s = \sigma_s \cdot \mathbf{E}$ . Kokonaisvirta saadaan laskemalla plasmakomponenttien virrat yhteen

$$\mathbf{j} = \sum_{s=e,i} \mathbf{j}_s = \left( \sum_{s=e,i} \sigma_s \right) \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \sigma = \sum_{s=e,i} \sigma_s. \quad (4.26)$$

Edellä esitetystä tarkastelusta havaitaan, että plasman johtavuus on tensorisuure. Tämä on seurausta siitä, että ulkoisessa magneettikentässä oleva plasma ei ole isotrooppinen. Hiukkasten liike on vapaata magneettikentän suunnassa, mutta niiden liike on rajoitettua magneettikenttää vastaan kohtisuorassa tasossa. Siksi on ymmärrettävää, että sähkökentän synnyttämä virta muodostuu erilaiseksi riippuen sähkökentän suunnasta ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$  tai  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$ ). Jos asetetaan  $\mathbf{B}_0 = 0$  ( $\Omega_s = 0$ ), niin plasmasta tulee johtavuusmielessä isotrooppinen. Tällä rajalla  $s$ -komponentin liikeyhtälö (4.22) redusoituu hyvin yksinkertaiseksi

$$-i\omega \mathbf{j}_s = \omega_{ps}^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \sigma_s = i\epsilon_0 \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \mathbf{1} = \sigma_s \mathbf{1}, \quad (4.27)$$

missä  $\mathbf{1}$  on yksikkömatriisi. Nähdään siis, että magneettikentättömässä plasmassa johtavuustensori korvautuu skalaarijohtavuudella  $\sigma_s = i\epsilon_0 \omega_{ps}^2/\omega$  ja virta kulkee sähkökentän suuntaan.

Määritellään johtavuustensorin avulla plasman dielektrisyystensori  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \mathbf{1} + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \sigma, \quad (4.28)$$

joka kylmän plasman approksimaatiossa on muotoa

$$\epsilon = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

missä elementit  $S$ ,  $P$  ja  $D$  ovat

$$S = 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \Omega_s^2} \quad (4.30)$$

$$P = 1 - \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (4.31)$$

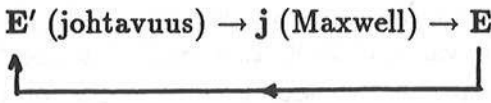
$$D = \sum_{s=e,i} \frac{\Omega_s \omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_s^2)}. \quad (4.32)$$

Dielektrisyyten tensorista (4.29) havaitaan seuraavat ominaisuudet:

- $\epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ji}$  eli  $\epsilon$  on hermiittinen, mikä merkitsee, että systeemi on häviötön (törmäykset jätetty huomiotta).
- $\epsilon_{ij}(-\mathbf{B}_0) = \epsilon_{ji}(\mathbf{B}_0)$  eli magneettikentän kääntäminen vastakkaiseen suuntaan muuttaa vain hiukkasen kiertosuuntaa.
- $P$ -elementti ei riipu lainkaan magneettikentästä. Tämä voidaan ymmärtää, koska magneettikenttä ei vaikuta partikkelin liikkeeseen kentän suunnassa.

## 4.5 Yleinen dispersiorelaatio

Edellä johdettiin yksinkertainen riippuvuus plasman makroskooppisen virran  $\mathbf{j}$  ja sähkökentän  $\mathbf{E}$  välillä. Haetaan itseiskonsistentti ratkaisu seuraavasti: kenttä  $\mathbf{E}'$  aiheuttaa virran  $\mathbf{j}$ , joka toimii Maxwellin yhtälöissä lähteenä kentälle  $\mathbf{E}$ , jonka tulee olla sama kuin kenttä  $\mathbf{E}'$ .



Matemaattisesti itseiskonsistentti ratkaisu löydetään sijoittamalla relaatio  $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$  Fourier-muunnettuihin Maxwellin yhtälöihin (4.18)–(4.21), jotka tulevat muotoon

$$\mathbf{k} \cdot (\epsilon \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (4.33)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.34)$$



$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}). \quad (4.36)$$

Ylläolevat yhtälöt paljastavat myös miksi dielektrisyystensorin  $\boldsymbol{\epsilon}$  käyttö johtavuustensorin  $\boldsymbol{\sigma}$  sijasta on perusteltua. Jos suoritetaan  $\mathbf{k}$ :n pistetulo kahden viimeisen yhtälön (4.35) ja (4.36) kanssa, havaitaan, että kaksi ensimmäistä yhtälöä (4.33) ja (4.34) toteutuvat identtisesti eikä niitä tarvita tasoaaltotapauksessa. Eliminoidaan seuraavaksi magneettivuon tiheys  $\mathbf{B}$  yhtälöistä (4.35) ja (4.36), jolloin

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (4.37)$$

Tämä voidaan lausua taitekertoimen  $n = kc/\omega$  avulla

$$[n^2(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} - 1) + \boldsymbol{\epsilon}] \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.38)$$

missä  $\hat{\mathbf{k}}$  on  $\mathbf{k}$ :n suuntainen yksikkövektori ja  $\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}$  on dyaditulo. Relatio (4.38) määrittää yhtälöryhmän sähkökentän komponenteille  $E_x$ ,  $E_y$  ja  $E_z$ , joille saadaan nollasta poikkeava ei-triviaali ratkaisu vain siinä tapauksessa, kun kerroinmatriisin determinantti häviää, eli

$$\det |n^2(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} - 1) + \boldsymbol{\epsilon}(\omega)| = 0. \quad (4.39)$$

Näin saatiin yleinen dispersiorelaatio, joka määrää aallon taajuden  $\omega$  ja aaltovektorin  $\mathbf{k}$  välisen yhteyden. Lisäksi voidaan ratkaista kentän  $\mathbf{E}$  polarisaatio ja vastaavat aallon magneettikentän  $\mathbf{B}$  komponentit yhtälön (4.35) kautta.

Yhtälön (4.39) yleisyydellä tarkoitetaan sitä, että dielektrisyystensorin ominaisuuksia ei huomioitu dispersiorelaatiota johdettaessa. Tästä syystä dielektrisyystensori  $\boldsymbol{\epsilon}$  voidaan erikseen määrittää kutakin tapausta varten, jonka jälkeen dispersiorelaatio saadaan yllä olevasta kaavasta (4.39). Esimerkiksi kineettisen teorian mukainen dielektrisyystensori on paljon yleisempi kuin edellä johdettu tensori (4.29) kylmän plasman tapaukselle, mutta dispersiorelaatio on yhtälön (4.39) mukainen.

Tässä luvussa käsitellään plasma-aaltoja kylmässä plasmassa, joten dispersiorelaatioon (4.39) sijoitetaan kylmän ja törmäyksettömän plasman dielektrisyystensori (4.29). Kylmyyshän merkitsi, että hiukkasten termiset nopeudet ovat mitättömiä plasman kollektiivisiin nopeuksiin verrattuna ja lisäksi plasman painevaikutukset ovat merkityksettömän pieniä. Törmäyksettömyydestä seuraa, että systeemissä ei ole lainkaan häviöitä. Tällöin dielektrisyystensori  $\boldsymbol{\epsilon}$  todettiin

hermiittiseksi, jolloin  $n^2$  on reaalinen ja siten taitekerroin  $n$  on joko reaalinen tai puhtaasti imaginaarinen. Näitä vastaavat tapaukset ovat etenevä aalto ja häipyvä aalto. Vaimenevaa ratkaisua ei saada lainkaan, koska häviöitä aiheuttavat törmäykset on unohdettu. Törmäysten ottaminen huomioon johtaa ei-hermiittiseen dielektrisyystensoriin ja vastaava taitekerroin  $n$  voi olla kompleksinen.

## 4.6 Törmäysten vaikutus

Todellisessa plasmassa hiukkaset kokevat keskinäisiä törmäyksiä. Puhtaasti varattujen hiukkasten systeemissä, jossa Coulombin voimat ovat vallitsevia, törmäykset eivät ole samalla tavoin hyvin määräteltäviä kuin neutraalien partikkelien systeemissä. Yksittäinen varattu partikkeli havaitsee muiden hiukkasten aiheuttamat sähkökentän flukтуаatiot, jotka sirottavat sitä. Näin esimerkiksi aaltoihin liittyvät kentät, jotka syntyvät kollektiivisesta järjestäytyneestä hiukkasten liikkeestä, sirottavat taustaplasman hiukkasia, jolloin energiaa siirtyy aallolta hiukkasten satunnaiseen liikkeeseen, joka näkyy plasman kuumenemisena.

Törmäysten ottaminen huomioon likimääräisesti tapahtuu lisäämällä kuhunkin plasmakomponentin liikeyhtälöön törmäyksiä kuvaava kitkatermi. Tarkastellaan staattisen sähkökentän  $\mathbf{E}$  alaista heikosti ionisoitunutta kaasua, jossa neutraaleja hiukkasia on paljon enemmän kuin varattuja partikkeleita. Oletetaan, että törmäyksen jälkeen varatun hiukkasen ( $q, m$ ) nopeuden suunta on täysin satunnainen, joten hiukkasen keskimääräinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on nolla. Tämän jälkeen hiukkanen kokee kentän aiheuttaman vakiokiihtyvyyden  $q\mathbf{E}/m$ . Siten törmäysten välillä hiukkanen kulkee matkan

$$\delta\mathbf{r} = \frac{q\mathbf{E}}{2m}\tau^2, \quad (4.40)$$

missä  $\tau$  on törmäysten välinen aika. Oletetaan aika  $\tau$  Poisson jakutuneeksi  $f(\tau) = \nu_c \exp(-\nu_c\tau)$ , missä  $\nu_c$  on keskimääräinen törmäystaajuus. Nyt saadaan törmäysten väliseksi keskimääräiseksi matkaksi

$$\langle\delta\mathbf{r}\rangle = \frac{q\mathbf{E}}{2m}\langle\tau^2\rangle = \frac{q\mathbf{E}}{m\nu_c^2}. \quad (4.41)$$

Pitkän ajan  $T$  ( $\gg \nu_c^{-1}$ ) kuluessa hiukkanen kokee keskimäärin  $\nu_c T$  törmäystä ja sen kulkema kokonaismatka on

$$\langle\Delta\mathbf{r}\rangle = \frac{q\mathbf{E}}{m\nu_c^2}\nu_c T, \quad (4.42)$$

josta saadaan hiukkasen keskimääräinen kulkeutumisnopeus

$$\mathbf{v} = \frac{\langle \Delta \mathbf{r} \rangle}{T} = \frac{q\mathbf{E}}{m\nu_c}. \quad (4.43)$$

Varattuun hiukkaseen, joka kiihdyttävässä sähkökentässä saa edellä kuvatun tasanaisen nopeuden, kohdistuu kitkavoima

$$\mathbf{F}_c = -m\nu_c \mathbf{v}, \quad (4.44)$$

joka on vastakkaiseen suuntaan kuin sähkökentän aiheuttama voima  $q\mathbf{E}$ . Samanmuotoista termiä voidaan käyttää kuvaamaan kentän flukтуаatioista johtuvien efektiivisten törmäysten kuvaamiseen, jolloin  $\nu_c$  pidetään tunnettuna fenomenologisena parametrina, joka ei riipu nopeudesta  $\mathbf{v}$ .

Tarkastellaan törmäysten vaikutusta likeyhtälöön (4.13) ja sijoitetaan siihen äsken saatu kitkatermi (4.44)

$$m_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0) - m_s \nu_s \mathbf{v}_s, \quad (4.45)$$

joka voidaan tasoaltotapauksessa kirjoittaa

$$-im_s(\omega + i\nu_s)\mathbf{v}_s = q_s\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0. \quad (4.46)$$

Ainoa muutos törmäyksettömään tapaukseen verrattuna tulee olemaan taajuuden  $\omega$  korvautuminen lausekkeella  $\omega + i\nu_s$ . Tällöin dielektrisyystensori

$$\epsilon = 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \sum_s \sigma_s(\omega + i\nu_s) \quad (4.47)$$

ei ole enää hermiittinen ja törmäysten vaikutuksesta aallot vaimenevat, koska amplitudiin tulee lisätekijä, joka on muotoa  $\sim \exp(-\nu_s t)$ . Tämän luvun aaltosovellutuksissa ei törmäyksiä oteta huomioon.

## 4.7 Aallot magneettikentättömässä plasmassa

Tarkastellaan ensimmäisenä sovellutuksena aaltoja kylmässä magneettikentättömässä plasmassa. Asetetaan ulkoinen magneettikenttä  $\mathbf{B}_0 = 0$ , joten myös  $\Omega_e = \Omega_i = 0$ . Tällöin dielektrisyystensorin (4.29) komponenteille  $S$ ,  $P$  ja  $D$  saadaan yksinkertaiset lausekkeet

$$P = S = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.48)$$

$$D = 0, \quad (4.49)$$

missä  $\omega_p = (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)^{1/2}$  on plasmataajuus. Koska ionisoituneessa kaasussa ionit ovat paljon raskaampia kuin elektronit, niin pätee melko tarkasti  $\omega_p \simeq \omega_{pe}$ . Esimerkiksi vetyplasmassa  $\omega_{pe} = 40.9 \omega_{pi}$ . Valitaan koordinaatisto, missä  $\hat{\mathbf{k}} \parallel \mathbf{z}$ , jolloin dyaditulo  $\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}$  on matriisi, jonka  $zz$ -elementti on 1 ja muut elementit nolli, koska  $k_x = k_y = 0$  ja  $k_z = 1$ . Koska  $D = 0$ , niin dispersioyhtälön (4.38) kerroinmatriisi tulee diagonaaliseksi

$$\begin{pmatrix} n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & n^2 - (1 - \omega_p^2/\omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \omega_p^2/\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0.$$

Merkitsemällä kerroinmatriisin determinantti nolaksi saadaan kaksi ratkaisua:

$$\omega^2 = \omega_p^2 \quad (\text{pitkittäiset plasmavärähtelyt})$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (\text{poikittaiset sähkömagneettiset aallot}).$$

Tarkastellaan saatuja dispersiorelaatioita lähemmin.

**A. Plasmavärähtelyt:** Pitkittäisten plasmavärähtelyiden eli Langmuir-aaltojen dispersiorelaatio on yksi-ionilajiselle ja yksinkertaisesti ionisoituneelle ( $Z = 1$ , missä  $Z$  ionien varausluku) plasmalle

$$\omega^2 = \omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right). \quad (4.50)$$

mikä pätee esimerkiksi vetyisotoopeista muodostuneille plasmalle. Dispersiorelaation (4.50) mukaan plasman värähtely tapahtuu vakiotajuudella  $\omega_p$  (plasmataajuus). Sitä vastoin aaltoluku  $k$  ja samalla myös vaihenopeus  $v_{ph} = \omega/k$  ovat mielivaltaisia. Lisäksi havaitaan, että plasmavärähtelyjen ryhmänopeus  $v_g = d\omega/dk = 0$ . Värähtelyt eivät siis etene vaan pysyvät alkuperäisen häiriön kohdalla. Ne voidaan tulkita plasman kollektiivisiksi ominaisvärähtelyiksi.

Matriisimuotoisesta dispersioyhtälöstä havaitaan, että sähkökentällä  $\mathbf{E}$  on vain  $z$ -akselin suuntainen komponentti  $E_z \neq 0$  eli kenttä värähtelee pitkittäissuunnassa ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$ ). Nyt yhtälön (4.20) mukaan  $\mathbf{B} = 0$ , joten aalto on puhtaasti sähköinen ja sitä kutsutaan sähköstaattiseksi värähtelyksi. Myös aallon Poyntingin vektori häviää ( $\mathbf{S} = 0$ ), joten aaltoon ei liity energian virtausta.

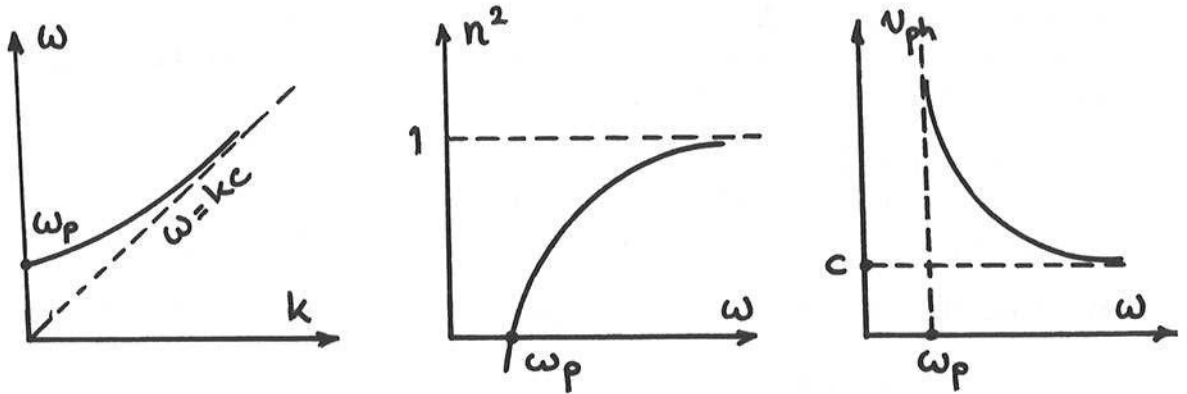
Pitkittäisten plasmavärähtelyjen valaisemiseksi tarkastellaan varausjakautuman häiriön käyttäytymistä suoraan perusyhtälöistä lähtien. Kirjoitetaan Poissonin yhtälö (3.5), varauksen säilymlaki (4.14) ja likeyhtälö (4.15) summattuna molemmille plasmakomponenteille

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (4.51)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}$$

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{k^2} + c^2}$$



Kuva 4.3: Poikittaisen SM-aallon dispersiorelaatio eri graafisissa esityksissä.

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}. \quad (4.53)$$

Derivoidaan varauksen säilymlaki ajan suhteen ja käytetään likeyhtälöä ja Poissonin yhtälöä virran ja sähkökentän eliminointiin:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\omega_p^2 \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\omega_p^2 Q \quad (4.54)$$

Näin saatiin yksinkertainen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö varausjakautuman häiriölle:  $\ddot{Q} + \omega_p^2 Q = 0$ , jonka ratkaisu on muotoa  $Q \sim \exp(-i\omega_p t)$  eli värähtelyt plasmataajuudella  $\omega_p$ . Varausjakautuman häiriö synnyttää sähköstaattisen vastavoiman, joka pyrkii palauttamaan tasapainon. Seurauksena on paikallaan pysyvä plasmavärähtely. Lämpötilan ottaminen huomioon johtaa lievään  $\omega$ :n riippuvuuteen aaltoluvusta  $k$ , jolloin  $v_g \neq 0$  ja häiriö etenee.

**B. Poikittaiset sähkömagneettiset aallot:** Dispersioyhtälön toinen ratkaisu antoi dispersiorelaation

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (4.55)$$

Nyt sähkökentän pitkittäinen komponentti häviää ( $E_z = 0$ ) ja aallon sähkövektori  $\mathbf{E}$  on  $xy$ -tasossa (yleisesti tasossa  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ). Samoin myös magneettivektori on poikittainen ( $\mathbf{B} \sim \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ ), joten  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ . Nyt myös Poyntingin vektorin keskiarvo (4.9) on nollasta poikkeava ( $S \neq 0$ ).

Dispersiorelaatiosta (4.55) nähdään tapaukset:

$$\omega^2 > \omega_p^2 \Rightarrow k^2 > 0 : \text{aalto etenee}$$

$$\omega^2 < \omega_p^2 \Rightarrow k^2 < 0 : \text{aalto häiptyy.}$$

Häipyvästä tapauksesta käytetään sanontaa, että plasma on ylitieheä kyseiselle aallolle. Plasmataajuus kasvaa plasman tiheyden mukana ( $\omega_p^2 \sim n_0$ ), joten tietyn taajuinen poikittainen aalto voi edetä vain tiheyteen, missä ( $\omega = \omega_p$ ). Etenevä tapaus ( $\omega > \omega_p$ ) selittyy sillä, että plasman elektronit, joiden ominainen värähtelytaajuus on  $\omega_p$ , eivät ehdi täysin värähdellä suurtaajuisten kentän mukana. Tästä syystä elektronit eivät oikosulje aallon kenttää ja aalto pääsee etenemään. Matalataajuisten aallon ( $\omega < \omega_p$ ) tapauksessa elektronit ehtivät hyvin reagoida värähtelevään kenttään ja varjostavat sen ylitieheässä alueessa.

Dispersiorelaatioiden havainnollistamiseksi ne esitetään usein graafisessa muodossa kuvan 4.3 mukaisesti, jossa on eri esitykset poikittaisten aaltojen dispersiorelaatiolle (4.55).

Tarkastellaan lopuksi poikittaisen aallon käyttäytymistä tyhjän ja plasman rajapinnalla, jossa taitekerroin muuttuu. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 4.4, jossa alaindeksi 0 viittaa tyhjään ja 1 plasmaan. Sijoitetaan Snellin lakiin

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 \quad (4.56)$$

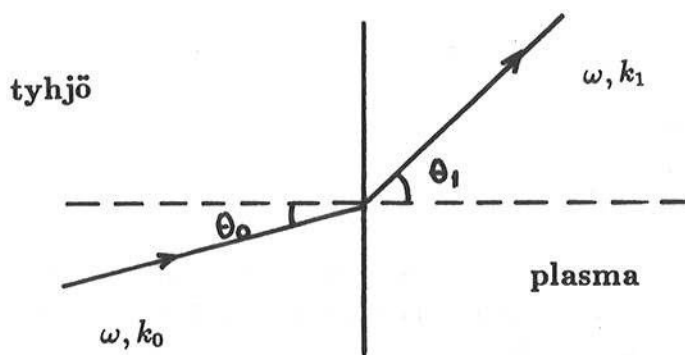
dispersiorelaatiosta (4.55) aaltoluvut:  $k_0^2 = \omega^2/c^2$  (tyhjä, jolloin  $\omega_p = 0$ ) ja  $k_1^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$  (plasma). Nyt Snellin laki saadaan muotoon

$$\sin^2 \theta_0 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \sin^2 \theta_1. \quad (4.57)$$

Tästä nähdään ehto:  $\sin^2 \theta_0 \leq 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , jotta aalto läpäisisi rajapinnan. Tapauksessa  $\omega < \omega_p$  tapahtuu aina kokonaisheijastus. Tämä on sopusoinnussa edellä todetun kanssa, jolloin saatiin häipyvä ratkaisu juuri tapaukselle  $\omega < \omega_p$ .

Ionosfäärissä plasman tiheys ja  $\omega_p$  kasvavat maasta lasketun etäisyyden mukana ja  $\omega_p$  saavuttaa maksimin noin 300 km korkeudessa. Kohtisuorassa tapauksessa ( $\theta_0 = 0$ ) tapahtuu heijastus korkeudella, missä  $\omega = \omega_p$ . Näin voidaan periaatteessa määrittää ionosfäärin plasman tiheysjakautuma aallon taajuutta varioimalla. Tarkemmassa tapauksessa on maan magneettikentän aiheuttamat vaikutukset aallon dispersioon otettava huomioon.

Ionosfäärin vaikutus on otettava huomioon myös radio- ja teleliikenteessä. Pitkien radioaaltojen kulmataajuus jää ionosfäärin maksimiplasmataajuutta pienemmäksi ( $\omega < \omega_p$ ), joten ne heijastuvat kerroksesta  $\omega = \omega_p$ . Tästä syystä



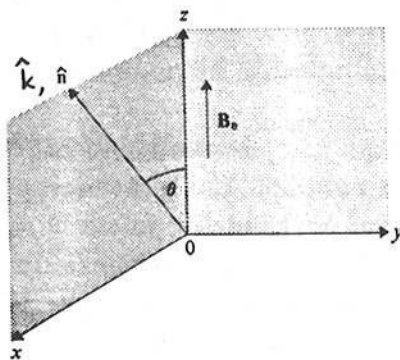
Kuva 4.4: Poikittainen sähkömagneettinen aalto tyhjön ja plasman rajapinnalla.

pitkillä aalloilla kuuluvuusaluetta ei rajoita maapallon kaarevuus. ULA-alueella kulmataajuudelle pätee  $\omega > \omega_p$ , mistä syystä ULA-aallot läpäisevät ionosfääriin. Siten ULA-aaltojen leviämistä rajoittaa maapallon kaarevuus ja toiminta vaatii linkkiverkoston. Radioliikenne avaruuteen vaatii luonnollisesti taajuusalueen, joka läpäisee ionosfääriin.

## 4.8 Kylmä magneettikentällinen plasma

Oletetaan seuraavaksi plasmaan ulkoinen magneettikenttä, jolloin tarvitaan kylmän plasman dielektrisyyssensorin täydellistä lauseketta (4.29). Kiinnitetään koordinaatisto kuvan 4.5 mukaisesti. Ulkoinen magneettikenttä valitaan  $z$ -suuntaan  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$  ja aaltovektori  $xz$ -tasoon. Aaltovektorin ja  $z$ -akselin välistä kulmaa merkitään  $\theta$ :lla. Aaltovektorin valinta  $xz$ -tasoon ei rajoita tarkastelun yleisyyttä, mutta yksinkertaistaa analyysiä huomattavasti, koska  $k_y = 0$ .

Nyt aallon etenemissuuntainen yksikkövektori on  $\hat{\mathbf{k}} = \sin \theta \mathbf{x} + \cos \theta \mathbf{z}$ , joten dyaditulolle voidaan kirjoittaa



Kuva 4.5: Koordinaatiston kiinnitys, jossa  $B_0$  valitaan  $z$ -akselin suuntaan ja aaltovektori  $xz$ -tasoon.

$$\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Sijoitetaan dielektrisyystensori (4.29) ja yllä saatu dyaditulo (4.58) yleiseen dispersioyhtälöön (4.38), jolloin se tulee muotoon

$$\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.59)$$

Tästä saatava determinanttiehto ( $\det = 0$ ) redusoituu yhtälöksi

$$An^4 - Bn^2 + C = 0, \quad (4.60)$$

missä kertoimet ovat

$$A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta \quad (4.61)$$

$$B = RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta) \quad (4.62)$$

$$C = PRL. \quad (4.63)$$

Näissä on käytetty notaatiota  $R = S + D$  ja  $L = S - D$ , joten suureiden välillä on relaatio  $RL = S^2 - D^2$ . Yhtälö (4.60) on toisen asteen yhtälö taitekertoimen neliölle, joka voidaan välittömästi kirjoittaa

$$n^2 = \frac{B \pm \sqrt{(RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta}}{2A}. \quad (4.64)$$

Erittäin käyttökelpoinen muoto dispersiorelaatiolle (4.60) saadaan ratkaisemalla etenemiskulma  $\theta$  taitekertoimen  $n$  funktiona

$$\tan^2 \theta = -\frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - LR)(n^2 - P)}. \quad (4.65)$$

Tämä muoto on erityisen hyödyllinen, kun tarkastellaan aaltoja, jotka etenevät ulkoisen magneettikentän suuntaan ( $\theta = 0$ ) tai sitä vastaan kohtisuoraan suuntaan ( $\theta = \pi/2$ ).



## 4.9 Alfvénin aallot

Tarkastellaan matalataajuusrajaa ( $\omega \ll \Omega_i, \omega_p$ ) ja oletetaan ionien varausluvulle  $Z = 1$ , joten plasman tiheydelle pätee:  $n_e = n_i = n_0$ . Tällä rajalla voidaan dielektrisyystensorin (4.29) elementeille kirjoittaa likipitään

$$S \simeq 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \quad (4.66)$$

$$P \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (4.67)$$

$$D \simeq -\frac{1}{\omega} \left( \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e} + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i} \right) = 0, \quad (4.68)$$

koska  $\omega_{pi}^2/\Omega_i = -\omega_{pe}^2/\Omega_e$  Sijoittamalla nämä dielektrisyystensoriin dispersiorelaatioissa (4.39) saadaan yhtälö

$$\begin{vmatrix} 1 + (\omega_{pi}/\Omega_i)^2 - n^2 \cos^2 \theta & 0 & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 1 + (\omega_{pi}/\Omega_i)^2 - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & -(\omega_{pe}/\omega)^2 - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Oikeassa alanurkassa oleva elementti on matalataajuusrajalla paljon suurempi kuin muut elementit (johtuen  $\omega_{pe}^2/\omega^2$ -termistä), joten determinantista saadaan kaksi juurta

$$n^2 \cos^2 \theta \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \quad (4.69)$$

$$n^2 \simeq 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \quad (4.70)$$

Taajuuksien suhteelle voidaan kirjoittaa

$$\frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} = \frac{c^2}{B_0^2/\mu_0\rho} = \frac{c^2}{v_A^2}, \quad (4.71)$$

missä  $v_A = (B_0^2/\mu_0\rho)^{1/2}$  on Alfvénin nopeus (3.52). Plasman tiheydelle yhtälössä (4.71) on oletettu  $\rho \simeq m_i n_0$ . Nyt juurista (4.69) ja (4.70) saadaan Alfvénin aaltojen dispersiorelaatiot

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{1 + v_A^2/c^2} \quad (4.72)$$

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}. \quad (4.73)$$

Saatua tulosta voidaan verrata matalataajuisiin MHD-aaltoihin, joita käsiteltiin kohdassa 3.6. Rajalla  $v_A \ll c$  dispersiorelaatio (4.72) on täsmälleen sama kuin MHD-teorian Alfvénin aalloille ja dispersiorelaatio (4.73) vastaa nopeaa magnetosonista aaltoa kylmän plasman tapauksessa ( $c_s = 0$ ), kun painetermi on unohdettu. Aaltoa (4.72) kutsutaan Alfvénin leikkausaalloksi (shear Alfvén wave) tai hitaaksi Alfvénin aalloksi ja moodia (4.73) Alfvénin puristusaalloksi (compressional Alfvén wave) tai nopeaksi Alfvénin aalloksi. Termit nopea ja hidas viittaavat vaihenopeuteen  $\omega/k$ . Dispersiorelaatioista (4.72) ja (4.73) havaitaan, että hidas ja nopea Alfvénin aalto yhtyvät kentän suuntaisessa tapauksessa ( $\theta = 0$ ) ja hidas aalto häviää kenttää vastaan kohtisuorassa suunnassa.

Kentän suuntaan ( $\cos \theta = 1$ ) etenevä Alfvénin aalto on sähköisesti poikittainen ( $E_z = 0$ ), joka voidaan todeta sijoittamalla dispersiorelaatiot dispersioyhtälöön (4.38). Aalto on myös mekaanisesti poikittainen, sillä plasman liike tapahtuu suunnissa  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$ , jotka ovat  $xy$ -tasossa. Kohtisuoraan magneettikenttää vastaan ( $\theta = \pi/2$ ) etenevä Alfvénin puristusaalto on niinkään sähköisesti poikittainen ( $E_x = E_z = 0$ ,  $E_y \neq 0$ ). Plasman liike tapahtuu kuitenkin  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0$ -suunnassa, joka on sama kuin aallon etenemissuunta  $x$ . Alfvénin puristusaalto on siten mekaanisesti pitkittäinen. Aalto on saanut nimensä plasman puristumisesta ja harventumisesta pitkittäissuunnassa, joka muistuttaa ääniaaltoa ilmassa. Jos plasman paine otetaan huomioon, saadaan kohdassa 3.6 käsitelty magnetosoninen aalto, joka nimi myös viittaa tavalliseen ääniaaltoon.

## 4.10 Suuntiin $\theta = 0, \pi/2$ etenevät aallot

Edellä saatiin yleiselle dispersiorelaatiolle muoto (4.65), joka on käyttökelpoisin tarkasteltaessa aaltoja, jotka etenevät kentän suuntaan tai sitä vastaan kohtisuoraan suuntaan. Aaltojen polarisaatio selviää matriisimuotoisesta dispersioyhtälöstä (4.59), jolle voidaan kirjoittaa tapauksessa  $\theta = 0, \pi/2$

$$\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & 0 \\ iD & S - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.74)$$

missä sini ja kosini saavat vain arvoja 1 tai 0. Tästä syystä nurkkaelementit  $n^2 \sin \theta \cos \theta$  häviävät kummassakin tapauksessa.

**A. Kentän suuntainen tapaus:** Kentän suuntaan eteneville aalloille ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ ) saadaan dispersiorelaatiosta (4.65) asettamalla kulma  $\theta = 0$  kolme tapausa

$$P = 0; \quad n^2 = R; \quad n^2 = L. \quad (4.75)$$

Nämä havaitaan heti myös yhtälön (4.74) determinanttiehdosta. (i) Tapaukselle  $P = 0$  nähdään dispersioyhtälöstä (4.59), että vain komponentti  $E_z \neq 0$  eli saadaan puhtaasti pitkittäinen moodi ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ). Dispersiorelaatio  $P = 0$  on yksinkertaisesti  $\omega = \omega_p$ , joten saatiin pitkittäiset plasmavärähtelyt vastaten magneettikentätöntä tapausa ( $\mathbf{B}_0 = 0$ ). Tulos on luonnollinen, koska sähkökentän ollessa magneettikentän suuntaan on myös hiukkasten liike samaan suuntaan. Tällöin magneettikenttä ei vaikuta hiukkasten liikkeeseen  $\mathbf{B}_0$ :n suunnassa.

(ii) Tapauksessa  $n^2 = R, L$  on komponentti  $E_z = 0$  ja kyseessä ovat poikittaiset aallot. Polarisaatiolle  $xy$ -tasossa nähdään matriisimuotoisen dispersioyhtälön (4.74) toiselta riviltä

$$\frac{iE_x}{E_y} = \frac{n^2 - S}{D} \quad (4.76)$$

Sijoittamalla  $n^2 = R, L$  ja toteamalla, että  $R = S + D$  ja  $L = S - D$  saadaan tapaukset

$$n^2 = R \Rightarrow iE_x = E_y \quad (\text{oikeakätinen ympyräpolarisaatio})$$

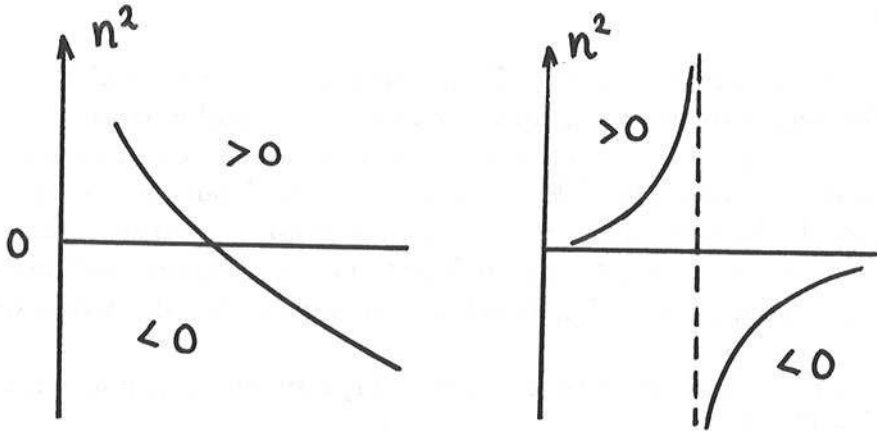
$$n^2 = L \Rightarrow iE_x = -E_y \quad (\text{vasenkätinen ympyräpolarisaatio})$$

Tasopolarisoitunut aalto voidaan esittää summana kahdesta ympyräpolarisoituneesta aallosta, joiden sähkövektorit pyörivät vastakkaisiin suuntiin. Näitä kutsutaan usein RCP (right circular polarization) ja LCP (left circular polarization) aalloiksi tai lyhyemmin R- ja L-aalloiksi. Siten käytännössä tasopolarisoitunut sähkömagneettinen aalto, joka tunkeutuu plasmaan jakaantuu kahdeksi vastakkaisiin suuntiin ympyräpolarisoituneiksi aalloiksi, joilla on erilaiset dispersiorelaatiot ( $n^2 = R, L$ ).

**B. Kenttää vastaan kohtisuora tapaus:** Aalloille, jotka etenevät magneettikenttää vastaan kohtisuoraan suuntaan ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ ) saadaan dispersiorelaatiosta (4.65) tai (4.74):sta asettamalla  $\theta = \pi/2$

$$n^2 = P; \quad n^2 = \frac{RL}{S}. \quad (4.77)$$

(iii) Tapauksessa  $n^2 = P$  saadaan  $E_z \neq 0$ , joten  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$  eli aalto on poikittainen. Dispersiorelaatio on  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$  on täsmälleen sama kuin magneettikentättömässä tapauksessa. Koska nytkin sähkökenttä ja hiukkasten liike on



Kuva 4.6: Taitekertoimen  $n$  käyttäytyminen katkaisu- ja resonanssipisteissä.

magneettikentän suuntaan, ei se vaikuta hiukkasten liikkeeseen, kuten oli edellä tapauksessa (i). Tätä magneettikentästä riippumatonta moodia kutsutaan ordinaariaalloksi (O-aalto).

(iv) Tapauksessa  $n^2 = RL/S$  aalto on yleisesti elliptisesti polarisoitunut sähkövektorin  $\mathbf{E}$  ollessa  $xy$ -tasossa ja  $E_z = 0$ . Polarisaatiolle saadaan dispersioyhtälöstä (4.74)

$$\frac{iE_x}{E_y} = -\frac{D}{S}. \quad (4.78)$$

Koska aalto etenee  $xy$ -tasossa, se ei ole puhtaasti pitkittäinen eikä poikittainen vaan sekamoodi. Tätä aaltoa kutsutaan ekstraordinaariaalloksi (X-aalto) ja sen dispersiorelaatio riippuu ulkoisesta magneettikentästä päinvastoin kuin ordinaariaallon tapauksessa.

## 4.11 Resonanssit ja katkaisut

Aiemmat tarkastelut ovat osoittaneet, että häviöttömässä systeemissä aalto on joko etenevä ( $n^2 > 0$ ) tai häipyvä ( $n^2 < 0$ ). Kun aalto etenee hitaasti muuttuvassa plasmassa ja se kohtaa alueen  $n^2 < 0$ , jossa ratkaisu tulee häipyväksi, niin voitaisiin ajatella aallon heijastuvan kyseisen alueen rajapinnalta. Näin ei kuitenkaan aina tapahdu, vaan aallon todellinen käyttäytyminen riippuu siitä, miten taitekertoimen neliö muuttuu negatiiviseksi. Kaksi mahdollisuutta on havainnollistettu kuvassa 4.6. Taitekerroin  $n^2$  on jatkuvasti pienenevä funktio ja lävistää lopulta  $n^2 = 0$  akselin tai taitekertoimella on jossakin pisteessä singulariteetti ( $n^2 \rightarrow \infty$ ) ja tämän jälkeen  $n^2 < 0$ . Näille tapauksille käytetään nimityksiä

$$n^2 = 0 \quad \text{katkaisu (heijastus)}$$

$$n^2 = \infty \quad \text{resonanssi}$$

Katkaisupisteessä (cut-off) aallon vaihenopeus  $v_{ph} = \omega/k$  menee äärettömäksi ja aalto todella heijastuu. Resonanssipisteessä puolestaan aallon vaihenopeus lähestyy nollaa ( $v_{ph} \rightarrow 0$ ). Kylmän plasman approksimaatiossa on hiukkasten termien nopeus  $v_{th}$  on unohdettu. Siksi ei voida sanoa, mitä aallolle todella tapahtuu resonanssissa, koska siinä ei päde  $v_{ph} \gg v_{th}$ . Yleensä resonanssissa aalto kokee voimakkaan absorption kineettisistä efekteistä johtuen. Toinen mahdollisuus on nk. moodikonversio, jolloin aalto muuttuu resonanssissa toiseksi moodiksi.

Katkaisut ja resonanssit löydetään helposti dispersiorelaation muodosta (4.60):  $An^4 - Bn^2 + C = 0$ .

Katkaisu ( $n^2 = 0$ )  $\Rightarrow C = 0$  eli  $P = 0$ ;  $R = 0$ ;  $L = 0$

Resonanssi ( $n^2 = \infty$ )  $\Rightarrow A = 0$  eli  $\tan^2 \theta = -P/S$ .

Katkaisut eivät riipu lainkaan aallon etenemissuunnasta  $\theta$ , mutta resonansseilla on  $\theta$ -riippuvuus. Suuntien  $\theta = 0, \pi/2$  resonansseja kutsutaan pääresonansseiksi (principal resonance).

Suunnassa  $\theta = 0$  saadaan resonanssit  $S = (R + L)/2 \rightarrow \infty$  eli

$L \rightarrow \infty$ , kun  $\omega = |\Omega_i|$  (ionisyklotroniresonanssi)

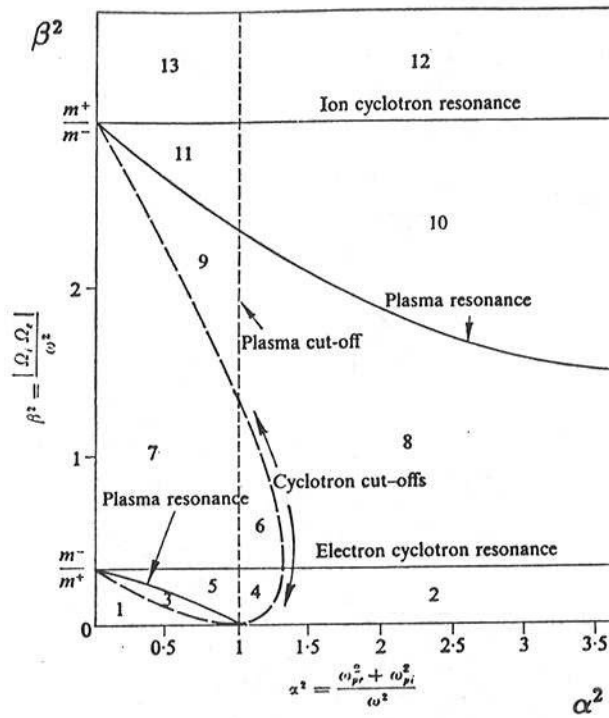
$R \rightarrow \infty$ , kun  $\omega = |\Omega_e|$  (elektronisyklotroniresonanssi)

Myös  $P = 0$  voi antaa resonanssin, jonka olemassaolo kuitenkin riippuu miten rajat  $\theta, P \rightarrow 0$  otetaan. Syklotroniresonanssissa aallon sähkövektori pyörii hiukkasten (elektronit tai ionit) kanssa täsmälleen samalla taajuudella ja samaan suuntaan, joten aallon suuntaan lähellä vaihenopeutta kulkevat hiukkaset kokevat vakiosähkökentän, joka kiihdyttää hiukkasia  $v_{\perp}$ -suunnassa. Absorption voimakkuuden määrää resonanssissa olevien hiukkasten lukumäärä, joten tarkempi analyysi edellyttää kineettistä teoriaa.

Suunnassa  $\theta = \pi/2$  löydetään resonanssit kohdasta  $S = 0$ , joita kutsutaan hybridiresonansseiksi. Niitä on kaksi: matalataajuinen alahybridiresonanssi ( $\omega < |\Omega_e|$ ) ja korkeataajuinen ylähybridiresonanssi ( $\omega > |\Omega_e|$ ).

## 4.12 CMA-diagrammi

Kylmässä plasmassa esiintyvien aaltojen yleisten ominaisuuksien kartoitusta helpottaa nk. CMA-diagrammi, joka on saanut nimensä tekijöidensä Clemmow, Mulaly ja Allis mukaan. Aaltoja tarkastellaan parametritasossa  $(\alpha^2, \beta^2)$ , missä akselit on määritelty seuraavasti:



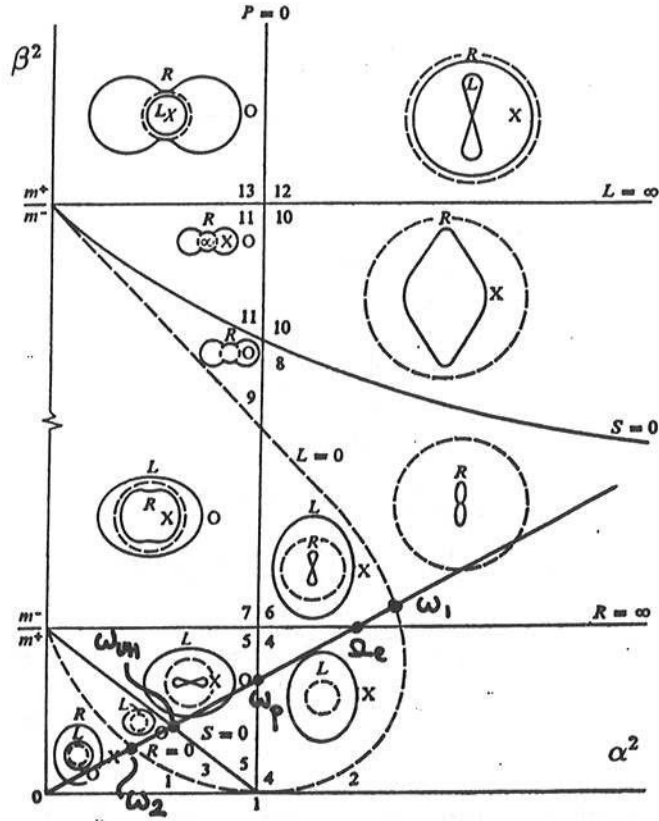
Kuva 4.7: Katkaisut ja resonanssit parametritasossa  $(n, B, \omega)$ , joka jakaantuu kolmeentoista alueeseen.

$$\alpha^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \beta^2 = \frac{|\Omega_e \Omega_i|}{\omega^2}. \quad (4.79)$$

Siten  $\alpha$  kasvaa tiheyden ja  $\beta$  magneettikentän mukana sekä molemmat pienevät aallon taajuuden kasvaessa. Edellisessä kohdassa määrättyt katkaisut ja pääresonanssit jakavat parametritason kaikkiaan kolmeentoista alueeseen (kuva 4.7). Kussakin alueessa olemassa olevien aaltojen aallonnormaalipintojen topologia säilyy ja aallonnormaalipinnat voivat muuntaa luonnettaan vain siirryttäessä katkaisun tai resonanssin läpi alueesta toiseen.

Jos ajatellaan parametritasossa  $(\alpha^2, \beta^2)$  suoraa  $\beta^2 = K\alpha^2$ , niin plasman olosuhteet tiheys  $n_0$  ja magneettikenttä  $B_0$  määräävät kyseisen suoran kulmakertoimen:  $K = |\Omega_e \Omega_i| / \omega_p^2$ . Muuttamalla aallon taajuutta kuljetaan pitkin suoraa siten, että taajuuden kasvaessa lähestytään origoa. Tällä tavoin voidaan määrittää, missä järjestyksessä eri resonanssit ja katkaisut ovat taajuuden suhteen. Pystyakselille  $\beta^2$  on merkitty ioni-elektroni ja elektroni-ioni massasuhteet, joten skaala on vahvasti logaritminen.

Kuvassa 4.8 on esitetty CMA-diagrammi ja eri alueissa olevat mahdolliset aaltomoodit (R- ja L-aallot sekä O- ja X-aallot) sekä niiden aallonnormaalipinnat. Katkoviivaympyrät esittävät valonnopeuspintaa ts. katkoviivapinnan ulkopuolella olevien aaltojen vaihenopeus ylittää valonnopeuden ja sisäpuolella vaihenopeus jää valonnopeutta pienemmäksi. Kuvaan on piirretty myös esimerkkisuora, johon palataan Appleton-Hartreen dispersiorelaation yhteydessä. Huomaa, että alueessa 2 ei löydy lainkaan aaltoja.



Kuva 4.8: Kylmän plasman CMA-diagrammi ja eri alueiden aallonnormaalipinnat. Katkoviivalla piirretyt ympyrät vastaavat valonnopeuspintoja.

### 4.13 Appleton-Hartreen dispersiorelaatio

Tarkastellaan seuraavassa yksityiskohtaisemmin suurtaajuusaluetta ( $\omega \gg \Omega_i$ ). Käytetään notaatiota, joka muistuttaa CMA-diagrammin parametritasoa

$$\alpha = \frac{\omega_{pe}}{\omega}; \quad \beta = \frac{|\Omega_e|}{\omega}, \quad (4.80)$$

missä on käytetty vain elektroneihin liittyviä suureita. Nyt voidaan dielektrisyystensorin (4.29) elementit kirjoittaa edellä (4.80):ssa määriteltyjen  $\alpha$ :n ja  $\beta$ :n avulla, kun ionitermit voidaan suurtaajuusrajalta unohtaa

$$S \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{1 - \beta^2} \quad (4.81)$$

$$D \simeq -\frac{\alpha^2 \beta}{1 - \beta^2} \quad (4.82)$$

$$P \simeq 1 - \alpha^2. \quad (4.83)$$

Nyt voidaan myös  $R$  ja  $L$  kirjoittaa

$$R = S + D \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{1 - \beta} \quad (4.84)$$

$$L = S - D \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{1 + \beta}. \quad (4.85)$$

Järjestelemällä termejä voidaan alkuperäinen  $n^2$ :n determinanttiyhtälö (4.60) kirjoittaa seuraavasti:

$$n^2 = \frac{An^2 - C}{An^2 + A - B}. \quad (4.86)$$

Sijoitetaan tämän oikealle puolen  $n^2$ :n ratkaisu yhtälöstä (4.60)

$$n^2 = 1 - \frac{2(A - B + C)}{2A - B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}} \quad (4.87)$$

ja sijoitetaan tähän juuri saadut approksimatiiviset lausekkeet (4.81)–(4.85), jolloin päästään muotoon

$$n^2 = 1 - \frac{2\alpha^2(1 - \alpha^2)}{2(1 - \alpha^2) - \beta^2 \sin^2 \theta \pm \Gamma}, \quad (4.88)$$

missä

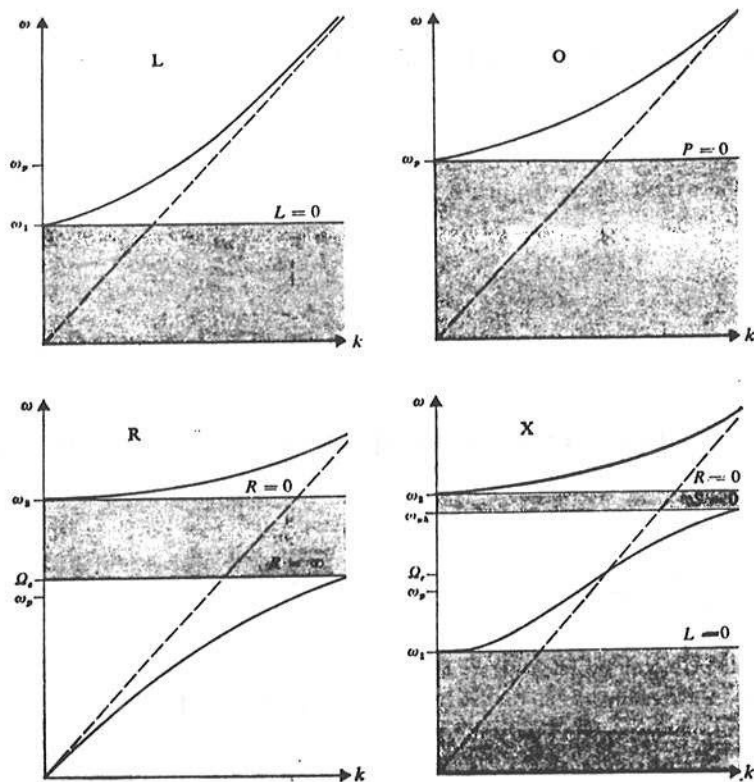
$$\Gamma = \sqrt{\beta^4 \sin^4 \theta + 4\beta^2(1 - \alpha^2)^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.89)$$

Saatu yhtälö (4.88) tunnetaan nimellä Appleton-Hartreen dispersiorelaatio, joka johdettiin alunperin tutkittaessa radiotaajuusaaltojen etenemistä ionosfäärissä. Appleton-Hartreen dispersiorelaatio on voimassa vain suurtaajuusalueella eli alueet 1–5 ja usein myös alueilla 6–8, mutta ei enää alueissa 9–13.

Dispersiorelaatio (4.88) johtaa yksinkertaisiin tuloksiin vain jos jompikumpi  $\Gamma$ :ssa esiintyvistä termeistä on dominoiva. Kun aallot etenevät lähes ulkoisen magneettikentän suuntaisesti ( $\theta$  pieni), jolloin  $\Gamma$ :n kosinitermi on hallitseva, saadaan vasen- ( $L$ ) ja oikeakätisesti ( $R$ ) polarisoituneet aallot

$$n_{L,R}^2 \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{1 \pm \beta \cos \theta}. \quad (4.90)$$





Kuva 4.9: Appleton-Hartreen dispersiorelaatiot magneettikentän suuntaisille (R,L) ja kohtisuoraan (O,X) eteneville aalloille. Tummennetuissa alueissa kyseinen aalto ei voi edetä (häipyy).

Likipitään kohtisuoraan suuntaan eteneville aalloille pätee  $\theta \rightarrow \pi/2$ , jolloin kosinitermi on pieni  $\Gamma$ :n lausekkeessa. Tällöin saadaan ordinaariaallolle (+ merkki)

$$n_O^2 = \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 \cos^2 \theta} \quad (4.91)$$

ja vastaavasti ekstraordinaariaallolle (- merkki)

$$n_X^2 = \frac{(1 - \alpha^2)^2 - \beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \alpha^2) - \beta^2 \sin^2 \theta} \quad (4.92)$$

Kuvassa 4.9 on graafinen esitys yllä saaduista suurtaajuusalueen ( $\omega \gg \Omega_i$ ) dispersiorelaatioista R-,L-,O- ja X-aalloille suunnissa  $\theta = 0, \pi/2$ . Kuvassa näkyvät katkaisutaajuudet  $\omega_{1,2}$  ja  $\omega_{pe}$  saadaan heti ehdoista  $R = 0$ ,  $L = 0$  ja  $P = 0$  vastaten taitekertoimen arvoa  $n = 0$ , kuten kohdassa 4.11 todettiin. Katkaisuille  $\omega_{1,2}$  saadaan

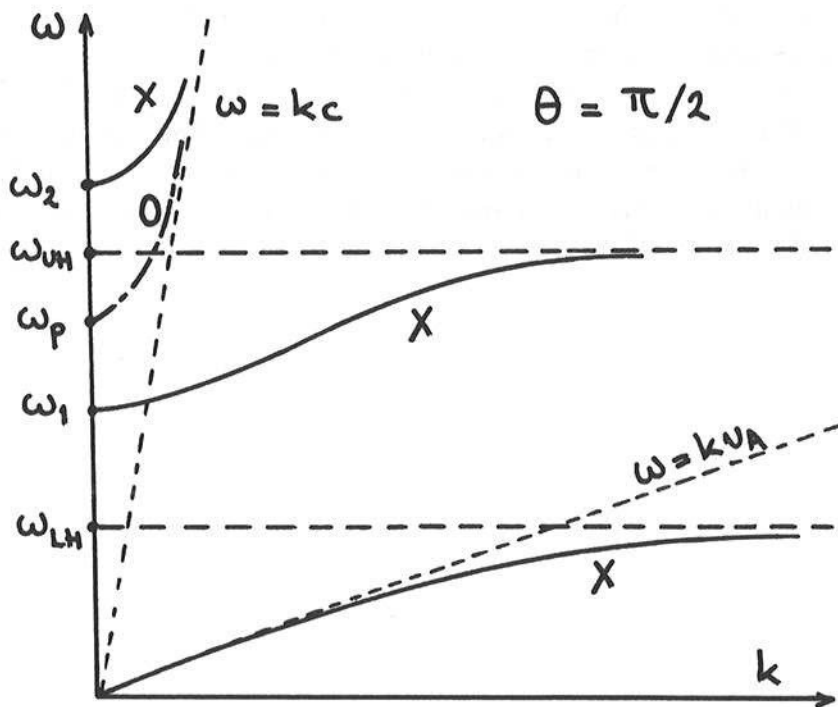
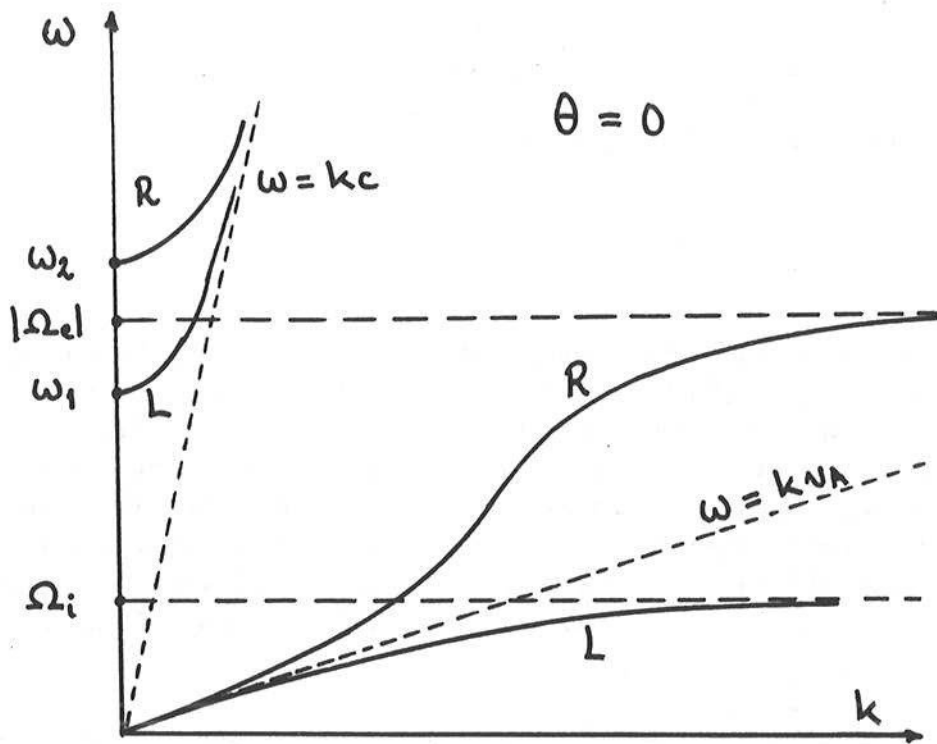
$$\omega_{2,1} = \frac{1}{2}(\sqrt{4\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2} \pm |\Omega_e|) \quad (4.93)$$

Resonanssiehdoksi (kts. kohta 4.11) saadaan kentän suuntaan etenevälle aalloille  $R = \infty$  vastaten elektronisyklotroniresonanssia ja kohtisuorassa suunnassa löytyy ylähybridiresonanssi  $S = 0$ , jolle saadaan

$$\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2}. \quad (4.94)$$

Kuvassa 4.9 olevien resonanssien ja katkaisujen välinen järjestys on tapauksille, joille pätee  $\omega_{pe} < \sqrt{2}|\Omega_e|$ , jolloin  $\omega_1 < |\Omega_e|$ . Tätä vastaava suora on piirretty CMA-diagrammiin (kuva 4.8), josta voidaan käydä läpi eri alueissa olevat aaltotyypit. Kuljettaessa suoraa pitkin kohti origoa alueesta 8 läpi alueiden 6,4,5,3 ja 1 lähestytään suurempia taajuuksia. Tulokset ovat täsmälleen yhtäpitävät kuvassa 4.9 esitettyjen ratkaisujen kanssa. Jokaisesta alueesta löytyy ratkaisut, koska suora ei kulje alueen 2 kautta. Sitä vastoin tapauksessa  $\omega_{pe} > \sqrt{2}|\Omega_e|$ , jolloin  $\omega_1 > |\Omega_e|$ , ei  $|\Omega_e|$ :n ja  $\omega_1$ :n ei löytyisi lainkaan aaltoja (CMA-diagrammin alue 2).

Yhteenveto aalloista kylmässä plasmassa koko taajuusalueella on esitetty kuvassa 4.10. Kuvassa on esitetty dispersiorelaatiot  $(\omega, k)$ -tasossa eri aaltotyypeille. Magneettikentän suuntaan etenevä oikeakätisesti ympyräpolarisoitunut aalto (R) lähtee Alfvénin aaltona ja kokee resonanssin elektronisyklotronitaajuuksella  $|\Omega_e|$ . Suurtaajuinen haara lähestyy tyhjän dispersiorelaatiota  $\omega = kc$  taajuuden kasvaessa. Vasenkätinen aalto (L) kokee ionisyklotroniresonanssin  $|\Omega_i|$  ja suurtaajuushaara alkaa alemmasta katkaisutaajuuksista  $\omega_1$ . Magneettikenttää vastaan kohtisuoraan etenevä ekstraordinaarinen aalto (X) lähtee matalilla taajuuksilla kompressionaalisena Alfvénin aaltona ja kokee molemmat hybridiresonanssit  $\omega_{LH}$  ja  $\omega_{UH}$ . Ordinaarimoodi (O) lähtee plasmataajuuksista  $\omega_p$  ja lähestyy tyhjän dispersiorelaatiota.



Kuva 4.10: Dispersiorelaatiot kylmän plasman aalloille: oikeakätinen aalto (R), vasenkätinen aalto (L), ekstraordinaarinen aalto (X) ja ordinaarinen aalto (O).

## Luku 5

# Plasman kineettinen teoria

Edellisessä luvussa tarkasteltiin aaltoja kylmässä plasmassa, jolloin oletettiin aaltojen vaihenopeuksien olevat paljon suurempia kuin plasman hiukkasten termiset nopeudet. Kun plasmassa olevan aallon vaihenopeudelle ei enää päde  $v_{ph} \gg v_{th} = (k_B T/m)^{1/2}$ , ei systeemiä voi kuvata pelkästään keskimääräisillä virtausnopeuksilla, vaan partikkelien terminen liike ja nopeusjakautuman yksityiskohdat on jollakin tavoin otettava huomioon. Plasma on tällöin kyseisen ilmiön kannalta kuumaa. Tarkastelun pohjana on tilastollinen kuvaus ja saatavaa teoriaa kutsutaan plasman kineettiseksi teoriaksi. Törmäyksettömän kineettisen teorian perusyhtälö on Vlasovin yhtälö, jonka lisäksi tarvitaan tietysti Maxwellin yhtälöitä.

### 5.1 Hiukkasjakautumafunktio

Tarkastellaan hiukkasjoukkoa kuusidimensioisessa faasiavaruudessa  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  ja määritellään plasmalle yksihiukkasjakautumafunktio  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  seuraavasti:

- Lauseke  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v$  ilmoittaa hetkellä  $t$  faasiavaruuden tilavuuselementissä  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}+d\mathbf{r}; \mathbf{v}, \mathbf{v}+d\mathbf{v})$  olevien hiukkasten lukumäärän.

Monikomponenttisessa plasmassa (elektronit ja liikkuvat ionit) jakautumafunktioon  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  liitetään laji-indeksi  $s = e, i$ . Tässä luvussa rajoitumme pääosin elektroniplasmaan, jossa ionit oletetaan äärettömän raskaiksi muodostaen staattisen positiivisen taustavarauksen. Notation keventämiseksi jätetään elektroneihin liittyvä alaindeksi "e" pois jakautumafunktiosta ja perussuureista  $q, m, jne.$  Poikkeuksena on ioniakustista aaltoa käsittelevä kohta, jossa sekä elektronien että ionien dynamiikka on huomioitava.

Kun jakautumafunktio  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  tunnetaan, saadaan tavalliset makroskooppiset suureet jakautumafunktion nopeusmomentteina. Nyt voidaan kirjoittaa plasman hiukkastiheydelle  $n$ , virtausnopeudelle  $\mathbf{u}$ , painetensorille  $p_{i,j}$  ja kineettiselle lämpötilalle  $T$

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (5.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \int m(v_i - u_i)(v_j - u_j) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \\ &= m \int v_i v_j f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v - m n u_i u_j \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$T = \frac{m}{3nk_B} \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v = \frac{1}{3nk_B} \sum_i p_{ii} \quad (5.4)$$

missä  $i, j = x, y, z$ .

## 5.2 Vlasov-Maxwellin yhtälöt

Ajatellaan faasiavaruuden tilavuuselementissä  $d^3r d^3v$  (piste A) olevia hiukkasia, joilla kaikilla on sama paikka  $\mathbf{r}$  ja nopeus  $\mathbf{v}$ . Hiukkasten tiheys faasiavaruuden kyseisessä pisteessä on tällöin  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Jos systeemissä ei ole hiukkasten välisiä törmäyksiä, jotka sirottisivat niitä faasiavaruudessa, niin ajan  $t$  kuluttua kaikki pisteessä A olleet hiukkaset ovat siirtyneet täsmälleen toiseen faasiavaruuden pisteeseen B. Tämä on seurausta siitä, että pisteessä A olleet hiukkaset ovat siirtyneet paikassa yhtä paljon, koska niiden nopeudeus on sama. Myös nopeus muuttuu yhtä paljon hiukkaseen vaikuttavien voimien ansiosta, koska voimatkin ovat samat kaikille pisteen A partikkeleille (ts. vaikuttavat voimat riippuvat vain paikasta ja nopeudesta eli sijainnista faasiavaruudessa). Tämä hiukkasten häviämättömyyden laki voidaan kirjoittaa hiukkasjakautumafunktiolle käyttäen analogiaa massan säilymiselle virtauksessa (esim. jatkuvuusyhtälö)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\dot{\mathbf{r}} f) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\dot{\mathbf{v}} f) = 0, \quad (5.5)$$

missä  $\nabla_{\mathbf{v}}$  on nopeusavaruuden gradienttioperaattori ( $\partial/\partial v_x, \partial/\partial v_y, \partial/\partial v_z$ ). Kaksi ensimmäistä termiä yhtälössä (5.5) edustaa tavallista jatkuvuusyhtälöä paikkaavaruudessa ja kolmas termi on luonnollinen faasiavaruudessa, jossa nopeusulottuvuus on myös mukana.

Kiihtyvyydelle saadaan  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m = (q/m)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  Lorentzin voiman tapauksessa. Ainoa nopeudesta riippuva termi Lorentzin voimassa on ristitulo, jonka nopeusderivaatalle saadaan  $\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ , koska magneettikenttä ei riipu nopeudesta ja  $\nabla_{\mathbf{v}} \times \mathbf{v} = 0$ . Nyt voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (5.6)$$

mikä tunnetaan nimellä Vlasovin yhtälö tai törmäyksetön Boltzmannin yhtälö. Vlasovin yhtälö saadaan myös suoraan asettamalla jakautumafunktion kokonaisaikaderivaatta nolaksi

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (5.7)$$

missä  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  ja  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$ . Vlasovin yhtälö kertoo jakautumafunktion käyttäytymisen sähkö- ja magneettikentässä  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$ . Jakautumafunktiosta saadaan puolestaan makroskooppiset suureet varaustiheys  $Q$  ja virtatiheys  $\mathbf{j}$  integroimalla nopeuden yli

$$Q = q \int f d^3v; \quad \mathbf{j} = q \int \mathbf{v} f d^3v. \quad (5.8)$$

Itseiskonsistentti systeemi saadaan, kun käytetään yllä saatuja varaus- ja virtatiheyksiä (5.8) lähteinä Maxwellin yhtälöissä määräämään kentät  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  Vlasovin yhtälössä (5.6). Kentät  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  muodostuvat ulkoisista kentistä ja hiukkasten aiheuttamien mikrokooppisten kenttien tasoitetusta (efektiivisestä) kentästä. Nyt voidaan itseiskonsistentit Vlasov-Maxwellin yhtälöt esittää muodossa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ext} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \int f d^3v \quad (5.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 q \int \mathbf{v} f d^3v + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5.14)$$

missä  $\mathbf{F}_{ext}$  tarkoittaa ulkoisia voimia. Sopivilla reunaehdoilla yllä olevat yhtälöt muodostavat suljetun systeemin, joka voidaan periaatteessa ratkaista. Hiukkas-ten aiheuttamat mikroskooppiset kentän fluktuaatiot voidaan ottaa huomioon törmäystermin  $(\partial f / \partial t)_{coll}$  avulla, jolloin Vlasovin yhtälö korvautuu Boltzmannin yhtälöllä

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (5.15)$$

Kun otetaan huomioon vain binääriset Coulombin törmäykset, Boltzmannin yhtälöä kutsutaan Fokker-Planckin yhtälöksi. Törmäystermin johtaminen vaatii kineettisen yhtälön yleisen käsittelyn kuusidimensioisessa faasiavaruudessa ja johtaa monimutkaiseen epälineaariseen integraalityyppiseen  $f$ :n funktionaaliin. Seuraavassa tarkastellaan kuitenkin ilmiöitä, jotka ovat paljon nopeampia kuin törmäystermin määrämä efektiivinen törmäystaajuus ( $\omega \gg \nu_{eff}$ ), joten systeemiä voidaan kuvata Vlasov-Maxwellin yhtälöillä (5.9)–(5.14).

### 5.3 Debyen varjostettu potentiaali

Tarkastellaan plasmaan tuodun pistemäisen testivaruksen  $+Q_T$  synnyttämää staattista potentiaalienttä  $\phi(\mathbf{r})$ . Plasman oletetaan muodostuvan elektroneista, jotka liikkuvat staattisessa ionitaustassa (ionien varausluvaksi oletetaan  $Z = 1$ , joten tiheyksille ilman testivarausta pätee  $n_e = n_i = n_0$ ). Tilastollisen mekaniikan mukaan elektronien jakautumafunktiolle termisessä tasapainossa lämpötilassa  $T$  saadaan

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = C e^{-W/k_B T}, \quad (5.16)$$

missä  $W = \frac{1}{2} m_e v^2 + q_e \phi$  on elektronin kokonaisenergia. On helppo todeta, että jakautumafunktio (5.16) toteuttaa Vlasovin yhtälön (5.6). Nyt plasman elektronitiheys voidaan (5.1) lausua

$$n_e(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v = n_0 e^{-q_e \phi / k_B T}, \quad (5.17)$$

missä vakio kertoimen  $n_0$  täytyy olla täsmälleen taustan hiukkastiheys, koska äärettömyydessä ( $\phi \rightarrow 0$ ) plasma on neutraali. Kirjoitetaan seuraavaksi Poissonin yhtälö  $\nabla \cdot \mathbf{E} = Q / \epsilon_0$  potentiaalın  $\phi(\mathbf{r})$ :n avulla. Koska  $\mathbf{E} = -\nabla \phi(\mathbf{r})$ , niin

$$\nabla^2 \phi = -\frac{Q}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} [q_i n_i + q_e n_e + Q_T \delta(\mathbf{r})], \quad (5.18)$$

missä  $\delta(\mathbf{r})$  on  $\delta$ -funktio, jonka arvo on nolla, kun  $\mathbf{r} \neq 0$ . Sijoitetaan varaukset  $q_e = -e$  ja  $q_i = e$  ja tiheydet  $n_i = n_0$  sekä  $n_e$  (5.17):sta, jolloin

$$\nabla^2 \phi + \frac{en_0}{\epsilon_0} (1 - e^{e\phi/k_B T}) = -\frac{Q_T}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}). \quad (5.19)$$

Kaukana testivaruuksesta  $Q_T$  sen aiheuttama potentiaali on pudonnut riittävän pieneksi ( $\phi/k_B T \ll 1$ ), jolloin yhtälö (5.19) voidaan linearisoida käyttämällä eksponenttitermille Taylorin kehitelmää ts.

$$\nabla^2 \phi - \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T} \phi = 0. \quad (5.20)$$

Pistemäisen testivaruksen synnyttämä potentiaali on pallosymmetrinen, joten kirjoitetaan yhtälö (5.20) pallokoordinaatistossa

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{1}{\lambda_D^2} \phi = 0, \quad (5.21)$$

missä

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} \quad (5.22)$$

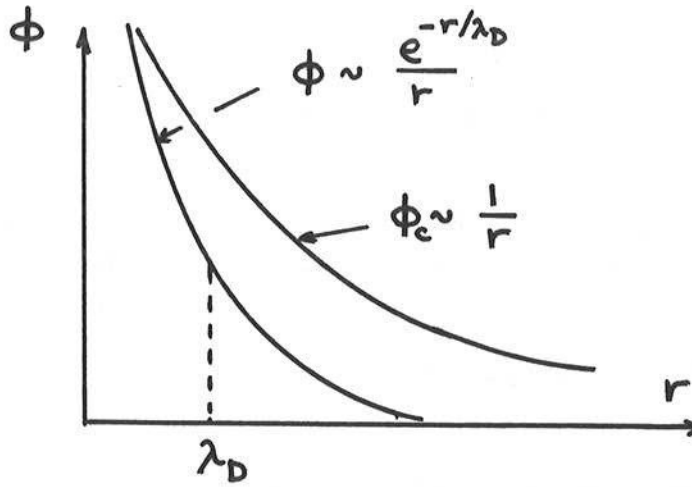
on (elektronien) Debye-pituus. Sijoitetaan yhtälöön (5.21) yrite  $\phi = \phi_1/r$ , jolloin päästään tuttuun yhtälöön

$$\frac{d^2 \phi_1}{dr^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi_1. \quad (5.23)$$

Tälle saadaan eksponentiaalinen ratkaisu  $\phi_1 \sim \exp(-r/\lambda_D)$ , joten itse potentiaali on tyyppiä  $\phi \sim (1/r) \exp(-r/\lambda_D)$ . Lähellä testivaruusta  $Q_T$  potentiaalin täytyy olla muotoa  $\phi = Q_T/4\pi\epsilon_0 r$ , joten potentiaalille voidaan kirjoittaa

$$\phi(r) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}. \quad (5.24)$$





Kuva 5.1: Pistevarauksen Coulombin potentiaali  $\phi_C(r)$  tyhjöissä ja varjostettu Debye-potentiaali  $\phi(r)$  plasmassa.

Tätä kutsutaan varjostetuksi potentiaaliksi tai Debye-potentiaaliksi. Potentiaali (5.24) muistuttaa tyhjöissä olevan pistevarauksen  $1/r$ -potentiaalia, mutta plasmassa elektronien varjostus tuo tähän lisää eksponenttitermin. Varjostuksesta johtuen potentiaalın kantama on äärellinen (Debye-pituus  $\lambda_D$ ), kuten kuvasta 5.1 voidaan havaita. Varjostuksen syynä on positiivisen testivarauksen  $+Q_T$  aiheuttama atraktio elektroneihin, jotka viipyvät hiukan kauemmin  $Q_T$ :n läheisyydessä ohittaessaan sen. Siten positiivisen testivarauksen ympärille muodostuu lievä negatiivisen varauksen ylimäärä, joka heikentää testivarauksen potentiaalikäntän kaavan (5.24) mukaisesti.

## 5.4 Plasmavärähtelyt kuumassa plasmassa

Kylmässä magneettikentättömässä plasmassa saatiin kohdassa 4.7 pitkittäiset plasmavärähtelyt  $\omega = \omega_p$ . Tarkastellaan seuraavassa uudelleen näitä pieniamplitudisia plasma-aaltoja, kun otetaan huomioon elektronien termisestä liikkeestä ja nopeusjakautumasta aiheutuvat lisäefektit. Lähtökohtana on Vlasovin yhtälö (5.6) ja Maxwellin yhtälöistä tarvitaan vain Poissonin yhtälöä (5.11), koska tarkastellaan pitkittäisiä aaltoja ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ), joihin ei liity lainkaan magneettista komponenttia. Asetetaan myös ulkoinen magneettikenttä nolllaksi. Vlasovin yhtälö on tällöin

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f = 0. \quad (5.25)$$

Vlasovin yhtälön (5.25) viimeinen termi on epälineaarinen. Linearisoidaan se olettamalla aalto pieneksi häiriöksi:  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , missä  $f_1 \ll f_0$  on aaltoon liittyvä häiriö ja  $f_0$  on hiukkasten jakautumafunktio tasapainotilassa, joka on yleensä Maxwellista tyyppiä

$$f_0(v) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T}, \quad (5.26)$$

missä  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Yksidimensioisessa tapauksessa ( $v_x = u$ ) jakautumafunktio on

$$f_0(u) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-mu^2/2k_B T}, \quad (5.27)$$

kun on integroitu  $v_x$ :n ja  $v_y$ :n yli. Usein plasman tiheys irrotetaan jakautumafunktiosta ja uutta funktiota merkitään  $F_0(u) = n_0^{-1} f_0(u)$ .

Tasapainotilassa ei ole sähkökenttää, joten aallon sähkövektori  $\mathbf{E}$  on suoraan häiriösuure. Sijoitetaan jakautumafunktio  $f = f_0 + f_1$  Vlasovin yhtälöön (5.25) ja suoritetaan linearisointi, jolloin päädytään muotoon

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_0 = 0. \quad (5.28)$$

Tämän lisäksi tarvitaan Poissonin yhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \int f_1 d^3v. \quad (5.29)$$

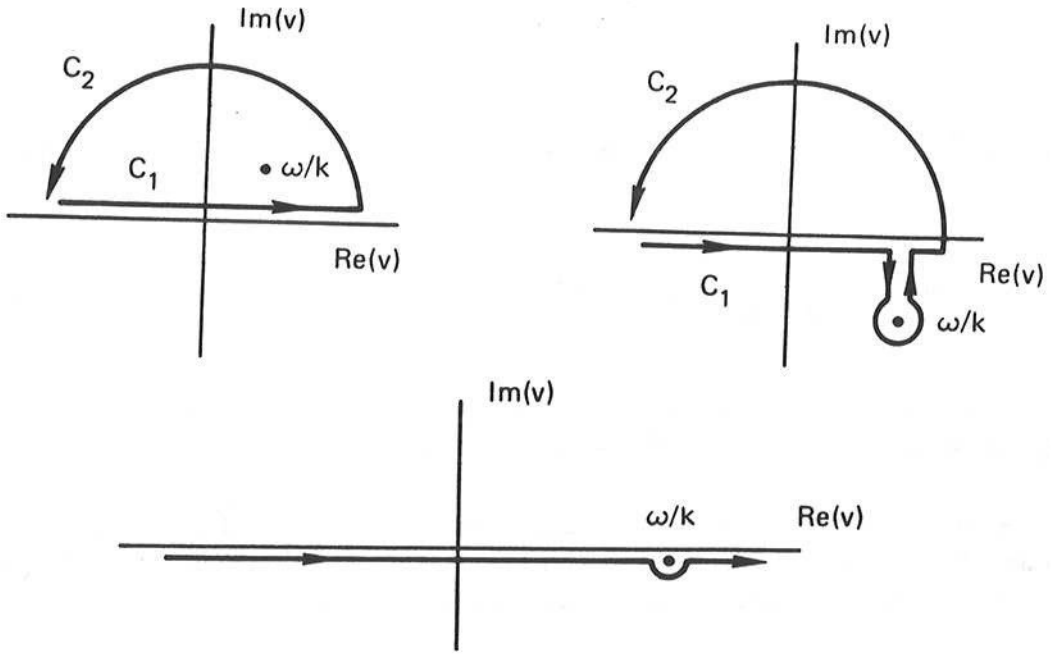
On huomattava, että vain jakautumafunktion häiriöosa  $f_1$  (elektronien tiheysfluktuaatio) toimii sähkökentän lähteenä. Kuten edellisessä luvussa, etsitään nytkin tasoaaltoratkaisuja, joissa häiriösuureiden  $f_1(\mathbf{r}, t)$  ja  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  aika- ja paikkariippuvuus on tyyppiä  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ . Sijoitetaan tasoaaltoyritteet linearisoituun Vlasovin yhtälöön (5.28) ja Poissonin yhtälöön (5.29), jolloin amplitudeille  $f_1$  ja  $\mathbf{E}$  saadaan algebralliset yhtälöt

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) f_1 = -\frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_0 \quad (5.30)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \int f_1 d^3v. \quad (5.31)$$

Ratkaistaan  $f_1$  ylemmästä yhtälöstä (5.30) ja sijoitetaan se alempaan (5.31), jolloin päästään dispersiorelaatioon

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{iq^2}{\epsilon_0 m} \mathbf{E} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla_v f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d^3v. \quad (5.32)$$



Kuva 5.2: Integrointireitin valinta (Landauin reitti) tapauksissa  $\text{Im}\{\omega\} > 0$ ,  $\text{Im}\{\omega\} < 0$  ja  $\text{Im}\{\omega\} \simeq 0$ .

Oletetaan, että tutkittava aalto etenee  $z$ -akselin suuntaan ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$ ) ja merkitään  $u = v_z$  ja  $F_0(u) = n_0^{-1} \int f_0(\mathbf{v}) dv_x dv_y$ . Nyt dispersiorelaatio voidaan kirjoittaa muotoon

$$\epsilon(k, \omega) \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0 / \partial u}{ku - \omega} du = 0. \quad (5.33)$$

Funktiota  $\epsilon(k, \omega)$  kutsutaan plasman dielektrisyysfunktiksi ja se vastaa kylmän plasman teoriassa esiintyvää dielektrisyystensoren elementtiä  $P$ . Suuretta

$$\chi = -\frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0 / \partial u}{ku - \omega} du \quad (5.34)$$

kutsutaan usein (elektronien) pitkittäiseksi susceptibiliteetiksi. Jos myös ionit otettaisiin huomioon, voitaisiin pitkittäisten aaltojen dispersiorelaatio esittää muodossa  $\epsilon(k, \omega) = 1 + \chi_e(k, \omega) + \chi_i(k, \omega) = 0$ , missä  $\chi_i$  on ionien pitkittäinen susceptibiliteetti (kts. kohta 5.8).

Dispersiorelaation (5.33) vaikeutena on, että siinä esiintyvä integraali on singulaarinen, koska integroitavalla funktiolla on napa pisteessä  $u = \omega/k$ , joka on integroimisreitillä  $C$ . Käytännössä esiintyvät aallot ovat joko vaimenevia tai kasvavia (epästabiileja), jolloin  $\omega$  on kompleksinen (aaltoluku  $k$  on valittu reaaliseksi). Siten napa siirtyy pois reaaliakselilta kompleksitason ylempään ( $\text{Im}\{\omega\} > 0$ ) tai alempaan ( $\text{Im}\{\omega\} < 0$ ) puolitasoon. Landau osoitti, että oikea fysikaalinen ratkaisu saadaan valitsemalla integroimisreitti  $C$  siten, että napa jää suljetun reitin

sisäpuolelle (kuva 5.2). Kun napa on hyvin lähellä reaaliakselia, se kierretään alapuolelta  $\epsilon$ -säteisellä puoliympyrällä. Kyseisiä integroimisreittejä kutsutaan Landaun reiteiksi. Napa tuo mukanaan imaginaarisen residytermin, joten integraali Landaun reittiä  $C$  pitkin on muotoa

$$\int_C \dots = P \int_{-\infty}^{\infty} \dots + i\pi \text{Res}\{\dots\}_{u=\omega/k}, \quad (5.35)$$

missä  $P$  tarkoittaa Cauchyn pääarvoa, joka määritellään

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega/k-\epsilon} \dots + \int_{\omega/k+\epsilon}^{\infty} \dots \right\}, \quad (5.36)$$

joten dispersiorelaation (5.33) integraali voidaan kirjoittaa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0 / \partial u}{ku - \omega} du = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0 / \partial u}{ku - \omega} du + i\frac{\pi}{k} \left( \frac{\partial F_0}{\partial u} \right)_{u=\omega/k}. \quad (5.37)$$

Singulariteetti on pisteessä  $u = \omega/k$ , joten sen aiheuttavat nopeusjakautuman hiukkaset, joiden nopeus  $z$ -suuntaan on sama kuin aallon vaihenopeus  $\omega/k$ . Singulariteetin fyysikaalinen merkitys selviää tuonnempana kohdassa 5.6 (Landau-vaimennus).

## 5.5 Bohm-Grossin dispersiorelaatio

Tarkastellaan edellä saatua dispersiorelaatiota (5.33) lähemmin pitkän aallonpituuden rajalla ( $k \rightarrow 0$ ). Tällöin aallon vaihenopeus on suuri  $\omega/k \gg v_{th} = (k_B T/m)^{1/2}$  ja on odotettavissa, että dispersiorelaatio muistuttaa läheisesti kylmän plasman vastaavaa dispersiorelaatiota pitkittäisille plasmavärähtelyille  $\omega = \omega_p$ . Johdetaan seuraavaksi kineettisen teorian antama tarkempi dispersiorelaatio pitkittäisille plasmavärähtelyille. Kuumen plasman dispersiorelaatioksi johdettiin edellä

$$1 - \frac{\omega_p^2}{k} \int_C \frac{\partial F_0 / \partial u}{ku - \omega} du = 0. \quad (5.38)$$

Yleisessä tapauksessa integraalilla on imaginaarinen residyosa  $i(\pi/k)(\partial F_0 / \partial u)$ , joten yhtälö (5.38) ei voi toteutua tarkasti puhtaasti reaalisella  $\omega$ :n arvolla. Pitkillä aallonpituuksilla kuitenkin pätee  $\omega/k \gg v_{th}$ , joten singulariteetti on kaukana jakutumafunktion hännässä. Tällöin residytermi, joka on verrannollinen jakutumafunktion derivaattaan vaihenopeuden kohdalla, on hyvin pieni ja se voidaan

unohtaa ensimmäisessä approksimaatiossa. Kehitetään jäljelle jäänyt pääarvo-osa sarjaksi ja suoritetaan termeittäinen osittaisintegrointi

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0 / \partial u}{u - \omega/k} du &= -\frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0}{\partial u} \left[ 1 + \left(\frac{ku}{\omega}\right) + \left(\frac{ku}{\omega}\right)^2 + \dots \right] du \\ &= \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_0 \left[ 1 + 2\left(\frac{ku}{\omega}\right) + 3\left(\frac{ku}{\omega}\right)^2 + \dots \right] du. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Sarjakehitelmän käyttö poisti singulariteetin, joten integroinnit voidaan välittömästi suorittaa. Integraaleille pätee  $\int F_0 du = 1$  ja jakautuman symmetrisyydestä seuraa  $\int u F_0 du = 0$  ja  $\int mu^2 F_0 du = n_0 k_B T$ , joten dielektrisyysfunktio redusoituu muotoon

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T}{m} \right). \quad (5.40)$$

Pitkillä aallonpituuksilla ( $k \rightarrow 0$ ) viimeinen termi on pieni ja siinä voidaan korvata  $\omega \simeq \omega_p$ , jolloin saadaan Bohm-Grossin dispersiorelaatio asettamalla  $\epsilon(k, \omega) = 0$

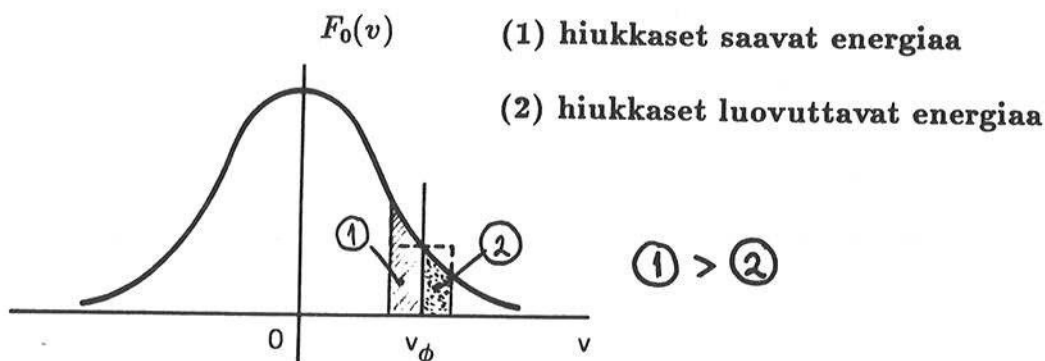
$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_{th}^2 = \omega_p^2 (1 + 3k^2 \lambda_D^2), \quad (5.41)$$

missä  $v_{th} = (k_B T/m)^{1/2}$  on elektronien termien nopeus. Huomaa, että suureiden välillä on yhteys  $v_{th} = \lambda_D \omega_p$ . Bohm-Grossin dispersiorelaatio kuvaa plasmanvärähtelyjä hyvin aaltolukualueella  $k \lambda_D < 0.5$ . Dispersiorelaatio muistuttaa läheisesti kylmän plasman vastaavaa, mutta äärellisen lämpötilan mukana saatiin pitkittäisten plasma-aaltojen dispersiorelaatioon lievä  $k$ -riippuvuus. Nyt aallon ryhmänopeudelle  $v_g = d\omega/dk$  saadaan  $v_g = 3k v_{th}^2 / \omega$ , joka lähestyy nollaa kylmän plasman rajalla.

## 5.6 Landau-vaimennus

Jatketaan dispersiorelaation (5.38) iteraatiota pitkäaaltorajalla ja otetaan huomioon myös imaginaarisen residytermin aiheuttama korjaus. Tällöin dispersiorelaatiosta (5.38) saatavan  $\omega$ :n täytyy olla kompleksinen  $\omega = \omega_r + i\gamma$  (aaltoluku  $k$  oletetaan reaaliseksi). Reaaliosalle  $\omega_r$  saatiin yllä approksimaatio (Bohm-Gross) ja seuraavaksi lasketaan imaginaariosa  $\gamma$ , jolle oletetaan  $\gamma \ll \omega_r$ . Dispersiorelaatio (5.38) voidaan kirjoittaa käyttäen pääarvo-osalle Bohm-Gross approksimaatiota (5.40)

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 3\omega_p^2 \left( \frac{k v_{th}}{\omega^2} \right)^2 + \dots - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left( \frac{\partial F_0}{\partial u} \right)_{u=\omega/k} = 0. \quad (5.42)$$



Kuva 5.3: Landau-vaimennuksen fysikaalinen tulkinta.

Sijoitetaan kompleksinen taajuus  $\omega = \omega_r + i\gamma$  dispersiorelaatioon (5.42) ja kehitetään taajuuden potenssit sarjaksi, jolloin päästään yhtälöön

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2} \left(1 - 2i \frac{\gamma}{\omega_r}\right) - \frac{3k^2 v_{th}^2 \omega_p^2}{\omega_r^4} \left(1 - 4i \frac{\gamma}{\omega_r}\right) - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial u}\right)_{u=\omega_r/k} = 0. \quad (5.43)$$

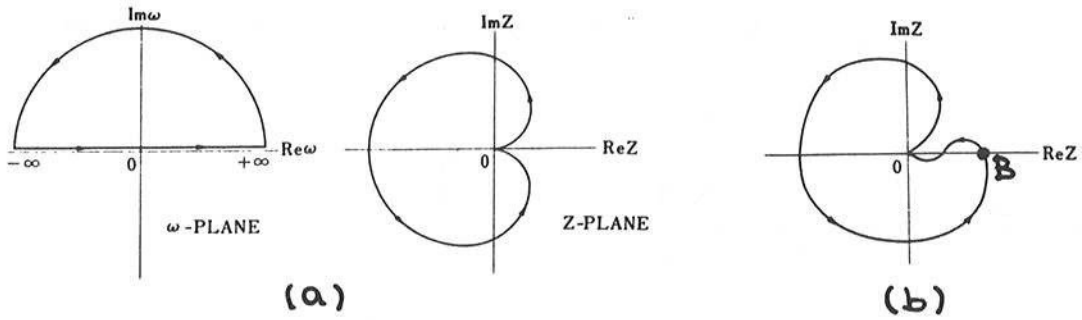
Imaginaariosa on oletettu pieneksi ja siinä voidaan kompleksinen taajuus  $\omega$  korvata reaaliosalla  $\omega_r$ , jolloin virhe on seuraavaa kertalukua. Dispersiorelaatio (5.33) toteutuu, kun sekä reaaliosa että imaginaariosa häviävät.  $\text{Re}\{\epsilon\} = 0$  antaa edellä saadun Bohm-Grossin dispersiorelaation (5.41) ja imaginaariosan häviämisestä ( $\text{Im}\{\epsilon\} = 0$ ) voidaan  $\gamma$  ratkaista

$$\gamma \simeq \frac{\pi \omega_p^3}{2 k^2} \left(\frac{\partial F_0}{\partial u}\right)_{u=\omega_r/k}. \quad (5.44)$$

Koska kyseessä on tasoaltoyrite  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ , saadaan ratkaisuja, jotka ovat tyyppiä  $\exp(\gamma t) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)]$ . Siten amplitudiin tulee lisätekijä  $\exp(\gamma t)$ , joka on ajallisesti vaimeneva, jos pätee  $\gamma < 0$ . Vaimeneva ratkaisu löytyy, jos tasapainotilan jakautumafunktiolle on voimassa  $(\partial F_0 / \partial u)_{u=\omega_r/k} < 0$ . Useassa tapauksessa asia on näin ja tulosta (5.44) kutsutaan Landau-vaimennukseksi tai törmäyksettömäksi vaimennukseksi. Esimerkiksi Maxwellin jakautuman (5.26) tapauksessa saadaan Landau-vaimennuksen dekrementille

$$\gamma = -\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{\omega_p}{k^3 \lambda_D^3} \exp\left[-\left(\frac{1}{2k^2 \lambda_D^2} + \frac{3}{2}\right)\right]. \quad (5.45)$$

Törmäyksettömän Landau-vaimennuksen fysikaalinen selitys on se, että hiukkaset, joiden nopeus on hyvin lähellä aallon vaihenopeutta ( $u \simeq \omega_r/k$ ) ovat voimakkaassa vuorovaikutuksessa aallon kanssa (kts. kuva 5.3). Hiukkaset, joiden nopeus on hiukan suurempi kuin aallon vaihenopeus luovuttavat energiaa aallolle



Kuva 5.4: Muuttujan  $\zeta = \omega/k$  kuvautuminen kompleksiseen  $Z(\zeta)$ -tasoon Maxwelliselle tapaukselle (a) ja epästabiilille jakautumalle (b). Kyseisiä käyriä kutsutaan Nyquistin diagrammoiksi.

ja aaltoa hitaammat hiukkaset puolestaan saavat aallolta energiaa. Jos jakautumafunktion  $F_0$  derivaatta on negatiivinen, niin absorboivia partikkeleita on enemmän kuin energiaa luovuttavia hiukkasia, mikä johtaa energian absorptioon plasmaan ja aallon vaimenemiseen. Päinvastainen tapaus, jossa  $F_0$ :n derivaatta on positiivinen, antaa kasvavan ratkaisun  $\gamma > 0$  ja kyseessä on amplitudiltaan kasvava (epästabiili) aalto.

## 5.7 Mikroepästabiilisuudet

Luvussa 3 käsiteltiin plasman magnetohydrodynaamisia epästabiilisuuksia. Niiden esiintyminen riippui plasman ja kenttien makroskooppisista ominaisuuksista kuten virta- ja painegradientista sekä magneettikentän kaarevuuden tyypistä. Tästä syystä MHD-epästabiilisuuksia kutsutaan myös makroepästabiilisuuksiksi. Epästabiilisuuksia, jotka riippuvat hiukkasten nopeusjakautuman yksityiskohdista kutsutaan puolestaan mikroepästabiilisuuksiksi. Tällaisia voi löytyä, jos aallon vaihenopeuden kohdalla nopeusjakautumafunktion derivaatta on positiivinen  $(\partial F_0 / \partial u)_{u=\omega/k} > 0$ .

Tarkastellaan seuraavaksi plasmavärähtelyjen epästabiilisuutta magneettikentätömmässä ja homogeenisessa plasmassa ts. millä ehdoilla edellä johdettu plasmavärähtelyjen dispersiorelaatio (5.33) antaa reaaliselle  $k$ :lle ratkaisun, jolle  $\text{Im}\{\omega\} > 0$ . Kirjoitetaan dispersiorelaatio muotoon

$$Z(\zeta) \equiv \int_C \frac{\partial F_0 / \partial u}{u - \zeta} du = \frac{k^2}{\omega_p^2}, \quad (5.46)$$

missä  $\zeta = \omega/k$ . Epästabiileja ratkaisuja löytyy alueesta, jossa  $Z(\zeta)$  saa reaalisia positiivisia arvoja  $\zeta$ :n ollessa kompleksitason ylemmässä puolitasossa. Ku-

vassa 5.4 on esitetty  $\zeta$ -muuttujan suorittama kierros ylemmän puolitason ympäri sekä kaksi mahdollista funktion  $Z(\zeta)$  kuvaajaa. Fysikaaliselle jakautumafunktiolle  $F_0(u)$  täytyy päteä  $Z(\zeta) \rightarrow 0$ , kun  $\zeta \rightarrow \infty$  ja äärettömyydessä kiertävä puoliympyrän kaari kuvautuu  $Z(\zeta)$ -tason origoon. Kyseisiä kuvaajia kutsutaan Nyquistin diagrammoiksi. Koska aallon stabiilisuus riippuu siitä, saavuttaako funktio  $Z(\zeta)$  positiivisia reaaliarvoja  $\zeta$ :n ollessa ylemmässä puolitasossa, nähdään että tapaus (a) vastaa stabiilia (Maxwellin jakautuma) ja (b) epästabiilia ratkaisua pisteessä  $B$ .

Tarkastellaan millainen ehto vallitsee kuvaajan (b) pisteessä  $B$ .

$$Z(\zeta) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0'(u)}{u - \zeta} du + i\pi F_0'(\zeta). \quad (5.47)$$

Pisteessä  $B$  on  $\text{Im}\{Z\} = 0$ , joten  $F_0'(\zeta) = 0$ . Lisäksi  $\text{Im}\{Z\}$  muuttuu negatiivisesta arvosta positiiviseksi pisteen  $B$  ohituksen. Tämä antaa ensimmäisen ehdon epästabiilisuudelle

- Jakautumafunktiolla  $F_0$  täytyy olla minimi jollakin nopeuden arvolla  $u$

Pisteessä  $B$  pätee  $\text{Re}\{Z\} > 0$ , mistä saadaan toinen ehto. Funktion  $Z$  reaaliosa saadaan osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned} \text{Re}\{Z(\zeta)\} &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0'(u)}{u - \zeta} du \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\zeta - \epsilon} + \int_{\zeta + \epsilon}^{\infty} \right\} \frac{d[F_0(u) - F_0(\zeta)]}{u - \zeta} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\zeta - \epsilon} + \int_{\zeta + \epsilon}^{\infty} \right\} \frac{F_0(u) - F_0(\zeta)}{(u - \zeta)^2} du \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{F_0(\zeta) - F_0(\zeta - \epsilon)}{\epsilon} - \frac{F_0(\zeta + \epsilon) - F_0(\zeta)}{\epsilon} \right] \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(u) - F_0(\zeta)}{(u - \zeta)^2} du \end{aligned} \quad (5.48)$$

Nyt voidaan edellä saadut ehdot yhdistää stabiilisuuskriteeriksi, jonka mukaan eksponentiaalisesti kasvava plasma-aalto esiintyy vain, jos funktiolla  $F_0(u)$  on minimi arvolla  $u = \zeta$  siten, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(u) - F_0(\zeta)}{(u - \zeta)^2} du > 0. \quad (5.49)$$

Pääarvomerkintä on tarpeeton, koska  $u = \zeta$  antaa  $F_0(u)$ :n minimin. Saatu ehto tunnetaan nimellä Penrosen stabiilisuuskriteeri. Sen mukaan jakautumafunktiolla



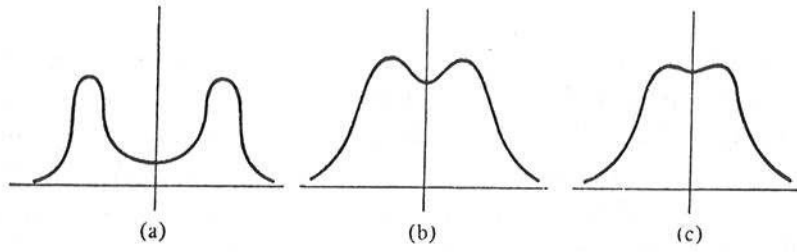
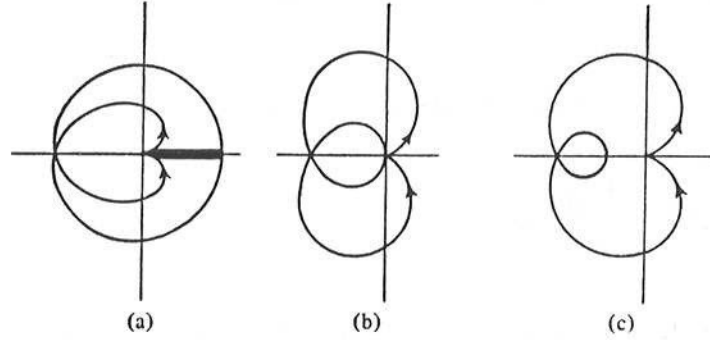


Fig. 10.3. Unstable, marginal and stable distributions.



Kuva 5.5: Erilaisia jakautumafunktioita ja niitä vastaavat Nyquistin diagrammit (a) epästabiili, (b) marginaalisesti stabiili, (c) stabiili.

on kaksi huippua vastaten eri nopeuksilla tapahtuvia virtauksia ja virtausten on oltava riittävän selvästi erottuneita, jotta niiden välinen minimi on tarpeeksi syvä. Kuvassa 5.5 on esitetty joitakin jakautumafunktioita ja niitä vastaavat Nyquistin diagrammit.

## 5.8 Ioniakustinen aalto

Kylmän plasman approksimaatiossa ( $T_{e,i} = 0$ ) ei magneettikentättömässä homogeenisessa plasmassa ole matalataajuisia  $\omega < \omega_{pi}$  aaltomoodeja. Jos plasman paine otetaan huomioon, löydetään matalataajuinen ratkaisu myös magneettikentättömässä tapauksessa ( $v_A = 0$ ) kuten MHD-aaltojen yhteydessä kohdassa 3.6 todettiin. Tarkastellaan seuraavaksi matalataajuusrajaa kineettisen teorian perusteella olettamalla magneettikentätön ( $\mathbf{B}_0 = 0$ ) ja homogeeninen plasma. Aallot oletetaan pitkittäisiksi (sähköstaattisiksi), joten Maxwellin yhtälöistä tarvitaan vain Poissonin yhtälöä, koska  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$  ja aaltoon liittyvä magneettikenttä häviää ( $\mathbf{B} = 0$ ). Ioneja ei voi enää pitää paikallaan olevana taustavarauksena, vaan niiden dynamiikka on oleellista matalataajuisissa ilmiöissä. Kirjoitetaan linearisoitu Vlasovin yhtälö molemmille plasmakomponenteille

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_{s0} = 0, \quad (5.50)$$

missä  $s = e, i$  ja  $f_s$  edustaa pientä häiriötä  $s$ -komponentin tasapainojakautumassa  $f_{s0}$ . Poissonin yhtälössä on mukana sekä elektronien että ionien aiheuttama va-

raustiheyden häiriö

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{s=e,i} q_s \int f_s d^3v. \quad (5.51)$$

Sijoitetaan tasoaaltoyritteet  $f_s \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  ja  $\mathbf{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  Vlasovin ja Poissonin yhtälöihin, jolloin saadaan

$$i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})f_s = \frac{q_s \mathbf{E}}{m_s} \cdot \nabla_v f_{s0} \quad (5.52)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{s=e,i} q_s \int f_s d^3v. \quad (5.53)$$

Ratkaistaan jakautumafunktion häiriö  $f_s$  yhtälöstä (5.52) ja sijoitetaan se yhtälöön (5.53), jolloin

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -i\mathbf{E} \cdot \sum_{s=e,i} \frac{q_s^2}{\epsilon_0 m_s} \int \frac{\nabla_v f_{s0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v. \quad (5.54)$$

Kuten plasmavärähtelyjen tapauksessa kohdassa 5.4, oletetaan aallon etenemissuunnaksi  $z$  ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E} \parallel \mathbf{z}$ ) ja merkitään  $u = v_z$ . Nyt voidaan matalataajuisten sähköstaattisten aaltojen dispersiorelaatio kirjoittaa

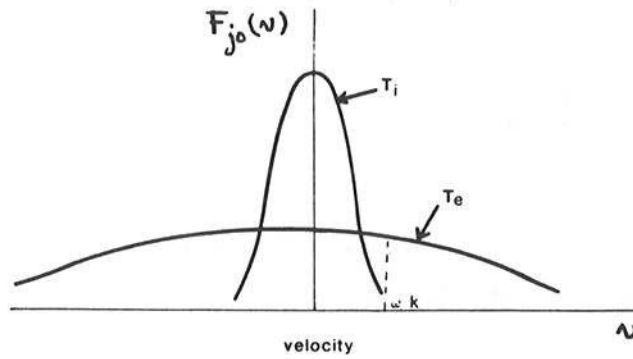
$$1 + \chi_e + \chi_i = 0, \quad (5.55)$$

missä elektronien ja ionien susceptibiliteetit ovat

$$\chi_s = -\frac{\omega_{ps}^2}{k} \int \frac{\partial F_{s0}/\partial u}{ku - \omega} du. \quad (5.56)$$

Oletetaan seuraavaksi, että aallon vaihenopeus on paljon suurempi kuin ionien terminen nopeus  $v_i = (k_B T_i/m_i)^{1/2}$  ja paljon pienempi kuin elektronien terminen nopeus  $v_e = (k_B T_e/m_e)^{1/2}$  ts.  $v_i \ll \omega/k \ll v_e$ . Tällöin voidaan käyttää sarjakehitelmiä susceptibiliteeteissä

$$(\chi_i): \quad \frac{1}{ku - \omega} \simeq -\frac{1}{\omega} \left[ 1 + \frac{ku}{\omega} + \left(\frac{ku}{\omega}\right)^2 + \dots \right] \quad (5.57)$$



Kuva 5.6: Ioniakustisen aallon vaihenopeus  $\omega/k$  ionien ja elektronien nopeusjakaumassa, kun oletetaan  $T_e \gg T_i$ .

$$(\chi_e): \quad \frac{1}{ku - \omega} \simeq \frac{1}{ku}. \quad (5.58)$$

Sarjakehitelmien avulla susceptibiliteeteille saadaan likimääräiset lausekkeet

$$\chi_i \simeq -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \int F_{i0}(u) \left[ 1 + 2 \left( \frac{ku}{\omega} \right) + \dots \right] du - i\pi \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \left( \frac{\partial F_{i0}}{\partial u} \right)_{u=\omega/k} \quad (5.59)$$

$$\chi_e \simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{e0}(u)}{\partial u} du - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left( \frac{\partial F_{e0}}{\partial u} \right)_{u=\omega/k}. \quad (5.60)$$

Elektronien ja ionien nopeusjakaumafunktiot on luonnollista olettaa Maxwellisiksi  $F_{s0} = (2\pi v_s^2)^{-1/2} \exp(-u^2/2v_s^2)$ , jolloin integroinnit susceptibiliteeteissä (5.59) ja (5.60) voidaan suorittaa

$$\chi_i \simeq -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - i\pi \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \left( \frac{\partial F_{i0}}{\partial u} \right)_{u=\omega/k} \quad (5.61)$$

$$\chi_e \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left( \frac{\partial F_{e0}}{\partial u} \right)_{u=\omega/k}. \quad (5.62)$$

Nyt voidaan dispersiorelaatio kirjoittaa

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - i\pi \sum_{s=e,i} \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \left( \frac{\partial F_{s0}}{\partial u} \right)_{u=\omega/k} = 0. \quad (5.63)$$

Oletetaan reaalin  $k$  ja kompleksinen taajuus  $\omega = \omega_r + i\gamma$ , jossa imaginaariosa on pieni  $\gamma \ll \omega_r$ . Tällöin dispersiorelaatiossa (5.63) voidaan kehittää  $\omega^{-2} \simeq \omega_r^{-2}(1 - 2i\gamma/\omega_r + \dots)$ , jonka jälkeen merkitään (5.63):ssa reaali- ja imaginaariosa nolliksi, jolloin dispersiorelaatioksi tulee

$$\omega_r^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (5.64)$$

missä  $c_s = (k_B T_e / m_i)^{1/2}$  on ionien äänennopeus. Huomaa, että suureiden välinen vallitsee yhteys  $c_s = \lambda_{De} \omega_{pi}$ . Pitkäaaltoarajalla ( $k \rightarrow 0$ ) dispersiorelaatio  $\omega \simeq k c_s$  muistuttaa ääniaallon etenemistä ilmassa, mistä syystä aaltoa (5.64) kutsutaan ioniakustiseksi aalloksi (ion acoustic or ion sound wave). Lyhytaaltoarajalla ( $k \rightarrow \infty$ ) ioniakustinen aalto edustaa ionien plasmavärähtelyjä  $\omega \simeq \omega_{pi}$ .

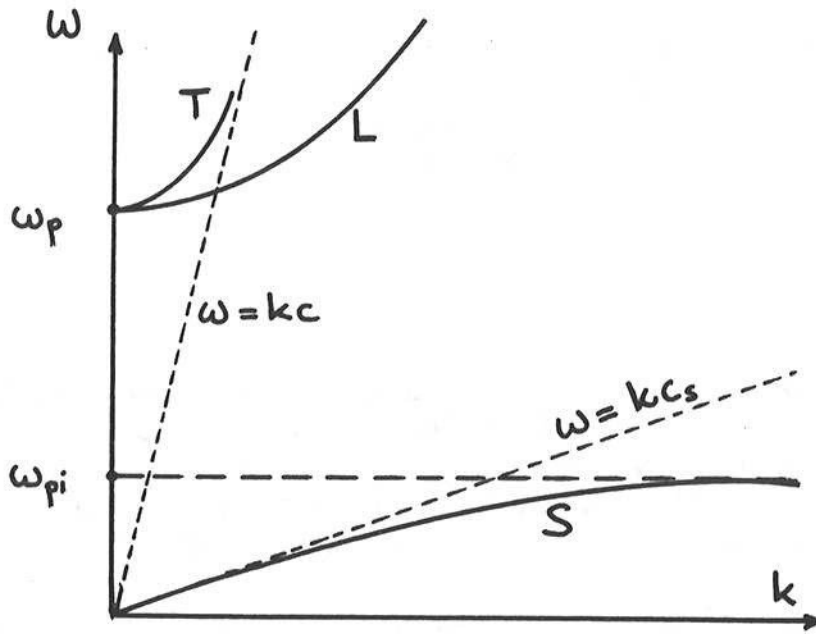
Imaginaariosan häviäminen antaa ioniakustisen aallon Landau-vaimennukseksi (osoita)

$$\gamma = -\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \omega_r \left[ \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-T_e/2T_i} \right]. \quad (5.65)$$

Lausekkeesta (5.65) havaitaan Landau-vaimennuksen muodostuvan kahdesta termistä vastaten elektronien ja ionien nopeusjakautumaa. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 5.6. Koska vaihenopeudelle oletettiin  $\omega/k \ll v_e$ , niin se sijaitsee lähellä nollanopeutta elektronien jakautumassa. Tällä alueella jakautumafunktio on laakea pysyen likipitään vakiona. Elektroneista johtuva vaimennus  $\sim (m_e/m_i)^{1/2}$  jää pieneksi, koska jakautumafunktion derivaatta  $(\partial F_{e0}/\partial u)_{u=\omega/k}$  on pieni alueessa  $u \ll v_e$ . Ionien nopeusjakautumassa vaihenopeus on jakautuman hännässä ( $\omega/k \gg v_i$ ), kuten edellä oletettiin. Myös siellä derivaatta  $(\partial F_{i0}/\partial u)_{u=\omega/k}$  jää pieneksi, mikäli lämpötiloille pätee  $T_e \gg T_i$ . Tapauksessa ( $T_e \simeq T_i$ ) ioniakustisen aallon vaihenopeus on likipitään sama kuin ionien termien nopeus ( $\omega/k \simeq c_s \simeq v_i$ ) ja aalto on vuorovaikutuksessa suuren hiukkamäärän kanssa (nopeusjakautuman pääosa). Tästä syystä Landau-vaimennus on hyvin voimakas ja aalto häviää nopeasti, joten ioniakustisen aallon olemassaolo edellyttää lämpötilasuhteelle  $T_e \gg T_i$ .

Ioniakustinen aalto esiintyy vain matalilla taajuuksilla  $\omega < \omega_{pi}$ , jolloin elektronit pystyvät varjostamaan tehokkaasti ionitiheydessä esiintyvät fluktuaatiot. Tästä syystä ioniakustiseen aaltoon liittyvä pitkittäinen sähkökenttä jää hyvin pieneksi, vaikka tiheysfluktuaatiot olisivatkin suuria. Siksi on ymmärrettävää, että matalimmilla taajuuksilla ( $\omega \rightarrow 0$ ) saadaan MHD-teorian ennustama dispersiorelaatio magneettikentättömälle tapaukselle (vrt. kohta 3.6). MHD-mallissahan plasma oletettiin yksikomponenttiseksi nesteeksi, jossa ei tapahdu varausten erottumista elektronien ja ionien välillä.

Magneettikentättömän plasman ominaismoodien (ioniakustinen aalto, pitkittäiset plasmavärähtelyt ja poikittaiset sähkömagneettiset aallot) dispersiorelaatiot



Kuva 5.7: Magneettikentättömän plasman ominaismoodien dispersiorelaatiot  $(k, \omega)$ -tasossa: ioniakustinen aalto (S), pitkittäiset plasmavärähtelyt (L) ja poikittaiset sähkömagneettiset aallot (T).

on esitetty graafisesti kuvassa 5.7. Siitä voidaan heti havaita, että magneettikentättömässä plasmassa ei löydy aaltoja taajuusvälillä  $\omega_{pi} < \omega < \omega_p$ . Pitkillä aallonpituuksilla ( $k \rightarrow 0$ ) ioniakustisen aallon (S) vaihenopeus  $\omega/k$  ja ryhmänopeus  $d\omega/dk$  lähestyvät ionien äänennopeutta  $c_s$ . Tällä rajalla pitkittäisten plasmavärähtelyjen eli Langmuir-aaltojen (L) vaihenopeus menee kohti ääretöntä, mutta ryhmänopeus lähestyy nollaa, mikä voidaan helposti nähdä Bohm-Grossin dispersiorelaatiosta (5.41). Lyhyillä aallonpituuksilla ja suurilla taajuuksilla ( $\omega \gg \omega_p$ ) poikittaisen sähkömagneettisen aallon (T) dispersiorelaatio lähestyy tyhjän relaatiota  $\omega = kc$ .

# Kirjallisuutta plasmafysiikasta

Seuraavassa on lueteltu joitakin plasmafysiikkaa ja fuusioenergiaa käsitteleviä oppikirjoja sekä muita aiheeseen liittyviä julkaisuja.

1. R.A. Cairns, *Plasma Physics*, Blackie, Glasgow 1985.
2. F.F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum, London 1984.
3. D.R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York 1983.
4. T.J.M. Boyd and J.J. Sanderson, *Plasma Dynamics*, Nelson, London 1969.
5. P.C. Clemmow and J.P. Dougherty, *Electrodynamics of Particles and Plasmas*, Addison-Wesley, London 1969.
6. S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics — Statistical Approach*, W.A. Benjamin, Reading Massachusetts 1973.
7. A.I. Akhiezer et al., *Plasma Electrodynamics*, Vol. 1 & 2, Pergamon Press, Oxford 1975.
8. T.H. Stix, *Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, New York 1962.
9. R.C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Academic Press, New York 1972.
10. V.N. Tsytovich, *Nonlinear Effects in Plasmas*, Plenum, New York 1970.  
A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*, Spinger-Verlag, Berlin 1975.
11. J. Weiland and H. Wilhelmsson, *Coherent Nonlinear Interactions of Waves in Plasmas*, Pergamon, Oxford 1977.

12. J. Wesson, *Tokamaks*, Claredon Press, Oxford 1987.
13. R.B. White, *Theory of Tokamak Plasmas*, North-Holland, Amsterdam 1989.
14. R.A. Gross, *Fusion Energy*, John Wiley & Sons, New York 1984.
15. J.P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamic Theory of Magnetic Fusion Systems*, Rev. Mod. Phys. 54 (1982) 3, 801–902.
16. J.A. Heikkinen, S.J. Karttunen, M.J. Alava, T.J.H. Pättikangas ja R.R.E. Salomaa, *Fuusioteknologian nykytila ja tulevaisuus*, VTT Tiedotteita 1127, Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Espoo 1990.

ISBN 951-22-0750-8  
ISSN 0355-7804

TKK OFFSET