MS-A010{2,3,4,5} (SCI,ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 7: Integraali ja analyysin peruslause

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

August 26, 2020

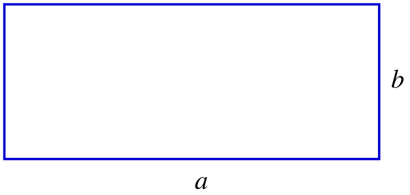
Suorakulmion pinta-ala

Integraalilasku voidaan tulkita eräiden pinta-alojen laskemiseksi.

Aluksi tarkastellaan umpinaisten tasokäyrien rajaamien alueiden pinta-aloja ja pyritään antamaan pinta-alalle integraalien kannalta käyttökelpoinen määritelmä.

Askel 1: Suorakulmion pinta-ala on *kanta* $\times$ *korkeus*:

$$A = ab.$$

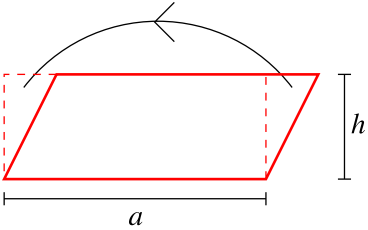


Tässä ei ole varsinaisesti ajateltu mitään matemaattisesti, vaan on hyväksytty käyttökelpoisena määritelmänä.

Suunnikkaan pinta-ala

Askel 2: Suunnikkaan pinta-ala on *kanta* $\times$ *korkeus*:

$$A = ah.$$

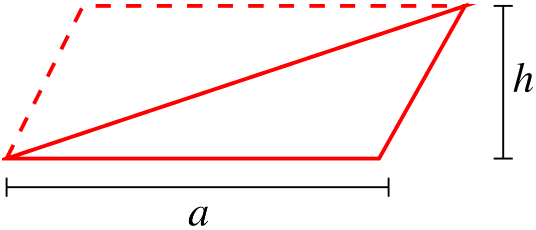


Ajateltu, että pinta-alan täytyy olla summautuva.

Kolmion pinta-ala

Askel 3: Kolmion pinta-ala on

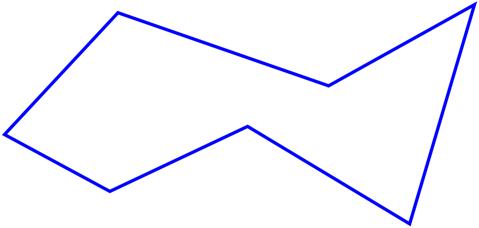
$$A = \frac{1}{2}ah.$$



Ajateltu, että yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen tulee olla samoja.

Monikulmio

Monikulmio on tasoalue, jota rajaa umpinainen ja itseään leikkaamaton murtoviiva.



Murtoviiva koostuu peräkkäisistä janoista, joille

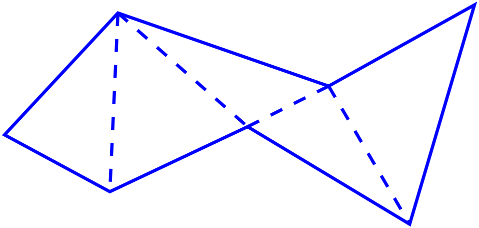
$$\textit{edellisen päätepiste} = \textit{seuraavan alkupiste}.$$

Se on **umpinainen**, jos

$$\textit{viimeisen päätepiste} = \textit{ensimmäisen alkupiste}.$$

Umpinaisen monikulmion pinta-ala

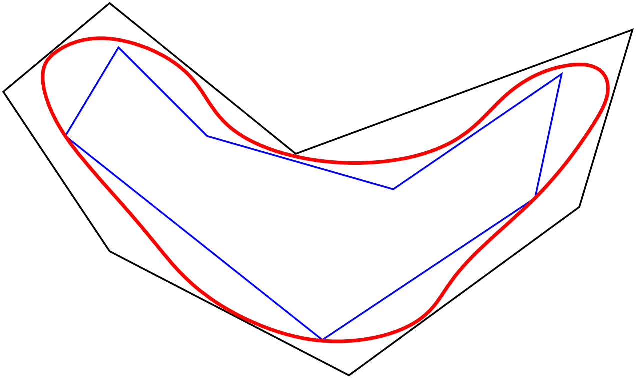
Askel 4: Monikulmion pinta-ala määritellään jakamalla monikulmio kolmioihin (= monikulmion kolmiointi) ja laskemalla kolmioiden pinta-alojen summa.



Lause: Kolmioiden pinta-alojen summa ei riipu kolmioinnin valinnasta.

Yleisen tasojoukon pinta-ala likimäärin

Askel 5: Muodostetaan rajoitetulle tasoalueelle D sisämonikulmioita M_s ja ulkomonikulmioita M_u: $M_s \subset D \subset M_u$.



Monikulmioille pätee $A(M_s) \leq A(M_u)$ seurauksena siitä, että sama on totta sisäkkäisille kolmioille.

Pinta-alan määritelmä

Määritelmä

Rajoitetulla tasojoukolla D on pinta-ala, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sisämonikulmio M_s ja ulkomonikulmio M_u, joiden pinta-alojen erotus on pienempi kuin ε:

$$A(M_u) - A(M_s) < \varepsilon.$$

Tällöin kaikkien lukujen $A(M_s)$ ja $A(M_u)$ välissä on yksikäsitteinen reaaliluku $A(D)$, jota kutsutaan joukon D pinta-alaksi.

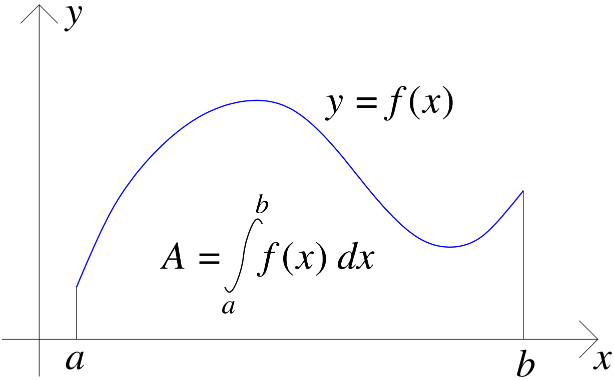
Yllätys: Vaikka joukon D reuna olisi jopa jatkuva umpinainen tasokäyrä, ei sillä aina ole pinta-alaa! Reunakäyrä voi olla niin "kiemurteleva", että sen "pinta-ala" > 0. Ensimmäinen esimerkki [W.F. Osgood, 1903].

Sitten on rajoitettuja joukkoja D, joiden reuna ei edes ole jatkuva tasokäyrä.

Määrätty integraali I

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sellainen, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Kuinka suuren pinta-alan A käyrä $y = f(x)$ rajaa yhdessä x-akselin kanssa välillä $[a, b]$, jossa ajatellaan $a < b$?



Määrätty integraali II

Kutsumme tätä pinta-alaa A (jos se on ylipäätään olemassa) **määrätyksi integraaliksi**

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Määrätty integraali on siis reaaliluku (ei funktio).

Myöhemmin havaitaan, että ehtoa $f(x) \geq 0$ ei tarvita lainkaan. x-akselin alapuolelle jäävä pinta-ala voidaan ymmärtää negatiivisena.

Määrätty integraali III

- Tällä kurssilla integraali määritellään kaikille paloittain jatkuville funktioille. Paloittainen jatkuvuus tarkasti hetken päästä.
- Yleisemmin integraalia voidaan tutkia myös rajoitettujen funktioiden tapauksessa, jolloin puhutaan **Riemann-integraalista**.
- Paloittain jatkuvat funktiot ovat **Riemann-integroituvia** kuten hetken päästä määritellään.
- Ikävä kyllä, kaikki rajoitetut funktiot eivät ole Riemann-integroituvia. Tämä hankaloittaa yleisen tapauksen käsittelyä.

Jatkuvan funktion integraali I

Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva, jossa $a < b$. Välin $[a,b]$ **jakoon** eli **ositukseen**

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

liittyy sitä vastaava funktion f **yläsumma**

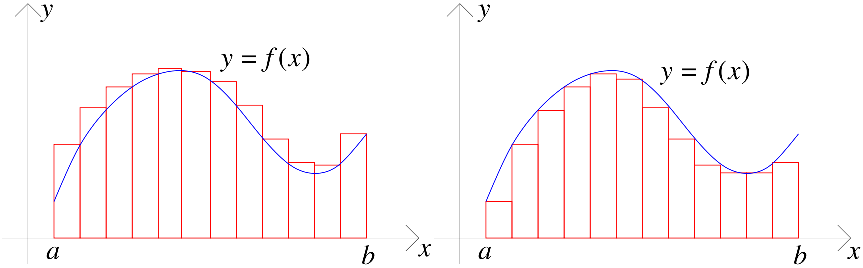
$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),\ \ M_k = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

ja **alasumma**

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),\ \ m_k = \min\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Nämä ovat positiivisen funktion tapauksessa erään ulko- ja sisämonikulmion (= pylväsdiagrammit) pinta-aloja.

Jatkuvan funktion integraali II



Punaisten pylväiden pinta-alojen summa on (tasavälistä jakoa vastaava) yläsumma S vasemmanpuoleisessa kuvassa ja alasumma s oikeanpuoleisessa kuvassa.

Ominaisuuksia

Aina pätee:
(i) Kun jakopisteitä lisätään (sanotaan: jakoa tihennetään), niin s kasvaa ja S pienenee;
(ii) $s \leq S$, vaikka ne laskettaisiin eri jakopisteillä.

Perustelu: (i) Kuviosta (tai muulla tavoin) nähdään, miten ala- ja yläsumma muuttuvat, kun lisätään yksi jakopiste. Piirrä!

(ii) Jos ylä- ja alasumman laskemiseen käytetään samoja jakopisteitä, niin väite on selvä, koska $m_k \leq M_k$ kaikilla k. Jos jakopisteet eivät ole samat, niin tarkastellaan tihennettyä jakoa ottamalla mukaan molempien jakojen kaikki pisteet. Tämän jälkeen väite seuraa kohdasta (i).

Integraalin määritelmä

Määritelmä

Positiivinen funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen jako, jossa

$$S - s < \varepsilon.$$

Funktion f integraali $I \in \mathbb{R}$ on tällöin se yksikäsitteinen luku, jolle $s \leq I \leq S$ kaikissa jaoissa; merkitään

$$\int_a^b f(x)\, dx = I.$$

Positiivisen funktion tapauksessa tämä vastaa täsmälleen sitä vaatimusta, että jakoihin liittyvien pylväsdiagrammien avulla lasketut ulko- ja sisämonikulmioiden pinta-alat saadaan "mielivaltaisen" lähelle toisiaan, kun jakoa tihennetään riittävästi.

Mikä tulee ongelmaksi, jos funktio ei olekaan positiivinen?

Sopimuksia I

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funktio, jossa $a < b$ ja $f(x) \geq 0$.

Laajennetaan integraalimerkin käyttöä tekemällä seuraavat sopimukset:

$$
\begin{aligned}
\int_a^a f(x)\,dx &= 0, \\
\int_b^a f(x)\,dx &= -\int_a^b f(x)\,dx, \\
\int_a^b (-f(x))\,dx &= -\int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Viimeinen sopimus mahdollistaa negatiivisten funktioiden integroimisen.

Sopimuksia II

Näiden sopimusten nojalla pätee

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

kaikilla a, b, c järjestyksestä riippumatta Piirrä kuvio!.

Lisäksi voimme integroida sekä positiivisia että negatiivisia arvoja saavuttavia funktiota määrittelemällä

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b f_+(x)\,dx + \int_a^b f_-(x)\,dx$$

jossa $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ ja $f_-(x) = \min(f(x), 0)$.

Riemann-integroituvuus

Lause

Integraali on määritelty kaikille jatkuville funktioille ja se voidaan laskea raja-arvona

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

käyttämällä tasavälisiä jakopisteitä $x_k = a + k\Delta x$, *jossa* $\Delta x = (b-a)/n$ *on askelpituus ja* $0 \leq k \leq n$.

Yleisemmin: Edellisessä summassa arvon $f(x_k)$ tilalla voi olla mikä tahansa arvo $f(z_k)$, kun $x_{k-1} \leq z_k \leq x_k$, eikä jaon tarvitse olla tasavälinen.

Ainoa vaatimus: Jakovälien max-pituus $\to 0$, kun $n \to \infty$. Tässä tapauksessa puhutaan integraalin laskemisesta **Riemannin summien** avulla.

Paloittain jatkuva funktio

Määritelmä

Funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on paloittain jatkuva, jos sillä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia

$$a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_m \leq b,$$

joissa kaikissa toispuoliset raja-arvot ovat olemassa ja äärellisiä (ts. $\pm\infty$ ei sallita).

Määritelmästä seuraa, että jokaisella yksittäisellä välillä $[c_{k-1}, c_k]$ funktio f voidaan muokata jatkuvaksi muuttamalla päätepistearvoiksi ko. toispuoliset raja-arvot.

Integraalin yleistys

Määritelmä

Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on paloittain jatkuva, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx,$$

kun käytetään edellisen sivun merkintöjä, $c_0 = a$, $c_{m+1} = b$ ja f tulkitaan jatkuvaksi jokaisella välillä $[c_{k-1}, c_k]$ erikseen.

Käytännössä integraalin laskeminen täytyy tehdä useammassa osassa yllä olevan kaavan tapaan myös silloin, kun funktio f on määritelty paloittain joko epäyhtenäisellä integroimisalueella tai eri kaavoin eri osa-alueissa (jatkuvuudesta riippumatta).

Integraalin ominaisuuksia

Paloittain jatkuvien funktioiden integraalille pätee

- Lineaarisuus: Jos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, niin

$$\int_a^b \big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\big)\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Positiivisuus: Jos $h(x) \geq 0$ kaikilla x, niin $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$.
- Seuraus: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- Erityisesti: Koska $\pm f(x) \leq |f(x)|$, niin

$$\pm \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Integraalilaskennan väliarvolause

Lause

Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad \textit{jollakin } c \in [a,b], \ \textit{ts.}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \overline{f} = \textit{funktion } f \ \textit{keskiarvo välillä } [a,b].$$

Perustelu: Tehdään taululla.

Mihin tarvitaan jatkuvuutta? Riittäisikö paloittainen jatkuvuus?

Analyysin peruslause

Lause

Analyysin peruslause: *Jos* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

kaikilla $x \in \,]a, b[$.

Perustelu: Tehdään taululla lähtien erotusosamäärästä.