MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 1: Jonot

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

August 26, 2020

Lukujoukot

- **Luonnollisten lukujen joukko** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- **Kokonaislukujen joukko** $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.
- **Rationaalilukujen joukko** $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$.
- **Reaalilukujen joukko** $\mathbb{R}$. Täsmällinen konstruointi palautuu rationaalilukuihin, jossa eri mahdollisuuksia:

  Dedekindin leikkaukset, rationaaliset Cauchy-jonot, desimaaliapproksimaatiot...

  Palaamme desimaaliapproksimaatioihin hetken kuluttua. Suurin osa reaaliluvuista ei ole rationaalisia, esimerkiksi $\sqrt{2}$, π, Neperin luku e. Luvun $\sqrt{2}$ irrationaalisuus tunnettu jo antiikin Kreikassa, nyt tauluesimerkkinä.

Jonot

- Lukujonolla tarkoitetaan *ääretöntä* jonoa reaalilukuja $a_n \in \mathbb{R}$, kun indeksi $n \in \mathbb{N}$. Merkitään

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

- Lukujono on oikeastaan funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jolle $f(n) = a_n$.
- Jonon indeksöinti voi alkaa myös jostakin muusta arvosta kuin 1. Jos indeksin alkuarvo ei ole tärkeä tai tilanne on muuten selvä, voidaan käyttää merkintää (a_n).
- On myös *kahteen suuntaan äärettömiä* jonoja, joiden indeksijoukkona on kaikkien kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$.

Käytännössä

Jonoja voidaan määritellä

- antamalla yleisen termin lauseke; esimerkiksi

$$a_n = 2^n, \text{ kun } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ lukujono } (2, 4, 8, 16, \dots).$$

- rekursiivisesti palautuskaavojen avulla, erityisesti monissa numeerisissa menetelmissä. Esimerkiksi

$$f_0 = 0, \; f_1 = 1, \; f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \text{ kun } n \geq 2$$
$$\Rightarrow \text{ Fibonaccin lukujono } (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots).$$

- tekemällä mittauksia jostakin systeemistä; esimerkiksi äänen voimakkuus tasaisin aikavälein (idealisoituna äärettömäksi jonoksi).

Perusongelmat

- Mitä jonon ominaisuuksia saadaan selville yleisen termin tai palautuskaavojen avulla?
- Miten palautuskaavasta saadaan yleisen termin lauseke? Esimerkiksi Fibonaccin jonolle

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n} \right),$$

jossa

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

on ns. kultaisen leikkauksen suhteen $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ käänteisluku.

Jonojen ominaisuuksia

Määritelmä

Lukujono (a_n) on

- **ylhäältä rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $C \in \mathbb{R}$, että $a_n \leq C$ kaikilla n;
- **alhaalta rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $c \in \mathbb{R}$, että $a_n \geq c$ kaikilla n;
- **rajoitettu**, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu (t.s., jono $(|a_n|)$ on ylhäältä rajoitettu);
- **nouseva**, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla n;
- **laskeva**, jos $a_{n+1} \leq a_n$ kaikilla n; ja
- **monotoninen**, jos se on nouseva tai laskeva.

Suppeneminen I

Määritelmä

Lukujono (a_n) **suppenee** kohti raja-arvoa $L \in \mathbb{R}$, jos lausekkeen $|a_n - L|$ arvo lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$.
Täsmällisemmin: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $|a_n - L| < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$.
Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ \text{ tai } \ \lim a_n = L \ \text{ tai lyhyesti } \ a_n \to L.$$

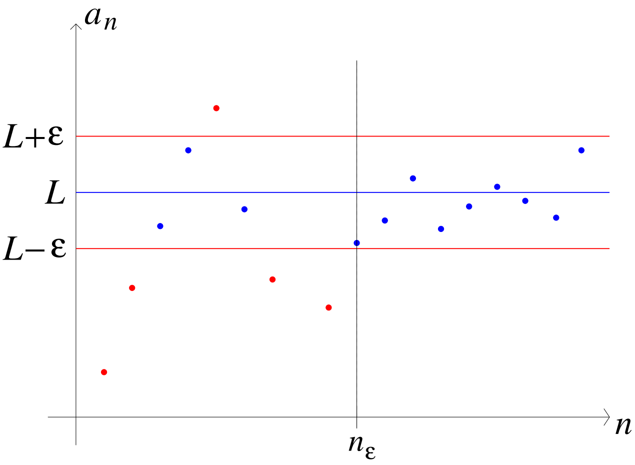
Jos lukujono ei suppenee, niin se **hajaantuu**.

Huom: $|a_n - L| =$ jonon pisteen a_n ja raja-arvon L välinen etäisyys:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Suppeneminen II

Idea: Mitä pienempi ε, sitä suurempi n_ε tarvitaan.



Täydellisyysaksiooma

Reaaliluvut ja rationaaliluvut eroavat toisistaan seuraavassa tärkeässä mielessä.

Täydellisyysaksiooma:
Nouseva ja ylhäältä rajoitettu reaalilukujono $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suppenee kohti jotain reaalilukua.

Aksiooma tarjoaa mahdollisuuden reaaliluvun täsmälliseen ja intuitiiviseen kuvaukseen:

Reaaliluku $n{,}d_1 d_2 \ldots$, jossa kokonaisosa n on kokonaisluku ja desimaalit $d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, on monotonisen rationaalilukujonon $(n; n{,}d_1; n{,}d_1 d_2; n{,}d_1 d_2 d_3, \ldots)$ raja-arvo.

Nousevien, ylhäältä rajoitettujen rationaalijonojen kohdalla ongelma on se, ettei raja-arvo ole aina rationaaliluku!

Yleisiä tuloksia

- Laskeva ja alhaalta rajoitettu jono suppenee. Miksi?
- Suppeneva jono on rajoitettu. Selvitä piirtämällä!
- Suppiloperiaate: Jos $a_n \leq b_n \leq c_n$ jostakin indeksistä alkaen ja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L,$$

niin jono (b_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. Piirrä!

- Geometrinen jono (q^n) suppenee, jos suhdeluku $-1 < q \leq 1$, jolloin sen raja-arvo on joko 0 tai 1. Muissa tapauksissa geometrinen jono hajaantuu.
- Jonon suppenemista kohti nollaa voi tutkia lausekkeen $|a_{n+1}/a_n|$ avulla: jos jostakin indeksistä alkaen on $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ ja $0 \leq q < 1$, niin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Seuraa suppiloperiaatteesta ja geometrisesta jonosta. Tauluesimerkki.

Laskusääntöjä I

Lause

Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *ja* $c \in \mathbb{R}$, *niin*

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- $\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\, a$,
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$,
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, *jos* $b \neq 0$.

Huom: Viimeisen kohdan oletuksesta $b \neq 0$ seuraa, että $b_n \neq 0$ jostakin indeksistä alkaen.

Laskusääntöjä II

Perustelu: Ensimmäinen kaava perustuu epäyhtälöön

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Toinen kaava seuraa yhtälöstä

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a|.$$

Kolmannen kaavan kohdalla käytetään epäyhtälöä

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|$$

ja sitä, että $|a_n| \leq C$ jollakin vakiolla C.
Neljännen kaavan kohdalla osoitetaan aluksi, että $1/b_n \to 1/b$, ja käytetään sen jälkeen tulokaavaa.

Laskusääntöjä III

Esimerkki

Laske raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n}{n^2+1}$.

Ratkaisu: Koska

$$\frac{3n^2+4n}{n^2+1} = \frac{n^2(3+4/n)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{3+4/n}{1+1/n^2}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

niin raja-arvon laskusääntöjen mukaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{n^2+1} = \frac{3+0}{1+0} = 3.$$

Eräitä raja-arvoja

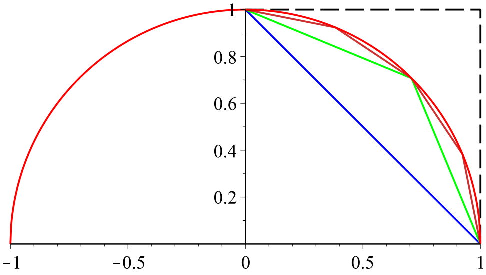
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, kun $a > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e =$ Neperin luku $\approx 2{,}7182818\ldots$ Tähän palataan myöhemmin.
- Stirlingin kaava (jolle ei helppoa todistusta!):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1.$$

Idea: Ensimmäinen seuraa toisesta suppiloperiaatteen avulla. Toisen kohdalla merkitään $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ ja sovelletaan binomikaavaa: $n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + n(n-1)x_n^2/2 + \cdots > 1 + n(n-1)x_n^2/2$, joten $0 < x_n < \sqrt{2/n}$. Väite seuraa tästä suppiloperiaatteen avulla.

Ympyrän kaarenpituus ja kulma I

Kaarenpituus yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ määritellään seuraavalla tavalla: Jaetaan tutkittava kaari tasavälisesti 2^n:ään osaan ja lasketaan vastaavan murtoviivan pituus a_n. Näin saadaan nouseva ja ylhäältä rajoitettu jono, jonka raja-arvo on kyseessä olevan kaaren pituus.

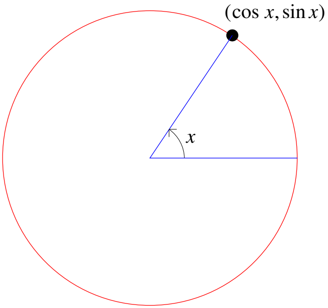


Ympyrän kaarenpituus ja kulma II

Määritelmä

Luku π on yksikköympyrän puolikkaan kaarenpituus.

Kaarenpituuden avulla määritellään kulman yksikkö radiaani (lyh. rad), joka on dimensioton. Trigonometriset funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ määritellään yksikköympyrän kaarenpituuden avulla kaikille $x \in \mathbb{R}$.



Raja-arvon yleistykset

Myös käsitteet

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ ja } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

voidaan määritellä täsmällisesti.

Esimerkiksi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{jokaista lukua } M \in \mathbb{R} \text{ vastaa sellainen indeksi } n_M \in \mathbb{N}, \\ \text{että } a_n \geq M \text{ aina, kun } n \geq n_M. \end{array}$$

Sanotaan: Jono (a_n) **hajaantuu** kohti ääretöntä.