MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*)
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1
Luento 8: Integraalifunktio ja epäoleellinen integraali

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

August 26, 2020

Integraalifunktio I

Määritelmä

Jos $G'(x) = f(x)$ jollakin avoimella välillä, niin G on funktion f **integraalifunktio** eli **määräämätön integraali** eli **antiderivaatta**.

Funktiota f kutsutaan **integrandiksi**.

Integraalilaskennon peruslauseen mukaan kaikilla jatkuvilla funktioilla $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on eräs integraalifunktio $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

koska $F'(x) = f(x)$ kun $x \in]a,b[$.

Mikä menee rikki jos f on vain paloittain jatkuva?

Integraalifunktio II

- Integraalifunktiota ei useinkaan voida esittää alkeisfunktioiden avulla ilman integrointimerkkiä tai sarjakehitelmää, vaikka f itse olisikin alkeisfunktio.

  Mm. tällaisia integraalin kautta esitettyjä funktioita F kutsutaan **erikoisfunktioiksi**. Esim. tapaus $f(x) = e^{-x^2}$, joka liittyy normaalijakaumaan.

- Integraalifunktio ei koskaan ole yksikäsitteinen, mutta välillä $[a, b]$ määritellyt eri integraalifunktiot poikkeavat toisistaan vain vakiolla; merkitään

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \;\; C \in \mathbb{R} \;\; \text{vakio},$$

  jossa $F'(x) = f(x)$.
  Perustelu: Jos $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ kaikilla x, niin funktion $F_1(x) - F_2(x)$ derivaatta on identtisesti nolla, joten se on vakio.

Integraalifunktio III

- Jatkuvan funktion $f\colon [-1,0[\cup]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 \text{ kun } x \in [-1,0[, \\ \ln x + C_2 \text{ kun } x \in]0,1], \end{cases}$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ovat mielivaltaisia integroimisvakioita.

Määrittelyjoukon epäyhtenäisyys johtaa vakaviin ongelmiin integraalifunktion käytössä jopa jatkuvalla integrandilla f.

Tämän esimerkin funktio ei ole edes paloittain jatkuva.

(Se ei itse asiassa ole edes Riemann-integroituva. Ei edes epäolennaisena integraalina integroituva, niinkuin asia määritellään myöhemmin tällä luennolla.)

Integraalifunktio IV

Lause

Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin sen määrätty integraali voidaan laskea (päätepisteissäkin jatkuvan) integraalifunktion G avulla:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathop{/}_{a}^{b} G(x) = G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Perustelu: Taululla.

Määrätty integraali voidaan siis laskea integraalifunktion tekemästä "hypystä" integroimisrajojen välillä. Tämä edellyttää sitä, että f on tosiaankin määritelty (ja jatkuva) koko integroimisvälillä $[a, b]$.

Integroiminen on (usein) siis "derivoimista takaperin".

Mitä voi tapahtua, jos integroimisalue ei ole yhtenäinen?

Integraalifunktio V

Monet integraalifunktiot saadaan suoraan derivoimissäännöistä:

$$
\begin{aligned}
\int x^r \, dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \;\; r \neq -1 \\
\int x^{-1} \, dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x \, dx &= e^x + C \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C
\end{aligned}
$$

Integraalifunktio VI

Esimerkki

Laske integraalit $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$ ja $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$.

Ratkaisu: Ensimmäinen integraalifunktio on $-e^{-x}$, joten integraalin arvo on

$$\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = -e^{-1} + e^{1} = 2\sinh 1.$$

Toinen integraalifunktio on $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$, joten integraalin arvo on

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Integraalifunktio VII

Esimerkki

Laske integraali $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$.

Ratkaisu: Integraalifunktion oikea muoto voisi olla $F(x) = a(25-9x^2)^{1/2}$; tarkistetaan kerroin a derivoimalla:

$$D\big(a(25-9x^2)^{1/2}\big) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (-18x)(25-9x^2)^{-1/2} = \frac{-9ax}{\sqrt{25-9x^2}},$$

joten valinnalla $a = -1/9$ saadaan oikea integraalifunktio. Näin ollen

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx = -\frac{1}{9} \Big/_0^1 (25-9x^2)^{1/2} = -\frac{1}{9}\big(\sqrt{16}-\sqrt{25}\,\big) = \frac{1}{9}.$$

Integraalifunktio VIII

Peruslauseen avulla saadaan seuraava yleisempi derivoimiskaava:

Lause

Jos f on jatkuva ja funktiot a ja b ovat derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\big(b(x)\big)\,b'(x) - f\big(a(x)\big)\,a'(x).$$

Perustelu: Olkoon F funktion f integraalifunktio. Tällöin

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big).$$

Väite seuraa tästä käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä, koska $F' = f$.

Tämä on erinomainen esimerkki kaavasta, jota ei kannata opiskella ulkoa.

Geometrisia sovelluksia I

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x)\,dx$ on funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Yleisemmin: $\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\,dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$.
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Miksi?

- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Geometrisia sovelluksia II

- Jos kappaletta leikataan yz-tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus on
$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$
- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

  Syy: Poikkileikkaus kohdassa x on $f(x)$-säteinen ympyrä, joten $A(x) = \pi f(x)^2$.

Geometrisia sovelluksia III

- Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, niin saadun kappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx.$$

Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$.

- Kun käyrä $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, pyörähtää y-akselin ympäri, niin vastaavan pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

Epäoleellinen integraali I

Riemann-integraali määriteltiin vain rajoitetuille funktioille f äärellisellä välillä $[a, b]$. Käyttäen raja-arvoja, määritelmää voidaan laajentaa rajoittamattomiin funktioihin tai rajoittamattomiin integroimisväleihin.

Kaksi eri perustyyppiä ja lisäksi "sekatyypit":

- **Tyyppi I:** Integroimisvälinä $[a, \infty[$ tai $]-\infty, b]$ tai koko $\mathbb{R}$.
- **Tyyppi II:** Funktio $f\colon\ ]a, b[\to \mathbb{R}$ ei ole rajoitettu tai sillä ei ole toispuoleisia raja-arvoja päätepisteissä.
- **Sekatyyppi:** Sisältää sekä Tyypin I ja II piirteitä.

Sekatyyppien käsittely: Jos ongelmia on molemmissa päätepisteissä tai integroimisvälin sisällä, niin integroimisväli jaetaan niin moneen osaan, että kussakin osassa vain yksi ongelmakohta joko tyyppiä I tai tyyppiä II.

Epäoleellinen integraali II

Esimerkki

"Sekatyyppinen" epäoleellinen integraali tulkitaan

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

jossa oikealla puolella on Tyypin II ja I epäoleelliset integraalit tässä järjestyksessä.

Ovatko nämä integraalit jotenkin turhia,
jos niitä kerran kutsutaan epäoleellisiksi?

Nyt pitäisi vielä selvittää, että kuinka Tyypin I ja II integraalit lasketaan.

Tyyppi I I

Määritelmä

Olkoon $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva. Tällöin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion f **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $[a, \infty[$.

Vastaavasti funktiolle $f :]-\infty, b] \to \mathbf{R}$ määritellään

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^b f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen.

Esimerkki

Laske epäoleellinen integraali $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

Ratkaisu: Koska

$$\int_0^R e^{-x}\,dx = -\Big/_0^R e^{-x} = 1 - e^{-R} \to 1,$$

kun $R \to \infty$, niin epäoleellinen integraali suppenee ja

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Tyyppi II I

Määritellään Tyypin II perustapaus näin:

Määritelmä

Olkoon $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, mutta ilman äärellistä raja-arvoa, kun $x \to a+$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo on olemassa ja äärellinen. Sanotaan: Funktion f **epäoleellinen integraali suppenee** välillä $]a, b]$.

Tyyppi II II

Esimerkki

Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Ratkaisu: Koska

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\Big/_{\varepsilon}^{1} \sqrt{x} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2,$$

kun $\varepsilon \to 0+$, niin integraali suppenee ja sen arvo on 2.

Integraali koko reaaliakselin yli I

Esimerkki

Funktiolle $f(x) = x$ pätee

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 0,$$

koska kaikki integraalit ovat nollia. Yleisemmin sama pätee kaikille parittomille funktioille $f(x)$.

Epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ ei kuitenkaan suppene, kuten hetken päästä havaitaan.

Joskus on kuitenkin tarvetta antaa epäoleelliselle divergoivalle integraalille tulkinta ylläolevan esimerkin mukaisesti. Silloin käytetään nimitystä **Cauchyn pääarvointegraali.**

Integraali koko reaaliakselin yli II

Määritelmä

Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Vasemman puolen integraalia sanotaan suppenevaksi jos ja vain jos **molemmat** oikean puolen integraalit suppenevat.

Kuitenkin pätee: Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Syy: Positiivisen funktion tapauksessa ei voi tapahtua esimerkin tapaista $\pm\infty$ kumoutumista, joka voi muuten sekoittaa asiaa. Tämä kaava **ei siis päde** yleisesti, vrt. tapaus $f(x) = x$.

Majoranttiperiaate I

Epäoleellisen integraalin suppenemista voidaan tutkia majoranttiperiaatteen avulla, josta seuraavassa eräs versio.

Lause

Olkoon $|f(x)| \leq g(x)$ *välillä* $a < x \leq b$. *Jos epäoleellinen integraali*

$$I = \int_a^b g(x)\, dx$$

suppenee, niin myös

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

suppenee ja sen itseisarvo on korkeintaan I.

Majoranttiperiaate II

Esimerkki

Koska

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ välillä } 0 < x \leq 1$$

ja

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2.

Majoranttiperiaate III

Esimerkki

Vastaavasti

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} < \frac{1}{\sqrt{x}(0+x)} = \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ kun } x \geq 1.$$

Koska $\displaystyle\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = 2$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaan

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

suppenee ja sen arvo on < 2.

Huomataan: Sopivan majorantin valinta riippuu sekä funktiosta että integroimisvälistä!