# MS-A010{2,3,4,5} (SCI, ELEC*, ENG*) Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Luento 12: Epähomogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

August 26, 2020

# Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY I

Vakiokertoimisen tapauksen lisäksi myös DY:lle $y' + p(x)y = r(x)$ voidaan johtaa ratkaisukaava jopa epähomogeenisessa tapauksessa.

Oletetaan, että $p(x)$ ja $r(x)$ ovat jatkuvia jollakin välillä $x \in I$. Resepti menee näin:

- Valitaan jokin integraalifunktio $P(x) = \int p(x)\,dx$ ja kerrotaan yhtälö puolittain n.k. **integroivalla tekijällä** $e^{P(x)}$.
- Tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$y'(x)e^{P(x)} + y(x)p(x)e^{P(x)} = r(x)e^{P(x)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{P(x)}\right) = r(x)e^{P(x)}$$

koska: **integroiva** tekijä!

# Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY II

- Integroimalla molemmat puolet saadaan

$$y(x)e^{P(x)} = \int r(x)e^{P(x)}\,dx + C.$$

- Näin saadaan yleinen ratkaisu

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int r(x)e^{P(x)}\,dx,$$

ja erikoisratkaisut saadaan sovittamalla vakio $C$ haluttuun alkuehtoon $y(x_0) = y_0$

Ratkaisukaavaa ei kannata opetella ulkoa; vain menetelmän idea!

# Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY III

Huomioita edellä saadusta ratkaisukaavasta:

- Kaikkiin välivaiheisiin voi kirjoittaa $\Leftrightarrow$, joten ratkaisukaava antaa kaikki mahdolliset ratkaisut ja ne on määritelty välillä $I$.
- Integraalifunktiossa $P(x)$ ei tarvitse integroimisvakiota, koska se muuttaisi ainoastaan lopullisen ratkaisukaavan vakiota $C$.
- Vakiokertoimisessa tapauksessa säätötekniikan insinöörille tärkeälle alkuarvotehtävälle

$$\begin{cases} y'(x) &= ay(x) + bf(x), \quad x \geq 0 \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

saadaan ratkaisu n.k. **vakionvariointikaavalla**

$$y(x) = e^{ax}y_0 + \int_0^x e^{a(x-s)}bf(s)\,ds.$$

# Epähomogeeninen lineaarinen 1. kertaluvun DY IV

## Esimerkki

Ratkaise DY $y' + p(x)y = 0$ separointimenetelmän avulla.

**Ratkaisu:** Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y_0(x) \equiv 0$. Muut ratkaisut eivät saa arvoa 0, joten niille pätee:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y' = -p(x)y \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + C_1 \\
&\Leftrightarrow \ln|y| = -P(x) + C_1 \\
&\Leftrightarrow |y| = e^{C_1 - P(x)} \\
&\Leftrightarrow y = y(x) = \pm e^{C_1} e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}.
\end{aligned}
$$

Tässä lauseke $\pm e^{C_1}$ on korvattu yksinkertaisemmalla vakiolla $C \in \mathbb{R}$ (triviaaliratkaisu $\Rightarrow$ myös $C = 0$ käy).

## Esimerkki

Ratkaise DY $xy' - 2y = 2$ alkuehdolla a) $y(1) = 0$; b) $y(0) = 0$.

**Ratkaisu:** Muodosta $y' - (2/x)y = 2/x$ nähdään, että kyseessä on lineaarinen DY. Sen integroiva tekijä on

$$e^{-\int (2/x)\,dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln(1/x^2)} = \frac{1}{x^2}.$$

Tällä kertomalla päästään muotoon

$$(1/x^2)y'(x) - (2/x^3)y(x) = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3},$$

joten $y(x) = x^2(-1/x^2 + C) = Cx^2 - 1$ on DY:n yleinen ratkaisu. Alkuehdosta $y(1) = 0$ saadaan $C = 1$, mutta alkuehdosta $y(0) = 0$ seuraa ristiriita $-1 = 0$. Ratkaisu on siis a-kohdassa $y(x) = x^2 - 1$, mutta b-kohdan alkuehdon toteuttavaa ratkaisua ei ole.

# Epähomogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen DY I

**Lause**

*Epähomogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

*yleinen ratkaisu on muotoa*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_0(x),$$

*kun* $y_1$ *ja* $y_2$ *ovat vastaavan homogeenisen yhtälön perusratkaisut ja* $y_0$ *on jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.*

Yksittäisratkaisuksi kelpaa siis mikä tahansa yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ toteuttava funktio $y_0(x)$.

Perustelua taululla.

Vakiokertoimiselle epähomogeeniselle yhtälölle

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

yksittäisratkaisu löydetään usein **yritteellä**, joka on muotoa "$r(x)$ yleisillä kertoimilla" tai joskus hieman hankalampi.

Taulukossa on annettu yritteen yleinen muoto vakiokertoimisille toisen kertaluvun yhtälöille, kun kuormatermi $r(x)$ on jokin alkeisfunktio. Tässä $P(\lambda)$ on vastaavan homogeenisen yhtälön karakteristinen polynomi.

| $r(x)$ sisältää | yritteeseen tulee mukaan |
|---|---|
| $n$-asteisen polynomin | $A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$ ( $+A_{n+1}x^{n+1}$, jos $q = P(0) = 0$) |
| $\sin bx$, $\cos bx$ | $A \cos bx + B \sin bx$, jos $P(ib) \neq 0$ |
| $\sin bx$, $\cos bx$ | $Ax \cos bx + Bx \sin bx$, jos $P(ib) = 0$ |
| $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$ | $e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx)$, jos $P(a + ib) \neq 0$ |
| $e^{kx}$ | $Ae^{kx}$, jos $P(k) \neq 0$ |
| $e^{kx}$ | $Axe^{kx}$, jos $P(k) = 0$ ja $P'(k) \neq 0$ |
| $e^{kx}$ | $Ax^2 e^{kx}$, jos $P(k) = P'(k) = 0$ |

# Epähomogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen DY III

## Esimerkki

Määritä DY:n $y'' + y' - 6y = r(x)$ yleinen ratkaisu, kun

$$\text{a) } r(x) = 12e^{-x};$$
$$\text{b) } r(x) = 20e^{2x}.$$

**Ratkaisu:** Ratkaisemalla homogeeninen yhtälö, huomataan että ratkaisut ovat muotoa $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + y_0(x)$.

Sijoittamalla a-kohdassa yrite $y_0(x) = Ae^{-x}$ saadaan $(A - A - 6A)e^{-x} = 12e^{-x}$, joka toteutuu arvolla $A = -2$.

# Epähomogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen DY IV

Sen sijaan b-kohdassa muotoa $Be^{2x}$ oleva yrite ei toimi, koska se on osa vastaavan HY:n yleistä ratkaisua ja tuottaa pelkää nollaa DY:n vasemmalle puolelle sijoitettuna.

Oikea yrite on b-kohdassa muotoa $y_0(x) = Bxe^{2x}$. Sijoitus johtaa yhtälöön

$$(4B + 2B - 6B)xe^{2x} + (4B + B)e^{2x} = 20e^{2x},$$

joka toteutuu arvolla $B = 4$.

Näiden yritteiden ja parametrien avulla voidaan kirjoittaa DY:iden yleiset ratkaisut molemmissa tapauksissa.

# Eulerin menetelmä I

- Tehtävänä on määrittää yhtälön $y' = f(x, y)$ ja alkuehdon $y(a) = y_0$ toteuttavan ratkaisun likiarvo pisteessä $x = b$.
- Käytännössä vastaavia likiarvoja täytyy laskea useissa välin $[a, b]$ pisteissä, joten niiden avulla voidaan myös hahmotella ratkaisun kuvaaja.
- Valitaan askelten lukumäärä $n$, joka määrää **askelpituuden** $h = \Delta x = (b - a)/n$.
- Määritellään välin $[a, b]$ tasaväliset jakopisteet $x_k = a + kh$, $0 \leq k \leq n$, jolloin $x_0 = a$ ja $x_n = b$.
- Jokaista jakopistettä vastaa tarkan ratkaisun approksimaatio $y_k \approx y(x_k)$, joista ainoastaan $y_0 = y(x_0) = y(a)$ tunnetaan.

# Eulerin menetelmä II

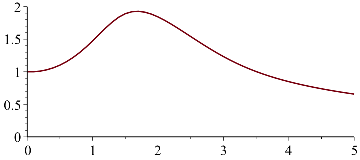
- Kuvion perusteella pisteestä $(x_k, y_k)$ kannattaa edetä ratkaisukäyrän tangentin suuntaan, joten seuraava approksimaatio lasketaan edellisen avulla muodossa $y_{k+1} = y_k + hy'(x_k) = y_k + hf(x_k, y_k)$, $0 \leq k \leq n-1$.
- Tällöin siis $y_n \approx y(b)$ ja approksimaation tarkkuus näyttäisi paranevan jakovälien lukumäärän $n$ kasvaessa. Eulerin menetelmä voidaan siis kiteyttää palautuskaavaan

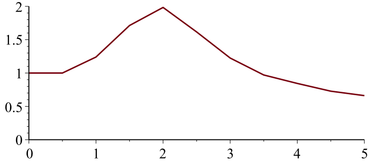
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \ 0 \leq k \leq n-1.$$

# Eulerin menetelmä III

**Eulerin menetelmä differentiaaliyhtälölle** $y' = \sin(x \cdot y)$

```
> x[0] := 0 : y[0] := 1 : n := 50 :  dx := 5.0/n : # askelpituus on siis 0,1
> for k from 0 to n − 1 do
   x[k + 1] := x[k] + dx;
   y[k + 1] := y[k] + dx·sin(x[k]·y[k])
   od:
> plot([seq([x[k], y[k]], k = 0 ..n)], view = [0 ..5, 0 ..2], scaling = constrained)
```




Vasemmalla askelpituus $h = \Delta x = 0{,}1$, oikealla $h = 0{,}5$.

## Esimerkki

Ebola-viruksen leviämistä voidaan mallintaa rajoitetun kasvun mallilla $y' = ay(b - y)$, jota kutsutaan *logistiseksi yhtälöksi*. Tässä $y = y(t)$ on viruksen tartuttama väkimäärä hetkellä

Ratkaise logistinen yhtälö separointimenetelmällä vakioiden arvoilla $a = b = 1$ ja alkuehdolla $y(0) = y_0 \in (0, 1)$. Hahmottele ratkaisun kuvaajaa.

**Ratkaisu:** Taululla.

**Huom:** Logistinen yhtälö ei ota huomioon Ebolan itämis- eikä tartuttavuusaikaa. Malli ei myöskään ota kantaa siihen, missä määrin kuolleet potilaat säilyvät tartuttavina. Jos nämä huomioidaan, joudutaan kirjoittamaan paljon vaikeampi nk. differentiaali-viiveyhtälö tai jopa integro-differentiaaliyhtälö.