Massan momentit

Erilaisten todennäköisyysjakaumien momentit tulevat aikanaan matikassa tutuiksi mutta fysiikassa on hyvin analoginen käsite:

Kappaleen $\mathcal{L}$ massan n:s momentti on

$$\sum_{\mathcal{L}} \vec{r}^{\,n} \Delta m \longrightarrow \int_{\mathcal{L}} \vec{r}^{\,n}\, dm = \int_{\mathcal{L}} \vec{r}^{\,n} \rho(\vec{r})\, d\vec{r}.$$

Esim. 0:s momentti (tai monopolimomentti)

$$\int \vec{r}^{\,0}\, dm = \int dm = M = \text{kokonaismassa}$$

1. momentti (tai dipolimomentti)

$$\int \vec{r}\, dm = \int \vec{r} \rho(\vec{r})\, d\vec{r} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{massakeskipiste}}}{\vec{r}_{MKP}} \cdot M$$

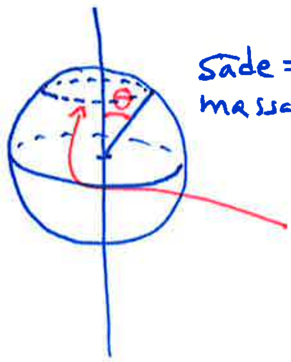
2. momentti (tai kvadrupolimomentti)

$$\int \vec{r}^{\,2}\, dm = \int \vec{r}^{\,2} \rho(\vec{r})\, d\vec{r} = I = \text{hitausmomentti}.$$

Sen korkeammilla momenteilla ei ole tuttuja analogioita/merkityksiä.

Esimerkki:

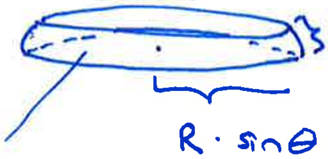
onton pallon hitausmomentti keskipisteen läpi kulkevan akselin suhteen



säde = R
massa = M

$$I = \int r^2 dm = ?$$

tarkastellaan kiekkoa



$R \cdot d\theta$

$R \cdot \sin\theta$ = kiekon säde = massan etäisyys pyörimisakselista

kiekon pinta-ala

$$dA = 2\pi R\sin\theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta .$$

kiekon massa

$$dm = \frac{dA}{A} \cdot M = M \cdot \frac{\cancel{2\pi R^2} \sin\theta \, d\theta}{\cancel{4\pi R^2}_{\,2}} = \frac{M}{2} \sin\theta \, d\theta .$$

Pallokuoren hitausmomentti on nyt

$$I = \int_0^{\pi} \underbrace{(R\sin\theta)^2}_{\text{kiekon säde}} \cdot \underbrace{\frac{M}{2}\sin\theta \, d\theta}_{\text{kiekon massa}} = \frac{MR^2}{2} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}$$

menee osittaisintegroinnille, mutta Wolfram alpha: 4/3.

$$= \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}MR^2 = I}$$

≈ 0.667

Vertaa umpinaiseen kuulaan

$$I_{kuula} = \frac{2}{5}MR^2 .$$

$= 0.4$