Systeemi, ympäristö ja energian säilyminen

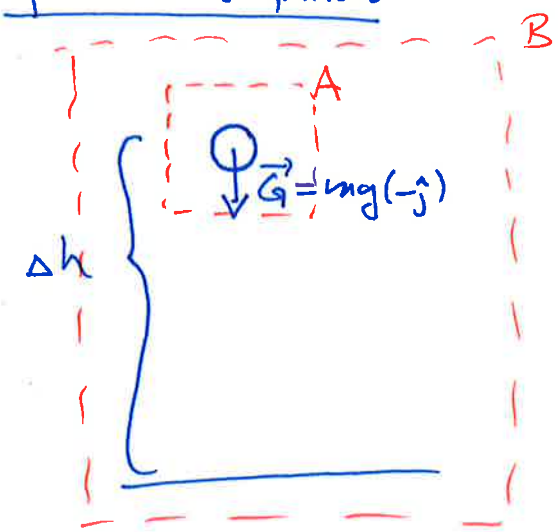
Eri systeemin valintai

Putoava pallo: tekeekö maapallo (n gravitaatiokenttä) työtä?

pallo
- kyllä: gravitaatiovoima $G = mg$ → työ $W = mg\Delta h$.

pallo + maapallo
- ei: potentiaalienergia $mg\Delta h$ muuttuu kineettiseksi energiaksi mutta kokonaisenergia säilyy.

Systeemi & ympäristö



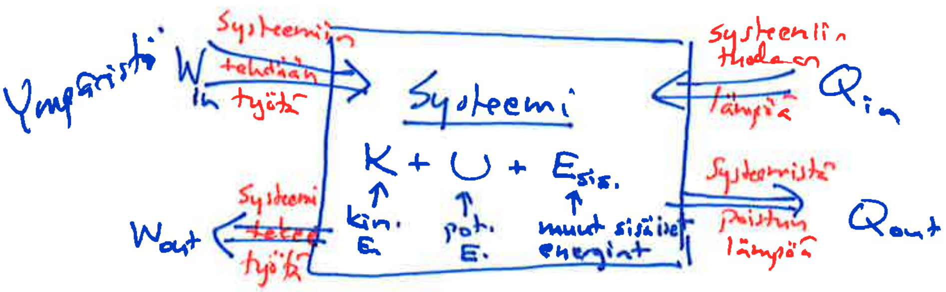
Systeemi A:
$\vec{G}$ ulkoinen voima
⇒ tekee työtä systeemiin
⇒ systeemin energia kasvaa
$E_A = K$ = kineettinen energia

Systeemi B:
ei ulkoisia voimia
⇒ energia säilyy.
⇒ gravitaatiovoima sisäinen
⇒ gravitaatiopotentiaalienergia

⇒ $E_B = K + U$

K: kin. energia, U: potentiaali-energia

Yleisemmin



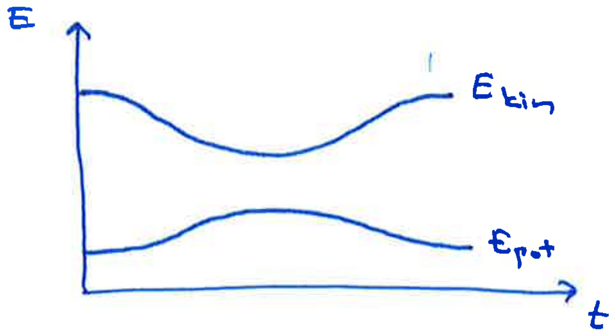
Voi lisätä muitakin energiamuotoja:
säteily, massa, $\vec{E}$, $\vec{B}$, ...

- U = kaikki sisäiset konservatiiviset energiat

E_{sis} = kaikki muut

Esimerkkejä:

Kävely



mkp nousee askeleella noin 5cm

$$\Rightarrow \Delta E_{pot} = mg\Delta h = 80\,kg \cdot 10\,m/s^2 \cdot 0{,}05\,m \approx \underline{\underline{40\,J}}$$

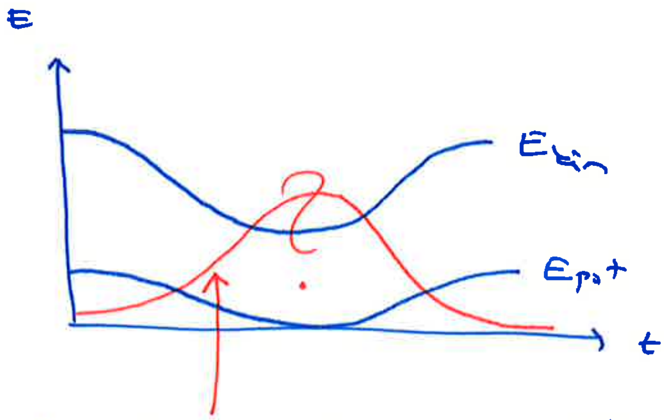
Liike-energia, nopeus ~ 1,5 m/s

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 80\,kg \cdot (1{,}5\,m/s)^2 \approx \underline{\underline{80\,J}}$$

Potentiaalienergian vaihtelut miltei puolet kineettisestä energiasta

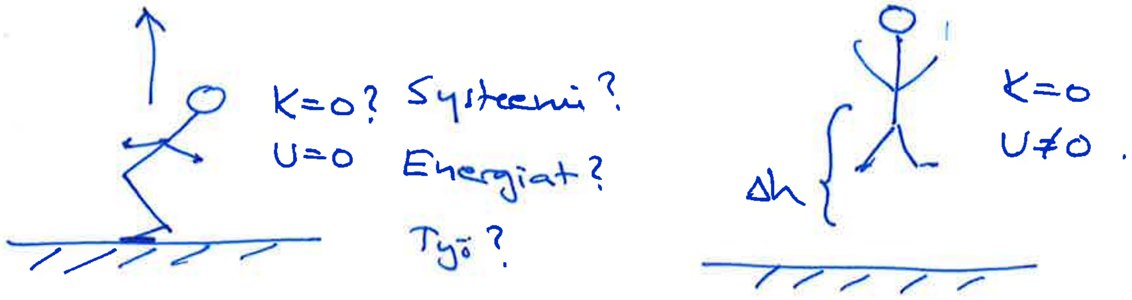
$$\rightarrow \text{liike-energia} \underset{\text{vapautuu}}{\overset{\text{varastoituu}}{\rightleftarrows}} \text{potentiaalienergia}$$

Juoksu



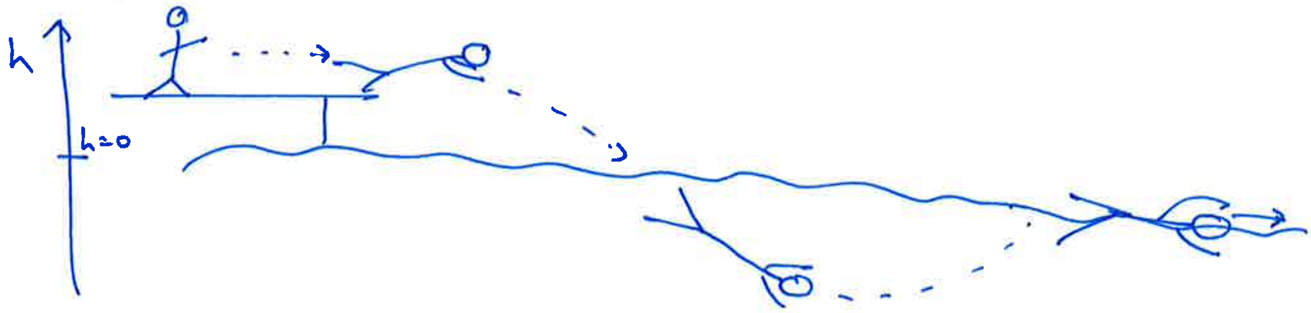
Jänteiden elastiset jännitysominaisuudet
→ varastoi energiaa
(Pelkkä akillesjänne varastoi noin 40J)

Hyppy

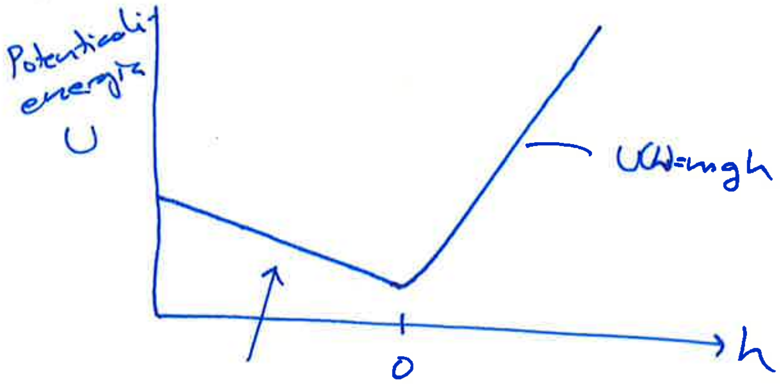


Mistä hyppääjä saa tarvitsemansa energian?

Uinti



Mitä energiamuotoja? Miten energian säilymistä ja erityisesti konservatiivisia voimia hyödynnetään?



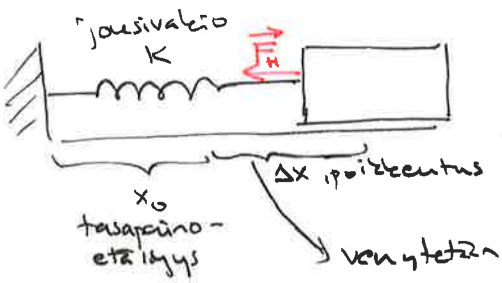
$$U = mgh - \rho V g h$$
$$= (m - \rho V) g h$$

Noste!

Miksi noste on konservatiivinen? (Ainakin suunnilleen.)

ELASTISUUSTEORIAA

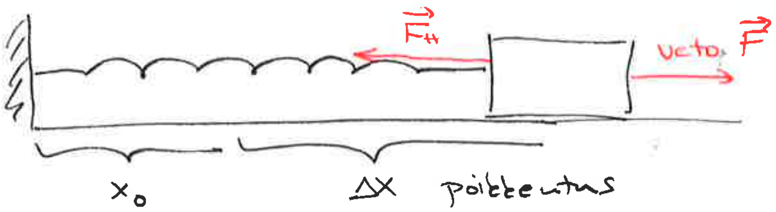
Jousen venytys & Hooken laki

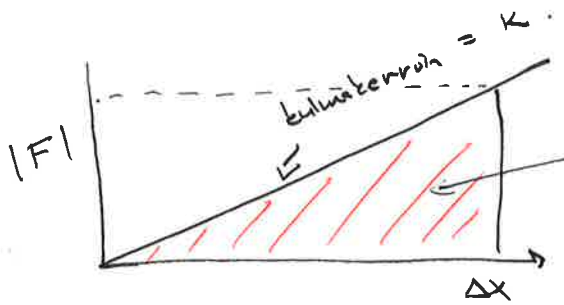


Hooken laki

$$F_H = -k\cdot\Delta x$$

↑ poikkeutus tasapainotilasta





pinta-ala venytyksessä tehtävä työ

$$W = \tfrac{1}{2}\cdot\underbrace{(k\cdot\Delta x)}_{\text{korkeus}}\cdot\underbrace{\Delta x}_{\text{leveys}} = \tfrac{1}{2}k(\Delta x)^2.$$

↑ kolmion pinta-ala

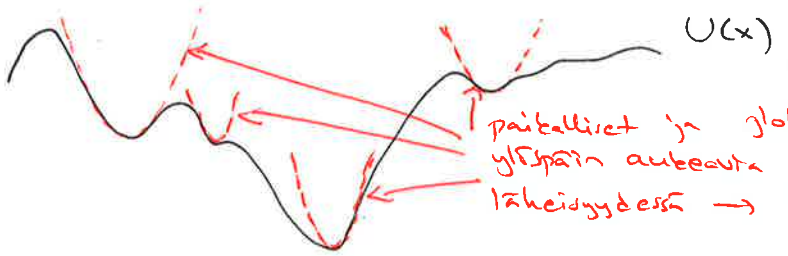
Venytyksen vaatima työ/energia varastoituu jousen potentiaalienergiaksi.

Konservatiivinen voimakenttä

$$\boxed{U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2}$$

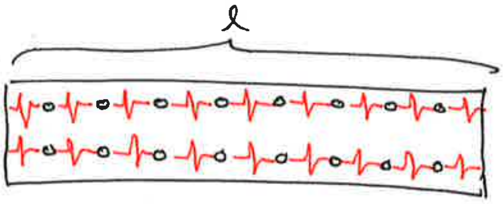
"harmoninen voimakenttä"

(Lähes) mielivaltaisen konservatiivisen voimakentän potentiaalienergia tasapainotilan läheisyydessä on harmoninen:



paikalliset ja globaalit minimit ylöspäin aukeavia paraabeleja tasapainotilan läheisyydessä → harmoninen approksimaatio.

Palkin jousimalli

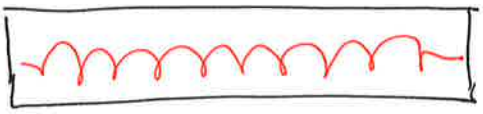


Kappale (palkki) koostuu monesta toisiinsa kytkeytyneistä molekyyleistä. Molekyylien välistä vuorovaikutusta voidaan kuvata yksinkertaisilla jousilla.

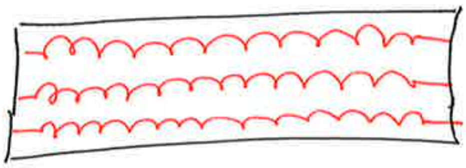
Jos yhden "alkeisjousen" jousivakio on k_0 niin

N peräkkäistä alkeisjousta k_0

vastaa

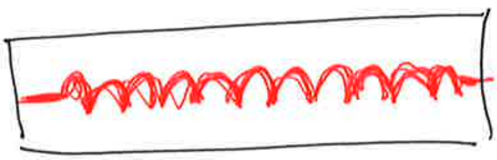


yhtä ekvivalenttia jousta, jonka jousivakio $k_1 = k_0/N$.



M rinnakkaista jousta k_1

vastaa



yhtä ekvivalenttia jousta $k = M \cdot k_1$.

⇒ Palkin "jousivakio"

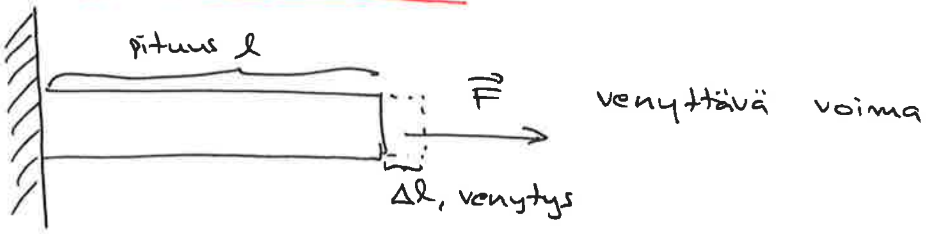
$$\boxed{k = E \cdot \frac{A}{l}}$$

poikkipinta-ala → verrannollinen jousten määrään rinnakkain M.

palkin pituus → verrannollinen peräkkäisten jousten määrään N.

jokin materiaalivakio (Youngin moduli)

Palkin venytys



Mallinnetaan elastisella venytyksellä

Hooken laki

$$\boxed{F = +k \cdot \Delta \ell}$$

$\Delta \ell$: venymä eli pituuden muutos.

F: venyttävä voima

k: "jousivakio"

$+$: tarkastellaan vain suureita ⇒ kaikki suureet nyt positiivisia.

jousimalli:

$$\boxed{k = E \cdot \frac{A}{\ell}}$$

palkin jousivakio

A: poikkipinta-ala

ℓ: pituus

E: materiaalin ominainen kimmomoduli (Youngin moduli)

⇒

$$F = +E \cdot \frac{A}{\ell} \cdot \Delta \ell \quad \Big| : A$$

⇒

$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\text{jännitys} \;=:\; \sigma} = +E \cdot \underbrace{\frac{\Delta \ell}{\ell}}_{\text{suhteellinen venymä} \;=:\; \varepsilon}$$

⇒

$$\sigma = +E \cdot \varepsilon$$

Eli

$$\sigma = E\varepsilon$$

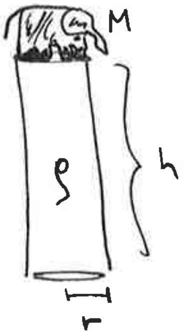
Keskeistä termistöä

σ: jännitys

E: Youngin moduli

ε: suhteellinen venymä

Esimerkki



Mikä oltava betonipylvään säde jotta pylväs kantaisi norsun?

Korkeus $h = 10\,\mathrm{m}$

Betonin tiheys $\rho \simeq 3000\,\mathrm{kg/m^3}$

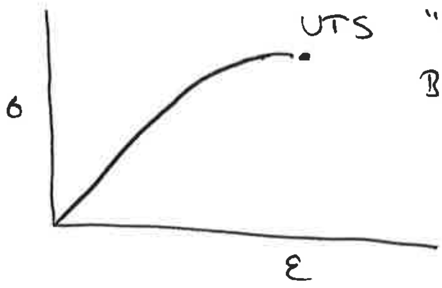
Norsun massa $M \approx 5000\,\mathrm{kg}$

Missä jännitys (puristus) suurin? Pohjalla.

Voima $F = M\cdot g + \underbrace{V\cdot\rho}_{\text{pylvään massa}}\cdot g$, $V = A\cdot h$, $A = \pi r^2$

$$\Rightarrow \text{jännitys} \quad \sigma = \frac{F}{A} = \frac{M\cdot g + V\cdot\rho\cdot g}{A} = \frac{Mg}{\underset{\pi r^2}{A}} + \rho h g.$$

Milloin murtuu?



UTS "Ultimate tensile strength" σ_{crit}.

Betonille $\sigma_{crit} \approx 20\,\mathrm{MPa}$ puristuksessa

⇒ kriittinen (minimi) säde r_{crit} kun

$$\sigma = \sigma_{crit} = \frac{Mg}{\pi r_{crit}^2} + \rho h g$$

$$\Rightarrow \quad r_{crit} = \sqrt{\frac{Mg/\pi}{\sigma_{crit} - \rho h g}} \approx \sqrt{\frac{\frac{5000\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{\pi}}{20\,\mathrm{MPa} - \underbrace{3000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\cdot 10\,\mathrm{m}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}_{3\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}}} \approx \underline{\underline{3\,\mathrm{cm}}}$$

Todellisuudessa 3cm tukin riittää:

betonin "UTS" venytyksessä paljon puristuskestävyyttä pienempi.