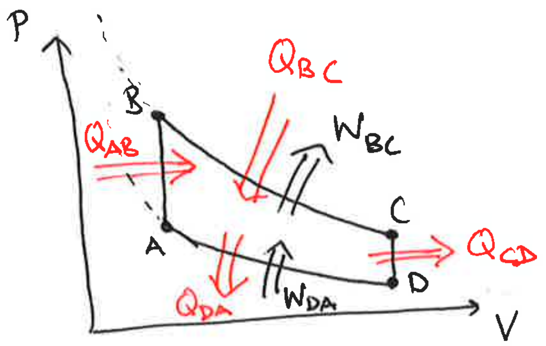
Stirlingin sykli ja ideaalinen (Carnot'n) hyötysuhde



AB: isokoorinen lämmitys
BC: isoterminen laajentuminen
CD: isokoorinen jäähdytys
DA: isoterminen puristus

- Kone tekee syklillä työn W_{BC}, josta osa (W_{DA}:n verran) säilötään koneen vauhtipyörän liikkeeseen, ja jonka turvin vaihcessa D → A kaasua puristetaan.

× BC on isoterminen → T ei muutu → E ei muutu

$$\Rightarrow \quad Q_{BC} = W_{BC} \qquad (\Delta E = Q - W: \ \Delta E = 0 \Rightarrow Q = W)$$

× DA on isoterminen

$$\Rightarrow \quad Q_{DA} = W_{DA}.$$

× koko syklillä palataan alkuun ⇒ $\Delta E_{sykli} = 0$

$$\Delta E_{sykli} = Q_{AB} + \underbrace{Q_{BC} - W_{BC}}_{=0,\ \text{koska } Q_{BC} = W_{BC}} + Q_{CD} + \underbrace{Q_{DA} - W_{DA}}_{=0,\ \text{koska } Q_{DA} = W_{DA}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{Q_{AB} = -Q_{CD}}.$$

tämä lämpö voidaan sopivalla koneen toteutuksella (ns. regeneraattori) kierrättää varastoimalla lämpö Q_{CD} ja palauttaen sen vaiheessa A → B.

Syklillä siis:
- koneeseen tuodaan lämpöä Q_{BC}
- kone tekee hyötytyön $W_{BC} - W_{DA}$
- kone poistaa hukkalämmön Q_{DA}.

Hyötysuhde on

$$\varepsilon = \frac{\text{hyöty}}{\text{panos}} = \frac{\text{tehty hyötytyö}}{\text{~~tuotettu~~ tuotu lämpö}} = \frac{\overbrace{W_{BC}}^{=Q_{BC}} - \overbrace{W_{DA}}^{=Q_{DA}}}{Q_{BC}}.$$

$$= 1 - \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}.$$

Myöhemmin osoitetaan että isotermeillä $Q_{DA} = nC_V \overbrace{T_{DA}}^{\text{vakio } T_D = T_A}$.

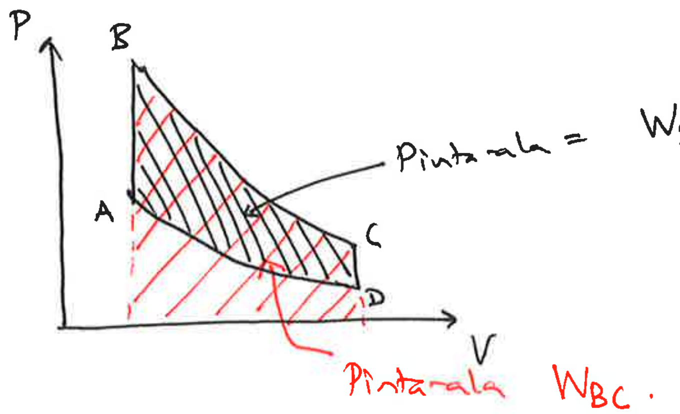
Eli

$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{\cancel{nC_V} T_{DA}}{\cancel{nC_V} T_{BC}} = \boxed{1 - \frac{T_{DA}}{T_{BC}} = \varepsilon}$$

Ideaalisen Carnot'n hyötysuhde.

Huomaa graafinen tulkinta:

$$\varepsilon = \frac{W_{BC} - W_{DA}}{\underbrace{Q_{BC}}_{=W_{BC}}} = 1 - \frac{W_{DA}}{W_{BC}}.$$



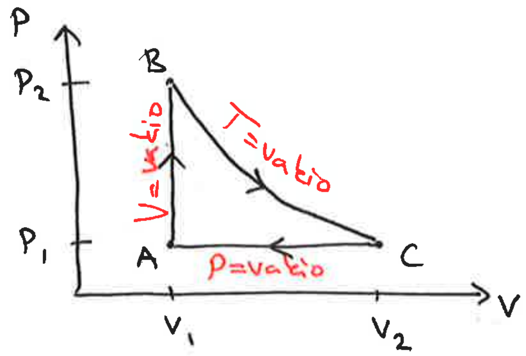
Hyötysuhde $\varepsilon = \dfrac{W_{BC} - W_{DA}}{W_{BC}}$ on yo. pinta-alojen suhde.

Jotta hyötysuhde mahdollisimman suuri, haluamme ko. pinta-alat yhtäsuuriksi.

Raja $\varepsilon \to 0$ edellyttää että $W_{DA} \to 0$. Eli tarvitsisimme

$T_{DA} \to 0$.

Yksinkertainen lämpövoimakone



Kolme prosessia

CA: isobaarinen

AB: isokoorinen

BC: isoterminen

Kuinka paljon kone tekee syklillä työtä ja käyttää lämpöä?

Tarkastellaan kutakin (osa)prosessia erikseen.

CA: $P = \text{vakio}$

- Energia alussa $E_C = n\overset{\frac{d}{2}R}{\overset{\parallel}{C_V}} T_C$; ideaalikaasulaista $P_1V_2 = nRT_C$ $\Rightarrow T_C = \frac{P_1V_2}{nR}$.

$$= \cancel{n}\frac{d}{2}\cancel{R}\frac{P_1V_2}{\cancel{nR}}$$

$$= \frac{d}{2}P_1V_2.$$

- Energia lopussa $E_A = \frac{d}{2}P_1V_1$.

$\Rightarrow$ Energian muutos $\Delta E_{CA} = \frac{d}{2}P_1V_1 - \frac{d}{2}P_1V_2$

$$= \frac{d}{2}P_1(V_1 - V_2)$$

< 0, sillä $V_2 > V_1$.
$\Rightarrow$ systeemin energia pienenee vaikka siihen tehdään työtä (puristetaan)
$\Rightarrow$ lämpöä poistuu.

Tehty työ $W_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} P\,dV = P_1 \int_{V_C}^{V_A} dV$ paine vakio $P = P_1$

$$= P_1(V_A - V_C) \quad ; \quad V_A = V_1,\ V_C = V_2$$

$$= \boxed{P_1(V_1 - V_2) = W_{CA}}$$

ja joka oli siis < 0.
(systeemin tekemä työ < 0, eli systeemiin tehty työ > 0)

Lämpö? $\Delta E_{CA} = Q_{CA} - W_{CA} \Rightarrow Q_{CA} = \Delta E_{CA} + W_{CA}$

$$\Rightarrow Q_{CA} = \frac{d}{2}P_1(V_1 - V_2) + P_1(V_1 - V_2) = \boxed{\left(\frac{d}{2} + 1\right)P_1(V_1 - V_2) = Q_{CA}}$$

Mitä prosessissa $C \to A$ siis oikeastaan tehtiin?

- lämpöä poistui

$$Q_{CA} = \left(\frac{d}{2}+1\right) P_1 (V_1 - V_2) < 0, \quad \text{sillä} \quad V_2 > V_1$$

- kaasu puristui kasaan

– kaasua ei varsinaisesti puristeta kasaan vaan sen annetaan vapaasti puristua. Kun lämpöä poistetaan, lämpötila laskee (koska tehty työ on pienempi) ja paineen ollessa vakio tilavuus pienenee.

∴ $\boxed{\text{Kaasua jäähdytettiin}}$ määrä Q_{CA}, joka on myös "hukkalämmön" määrä.

<u>AB:</u> $V = \text{vakio}$.

- Energia alussa $E_A = \frac{d}{2} P_1 V_1$
- Energia lopussa $E_B = \frac{d}{2} P_2 V_1$

$\Rightarrow$ Energian muutos $\Delta E_{AB} = \frac{d}{2} P_2 V_1 - \frac{d}{2} P_1 V_1 = \frac{d}{2}(P_2 - P_1) V_1$.

Tehty työ $W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV = \boxed{0 = W_{AB}}$ sillä $V_A = V_B = V_1$.

Lämpö? Oltava nyt $\Delta E_{AB} = Q_{AB}$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{AB} = \frac{d}{2}(P_2 - P_1) V_1} \; ; \text{ joka on } > 0 \text{ sillä } P_2 > P_1.$$

Mitä prosessissa $A \to B$ siis tehtiin?

- tilavuus ei muutu
- $\boxed{\text{kaasua lämmitetään}}$

} paine kasvaa.

BC : T=vakio.

Koska T=vakio $\to$ $T_B = T_C =$

$\Rightarrow$ energia alussa $E_B = E_C$ energia lopussa.

$$\underbrace{\frac{d}{2}P_2V_1 \qquad \frac{d}{2}P_1V_2}_{\text{oltava siis } P_2V_1 = P_1V_2}.$$

$\Rightarrow$ Energian muutos $\Delta E = 0$.

Tehty työ $W_{BC} = \int_{V_B = V_1}^{V_C = V_2} P\,dV$ nyt P riippuu tilavuudesta $\Rightarrow P = P(V)$

$$= \int_{V_1}^{V_2} P(V)\,dV$$

; ideaalikaasulaista $PV = nRT$

$\Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$ vakio, koska T=vakio

esim. $T = T_C = \frac{P_1V_2}{nR}$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_B}{V}\,dV, \quad T_B = \frac{P_1V_2}{nR}$$

$$= P_1\int_{V_1}^{V_2} \frac{V_2}{V}\,dV = P_1V_2 \underbrace{\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\,dV}_{\ln V_2/V_1}.$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{BC} = P_1V_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Lämpö? Koska $\Delta E_{BC} = 0 = Q_{BC} - W_{BC}$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{BC} = W_{BC}}.$$

Tässä vaiheessa kone tekee hyötytyötä.

Mitä prosessissa siis tehdään?

- vaiheen A→B lämmitystä jatketaan kun lämpötila on saavuttanut maksimiarvon
- vaikka lämpöä edelleen tulee ($Q_{BC} > 0$) ei lämpötila enää nouse koska kaasun annetaan laajentua

Kolmivaihekoneemme hyötysuhde?

Kone teki työtä vaiheessa $B \to C$

Koneeseen tehtiin työtä vaiheessa $C \to A$

$$\varepsilon = \frac{\overset{>0}{W_{BC}} + \overset{<0}{W_{CA}}}{\underbrace{Q_{AB} + Q_{BC}} + \cancel{Q_{CA}}}$$

Koneeseen tuotiin lämpöä vaiheissa $A \to B$ ja $B \to C$

Vaiheessa $C \to A$ koneesta poistui lämpöä, joka tulkitaan hukkalämmöksi.

Sijoitetaan arvot:

$$\varepsilon = \frac{p_1 V_2 \ln(V_2/V_1) + p_1(V_1 - V_2)}{\frac{d}{2}(p_2 - p_1)V_1 + p_1 V_2 \ln(V_2/V_1)}$$

Valitaan jotain lukuarvoja.

Olkoon puristussuhde $\frac{V_2}{V_1} = e \approx 2.7$ $\left(\text{jotta } \ln\frac{V_2}{V_1} = 1\right)$

Paineet ovat riippumattomat, sillä isotermisyysehto prosessille BC antoi $p_1 V_2 = p_2 V_1$.

$$\Rightarrow p_2 = p_1 \cdot \underbrace{\frac{V_2}{V_1}}_{e} \Rightarrow p_2 = e \cdot p_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{p_1 V_2 \overbrace{\ln e}^{1} + p_1 V_1 - p_1 V_2}{\frac{d}{2}(p_2 V_1 - p_1 V_1) + p_1 V_2 \underbrace{\ln e}_{1}}$$

supista $p_1 V_1$:llä

$$= \frac{\cancel{V_2/V_1} + 1 - \cancel{V_2/V_1}}{\frac{d}{2}\left(\underbrace{\frac{p_2}{p_1}}_{e} - 1\right) + \underbrace{\frac{V_2}{V_1}}_{e}}$$

$$= \frac{1}{\frac{d}{2}(e-1) + e}$$

olkoon kyseessä vielä yksiatominen kaasu (esim. He) $\Rightarrow d = 3$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}(e-1) + e} = \frac{1}{\frac{5}{2}e - 3/2} \approx \frac{2}{13.5 - 3} = \frac{2}{10.5} \approx \underline{\underline{0.2}}.$$

aika huono. vrt. Carnot ε_{ideal}

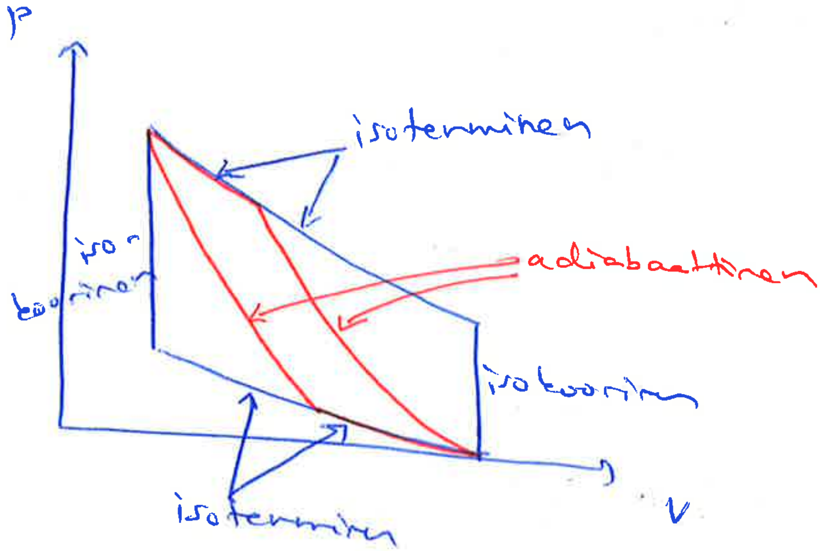
Vastaavalle Carnot'n koneelle olisi

$$\varepsilon_{ideal} = 1 - \frac{T_H}{T_L} \quad T_H = P_1V_2/nR, \quad T_L = \frac{P_1 V_1}{nR}$$

$$= 1 - \overset{1/e}{\frac{V_2}{V_1}} = \frac{e-1}{e}$$

$$\approx \frac{1.7}{2.7} \approx \underline{\underline{0.6}}$$

Stirling vs Carnot sykli



adiabaattiset prosessit korvaavat isokooriset prosessit
⇒ ei lämmön siirtoa
⇒ ei tarvetta regeneraattorille.

Brayton