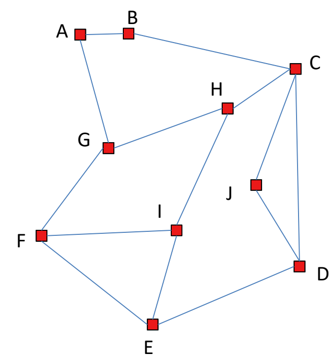
Laskuharjoitus 4. Verkkojen mitoitus

Tehtävä 4.1. (1 p.)

Kysymys



Oheisessa verkossa jokaisen solmupisteparin välille etsitään mahdollisimman monta täysin toisistaan riippumatonta reittiä. Reitit valitaan siten että ne ovat mahdollisimman lyhyitä. Vaihtoehtoisten reittien tulee kulkea kokonaisuudessaan eri jänteiden ja solmupisteiden kautta ja niiden tulee olla ennalta määriteltyjä eli ennalta määriteltyä reittiä ei voida muuttaa vikatapauksissa. Kahden solmupisteen saatavuus riippuu siis sekä vaihtoehtoisten reittien määrästä että niiden pituuksista mitattuna linkkien määrällä. Jokaisen jänteen saatavuus on 99,7 % ja jänteiden vikaantumiset tapahtuvat toisistaan riippumatta. Solmupisteet oletetaan täysin luotettaviksi.

a) Mikä on oheisessa verkossa niiden kahden solmupisteen välisen yhteyden saatavuus, jonka saatavuus on alhaisin?
b) Kuinka pitkään keskimäärin yhden vuoden aikana kyseinen alhaisimman saatavuuden yhteysväli on poissa käytöstä?

Ratkaisu

Tehtävässä tarkasteltiin oheista verkkoa:

Kun jokaisen linkin saatavuus on sama, olennaista on järjestyksessä:

1) vaihtoehtoisten reittien määrä
2) lyhimmän reitin pituus linkkeinä ja
3) vaihtoehtoisen reitin pituus linkkeinä.

Jokaisen solmuparin välillä on vähintään kaksi eri reittivaihtoehtoa, joten tässä pyritään etsimään solmupari, jolla on vain kaksi reittivaihtoehtoa siten, että lyhyempi reitti on pitkä. Havaitaan, että kolmella hypyllä pääsee mistä tahansa solmusta mihin tahansa toiseen solmuun. Näistä yritetään sitten etsiä solmupari, jolla vaihtoehtoinen reitti on pisin.

Näillä kriteereillä hankalin on solmupari A ja J, jolloin lyhimmät toisistaan riippumattomat reitit ovat

A-B-C-J ja A-G-F-E-D-J

Toisaalta, jos solmut oletetaan täysin luotettaviksi, pitemmäksi vaihtoehtoiseksi reitiksi käy myös A-G-H-C-D-J. Käytännössä vaihtoehtoisten ennalta ohjelmoitujen reittien tulee kulkea eri solmujen kautta, koska vikoja voi esiintyä myös solmuissa.

Lyhemmän reitin saatavuus on = $0{,}997^3 = 0{,}9910$ ja pidemmän reitin saatavuus on $0{,}997^5 = 0{,}9851$. Todennäköisyys, että molemmat reitit ovat viallisia yhtä aikaa, on $(1 - 0{,}9910) \cdot (1 - 0{,}9851) = 0{,}000134$. Tästä saadaan saatavuudeksi A:n ja J:n välille $1 - 0{,}000134 = 0{,}99987$.

b-kohdassa saadaan vastaukseksi 0,000134*365*24*60 = 70 min/vuosi.

Tehtävä 4.2. (2 p.)

Kysymys

Puhelinpalvelujärjestelmään, jossa on kaksi palvelupaikkaa, tulee keskimäärin yksi puhelun 2,5 minuutin välein. Jos kaikki asiakaspalvelijat ovat varattuina, puhelu katkaistaan välittömästi. Oletetaan, että tästä kohtelusta suivaantuneena asiakkaat eivät koskaan yritä uudestaan. Keskimääräinen palveluaika onnistuneille yrityksille on 75 sekuntia.

a. Mikä on puhelun estymisen todennäköisyys?

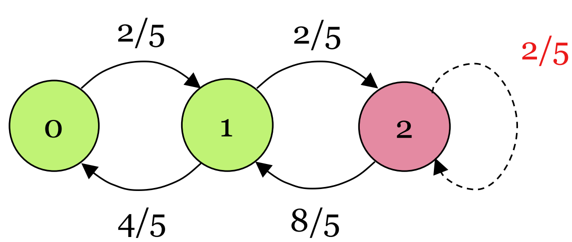
b. Millä todennäköisyydellä molemmat palvelupaikat ovat vapaita?

c. Koska estymisen todennäköisyys on sangen suuri, palveluntarjoaja harkitsee kahta mahdollisuutta: 1) joko lisätä 1 palvelupaikka tai 2) lyhentää palveluaikaa yhden kolmasosan verran eli siis arvoon 50 s. Kumpi vaihtoehto on parempi, kun kriteerinä on estymisen todennäköisyys?

Ratkaisu

Tehtävässä havaitaan, että mahdollisia tiloja ovat 0, 1 ja 2, jossa lukumäärä siis kertoo, kuinka monta asiakasta on palveltavana. Koska jonotusmahdollisuutta ei ole, niin enempää tiloja ei ole. Kun asiakkaat saapuvat riippumatta toisistaan, vain vierekkäisten tilojen välillä voi tapahtua siirtymisiä.

Asiakkaita tulee keskimäärin 1/2,5 = 2/5 minuutissa ja keskimääräinen palveluaika on 75/60 = 5/4 minuuttia, jolloin yhden asiakkaan palvelun päättymisintensiteetti on 4/5 minuutissa. Tällöin saadaan seuraava tilakaavio, kun aikayksikkö on minuutti:



Huomatkaa, että kun palveltavana on kaksi asiakasta ja palveluaika on 5/4 minuuttia, keskimäärin palvelun loppumisia tapahtuu 2/(5/4) = 8/5 kertaa minuutissa. Tässä ”kun” tarkoittaa sitä, että laskelmassa huomioidaan vain ne ajankohdat, jolloin palveltavana on täsmälleen kaksi asiakasta.

Tilojen todennäköisyydet voidaan laskea merkitsemällä siirtymät vasemmalta oikealle yhtä suuriksi kuin oikealta vasemmalle, eli

$\frac{2}{5} \cdot P(0) = \frac{4}{5} \cdot P(1)$ ja $\frac{2}{5} \cdot P(1) = \frac{8}{5} \cdot P(2)$

Jossa siis P(0) on tilan 0 todennäköisyys, P(1) tilan yksi todennäköisyys ja P(2) on tilan 2 todennäköisyys. Lisäksi tiedetään, että jossain tilassa järjestelmä on varmasti, joten näiden todennäköisyyksien summa on yksi. Näistä voidaan ratkaista todennäköisyydet ja tulokseksi saadaan:

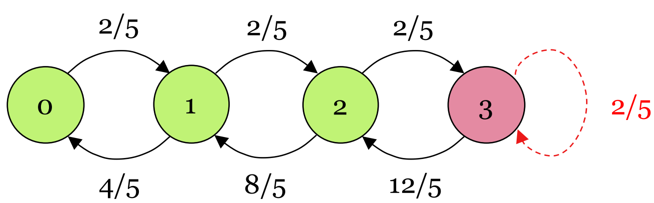
$$P(0) = \frac{8}{13} = 0{,}6154,\ \ P(1) = \frac{4}{13} = 0{,}3077\ ja\ P(2) = \frac{1}{13} = 0{,}0769.$$

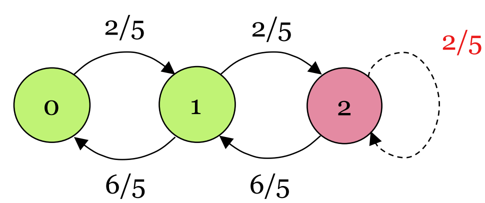
Estymisen todennäköisyys on tässä tilan 2 todennäköisyys eli 7,69 %.

Huomatkaa erityisesti, että kun oletetaan että asiakkaat saapuvat satunnaisilla hetkillä, saapuva asiakas ”näkee” tilojen keskimääräiset todennäköisyydet eli estymisen todennäköisyys on sama kuin todennäköisyys että kaikki palvelupaikat ovat varattuina.

Vastaavasti todennäköisyys, että molemmat palvelupaikat ovat vapaita, on 61,5 %.

Lopuksi c-kohdan ajatuksena on vertailla kahta ratkaisua, joissa kokonaispalvelukapasiteetti on sama eli 2/min eli 120 asiakasta tunnissa (silloin kun asiakkaita palvellaan jatkuvasti). Tilakaavioiksi saadaan:





Näistä voidaan laskea estojen todennäköisyydet:

- Kahdella palvelupaikalla tilojen todennäköisyydet ovat 18/25, 6/25 ja 1/25 eli esto = 1/25 = 4 %.
- Kolmella palvelupaikalla tilojen todennäköisyydet ovat 48/79, 24/79, 6/79 ja 1/79 eli estymisen todennäköisyys = 1/79 = 1,27 %.

Huomioita

Vastaukset tehtävän kohtiin a ja c saa myös suoraan soveltamalla Erlangin estokaavaa eli kaavaa 4.5 oppimateriaalissa.

Vaikka esto kolmella hitaammalla palvelupaikalla on pienempi, niin kahden nopeamman palvelupaikan tapauksessa palvelu on vastaavasti nopeampaa. Kumpi näistä vaihtoehdoista on siis lopulta parempi, riippuu siitä, miten asiakkaat painottavat estymistä ja palvelun nopeutta. Looginen ratkaisu estymiseen on usein jonotusmahdollisuus, jota käsitellään myöhemmin tällä kurssilla.