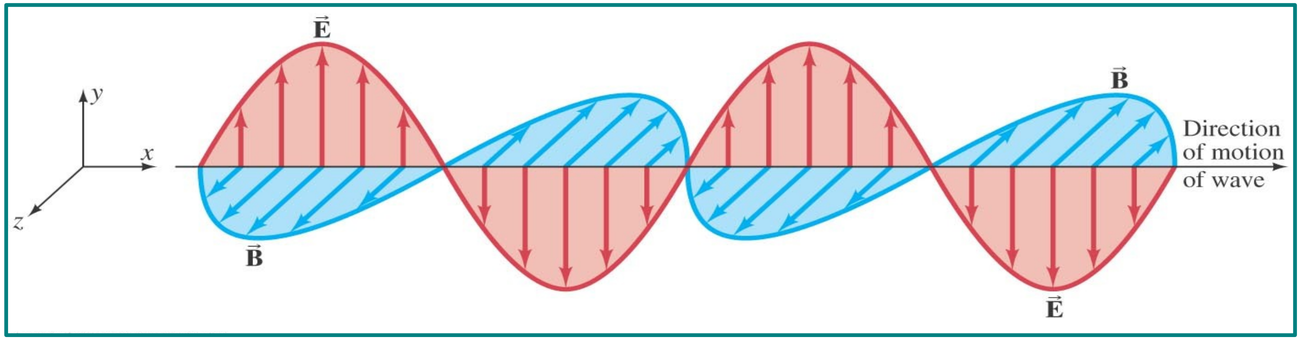
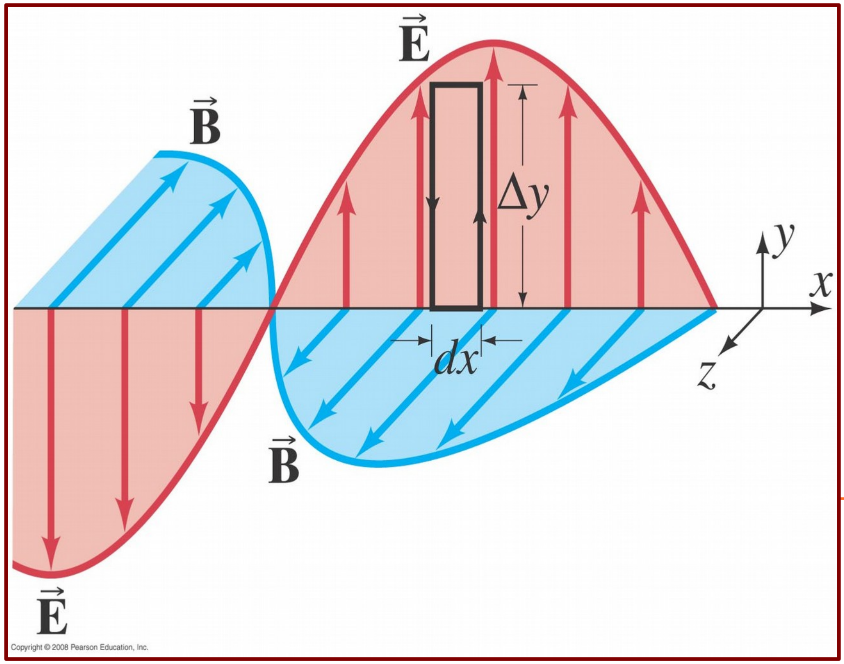
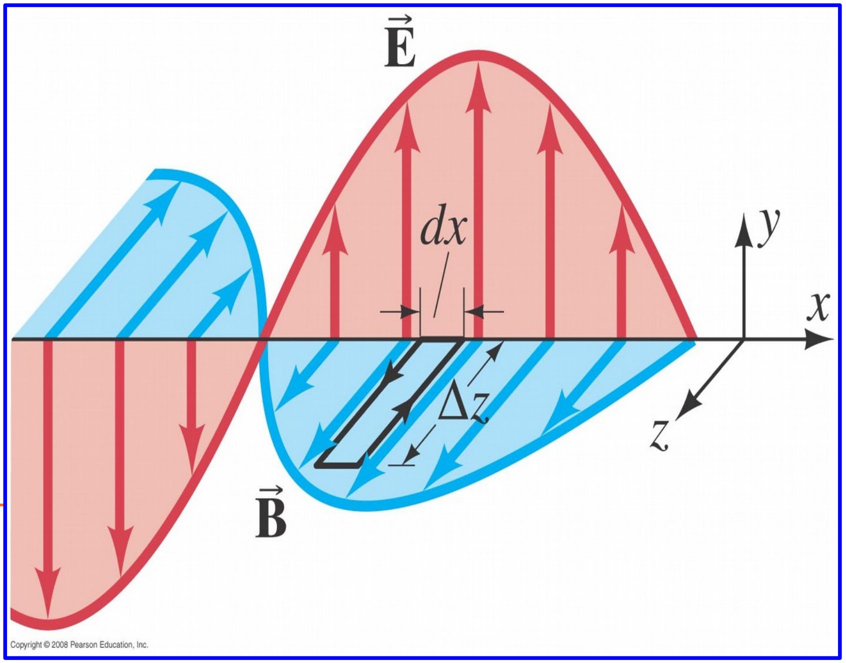
Maxwell ja hänen yhtälönsä – mitä seurasi?

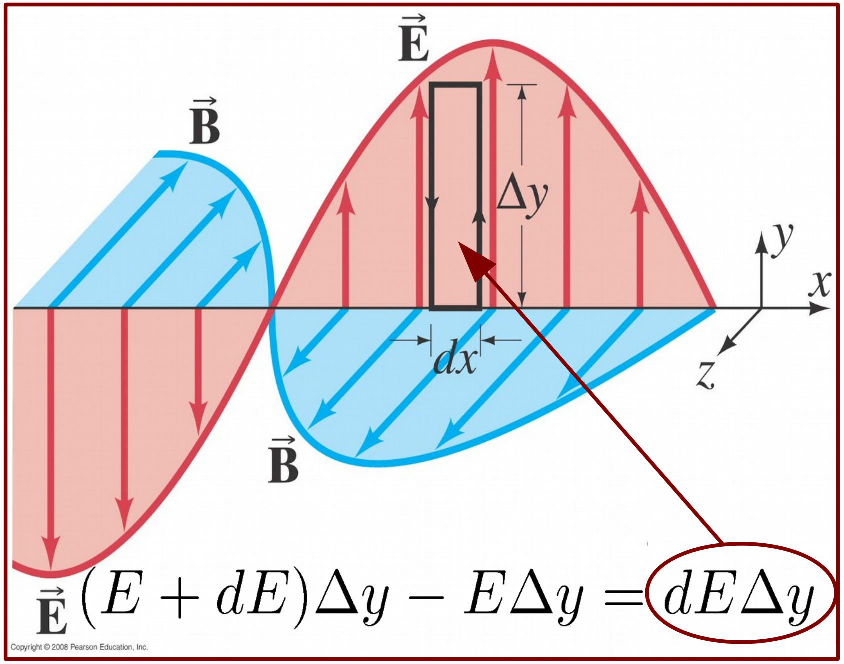


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

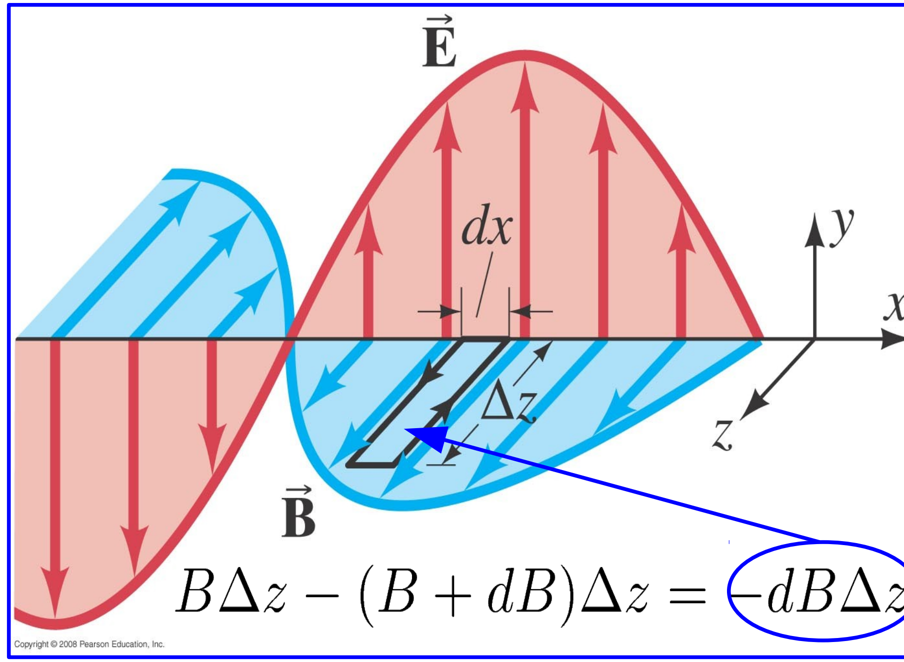




Maxwellin yhtälöistä aaltoyhtälöön



$$(E + dE)\Delta y - E\Delta y = dE\Delta y$$



$$B\Delta z - (B + dB)\Delta z = -dB\Delta z$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$dE\Delta y = -\frac{dB}{dt} dx\Delta y$$

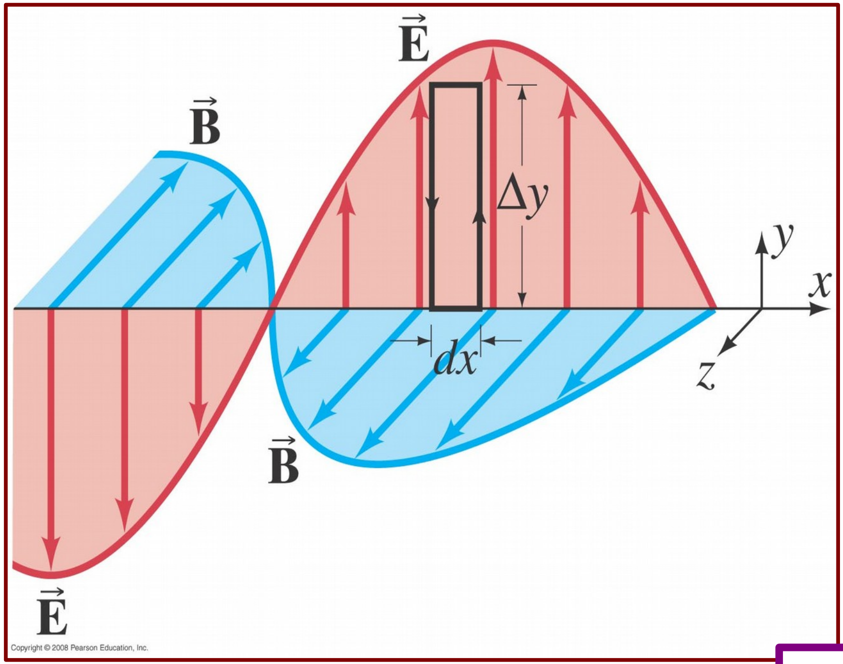
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

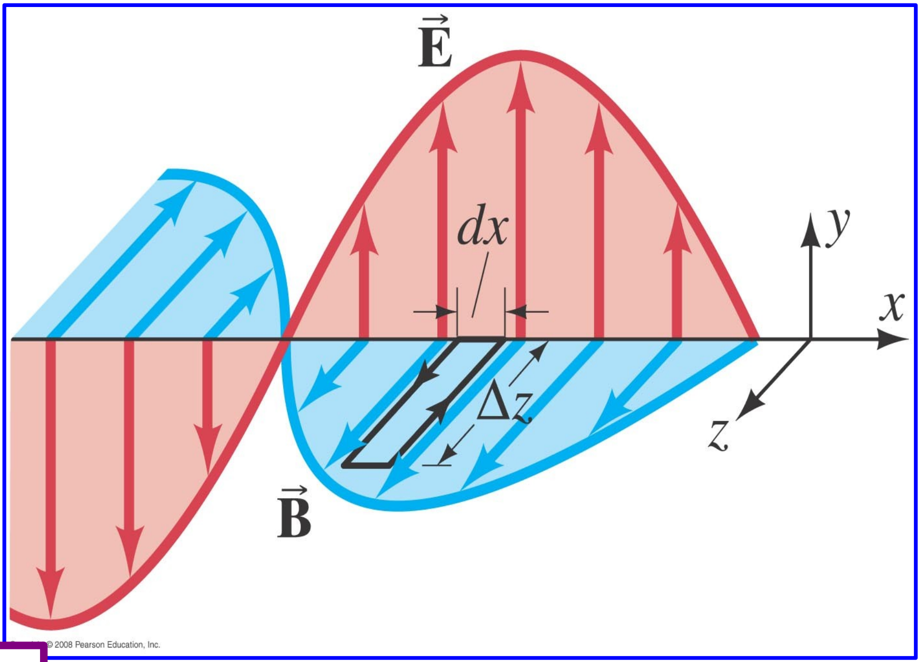
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$-dB\Delta z = \mu_0\epsilon_0 \frac{dE}{dt} dx\Delta z$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Maxwellin yhtälöistä aaltoyhtälöön





Yrite:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\begin{cases} E = E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B = B_0 \sin(kx - \omega t) \end{cases}$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$kE_0 \cos(kx - \omega t) = \omega B_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$kB_0 \cos(kx - \omega t) = \mu_0 \epsilon_0 \omega E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = v$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792 \, \frac{\text{km}}{\text{s}} = c$$

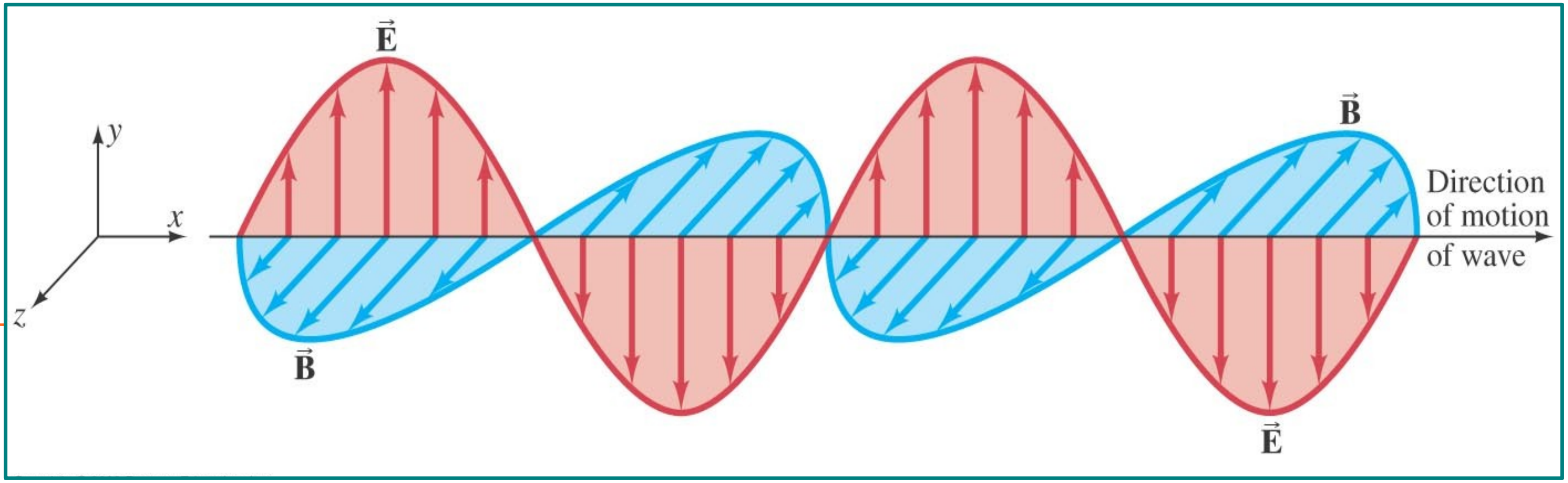
$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{k} = \mu_0 \epsilon_0 v$$

Maxwell ja hänen yhtälönsä – seurasi sähkömagneettinen aalto

Miksi sähkömagneettinen aalto on hämmästyttävä:

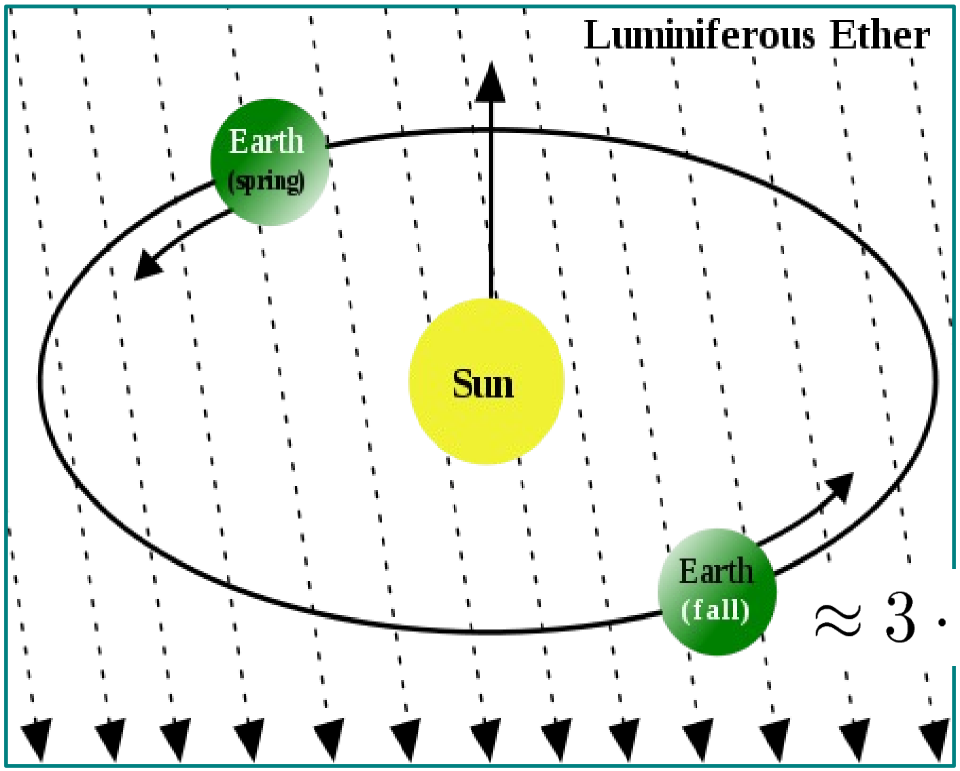
1. Sähkömagneettinen aalto ei tarvitse liikkuakseen *väliainetta*, se syntyy sähkö- ja magneettikenttien vuorovaikutuksesta.
2. Sähkömagneettinen aalto etenee tyhjiössä *valonnopeudella*, joka on *suurin mahdollinen signaalinopeus.*

Kannattaa huomata, että sekä 1. että 2. tulivat tunnetuiksi vasta Maxwellin jälkeen.

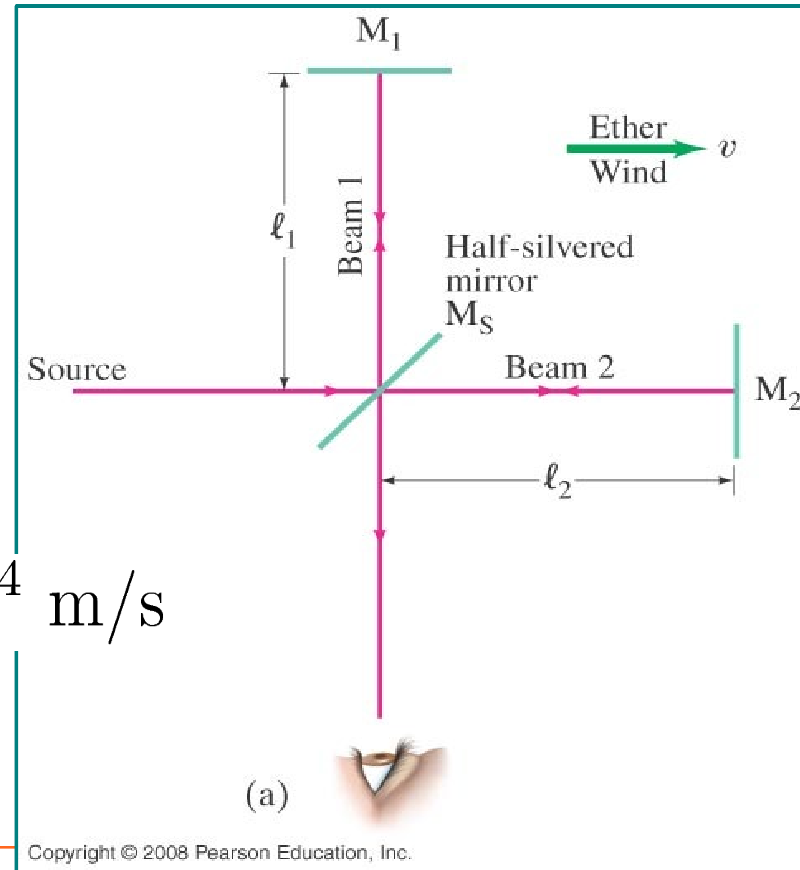


Sähkömagneettinen aalto: hämmästys

Michelsonin ja Morleyn koe (1881, 1887): eetteriteorian loppu



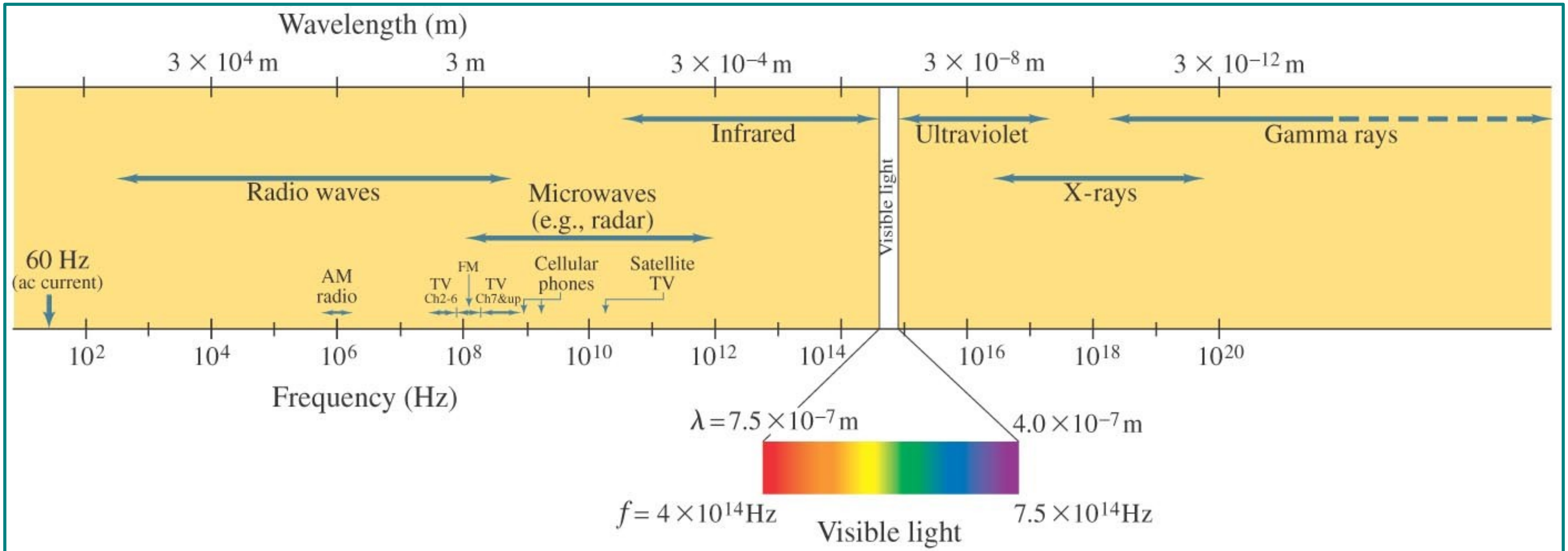
$\approx 3 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}$



Jos valo liikkuisi eetterissä, niin maassa mitattu valonnopeus riippuisi maapallon liikkeestä suhteessa eetteriin.

Tulos: valonnopeus ei riipu maan liikkeestä!

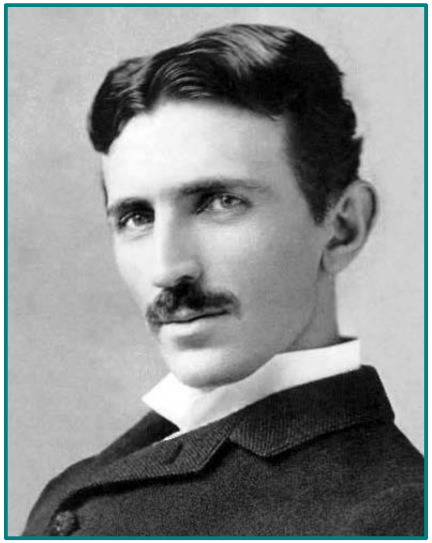
Sähkömagneettinen aalto: spektri



Sähkömagneettinen aalto: sovellukset

- SM-aallon synnyttäminen ja havaitseminen (Heinrich Hertz, 1887)
- Langaton lennätin (Nikola Tesla, 1894)
- Langaton lennätin toisen kerran (Guglielmo Marconi, 1897)
- Ääniradio (Reginald Fessenden, 1906)
- Televisio (1920-luku)

Hertz



Tesla

Marconi

Fessenden

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Sähkömagneettinen aalto: ominaisuudet

Sähkö- ja magneettikentällä on omat energiatiheytensä.
Sähkömagneettisessa aallossa nämä molemmat ovat läsnä.

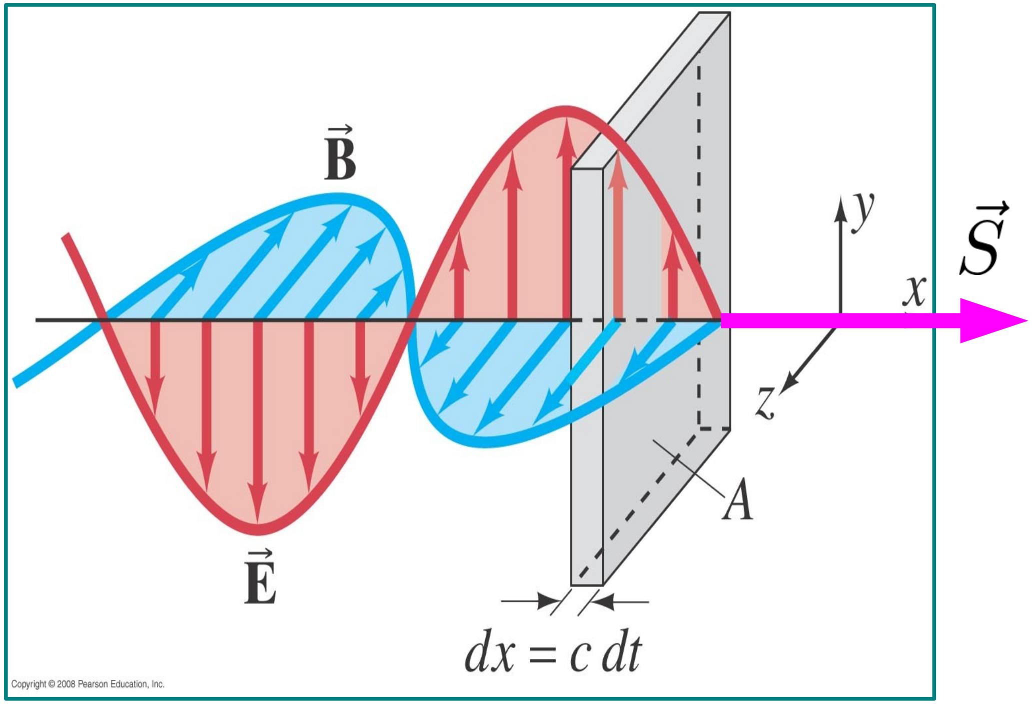
$$B = \frac{E}{c}$$

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \begin{cases} \epsilon_0 E^2 \\ \dfrac{B^2}{\mu_0} \\ \sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}} EB \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Kentän kokonaisenergia jakautuu tasan sähkö- ja magneettikentän välille.

Sähkömagneettinen aalto: energian kuljetus



$$dV = A\,dx = Ac\,dt$$

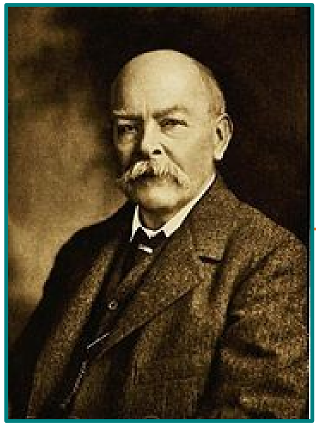
$$dU = u\,dV$$

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2$$

$$= \frac{cB^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}$$

Pinta-alayksikön läpi kulkeva energia hetkellä t

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$$ Poyntingin vektori



John Henry Poynting (1852-1914)

Intensiteetti

Sinimuotoisille aalloille:

$$\overline{S} = \overline{|\vec{S}|} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_{\mathrm{rms}} B_{\mathrm{rms}}}{\mu_0}$$

Sähkömagneettinen aalto: liikemäärän kuljetus

Sähkömagneetiinen aalto kuljettaa energian ohella liikemäärää.
Kun aalto osuu pintaa, kohdistuu tähän voima:

$$F = dp/dt$$

Jos aalto *absorboituu* täysin: $\Delta p = F\Delta t = \Delta U/(\Delta x/\Delta t) = \Delta U/c$

Jos aalto *heijastuu* täysin: $\Delta p = 2\Delta U/c$

$$\boxed{F = \Delta U/\Delta x}$$

Joten *säteilypaine* on: $$P = \frac{\overline{F}}{A} = \frac{1}{A}\overline{\frac{dp}{dt}} = \frac{1}{Ac}\overline{\frac{dU}{dt}} = \frac{\overline{S}}{c}$$

tai aallon heijastuessa: $$P = \frac{2\overline{S}}{c}$$

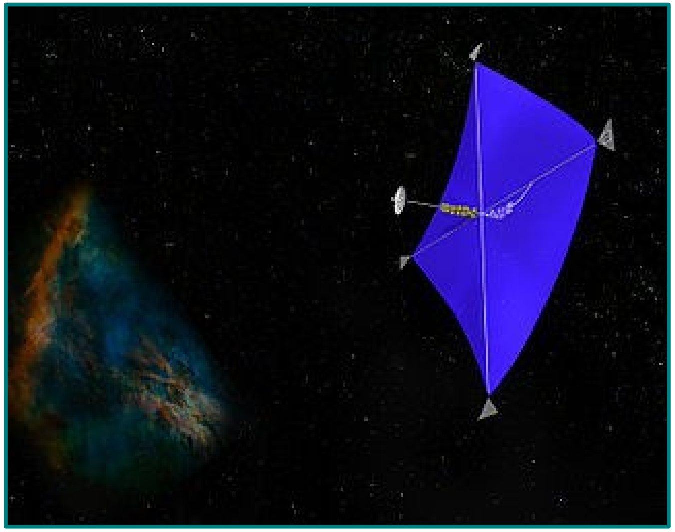
Sähkömagneettinen aalto: liikemäärän kuljetus

Aurinko säteilee maanpinnalle energiaa noin 1000 W/m^2.
Kuinka suuren paineen tämä aiheuttaa?

Approksimoidaan hieman:

$$P \approx \frac{\overline{S}}{c} = \frac{1000\ \mathrm{W/m^2}}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} \approx 3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}$$

Sähkömagneettinen aalto: avaruuspurje



Oletetaan:

- purjeen koko 1 km x 1 km
- purje täysin heijastava

Kuinka paljon voimaa tällaiseen purjeeseen kohdistuu maan etäisyydellä auringosta?

$$P = \frac{2\overline{S}}{c} = 6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2} \qquad F = PA = 6\ \mathrm{N}$$

Paljonko 5000 kg:n painoisen avaruusaluksen nopeus kasvaisi vuodessa?

$$a = F/m = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2} \qquad v - v_0 = at = 4 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}$$

Paljonko alus kulkisi tässä ajassa, jos se lähtisi levosta?

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 6 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$$

Noin 4 kertaa etäisyys maasta aurinkoon

Virta ja vastus

Jännite *V* siirtää varauksia. Syntyy virta $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$

Materiaali kuitenkin vastustaa virran kulkua. Ilmiötasolla tämän selittää Ohmin laki: $V = RI$

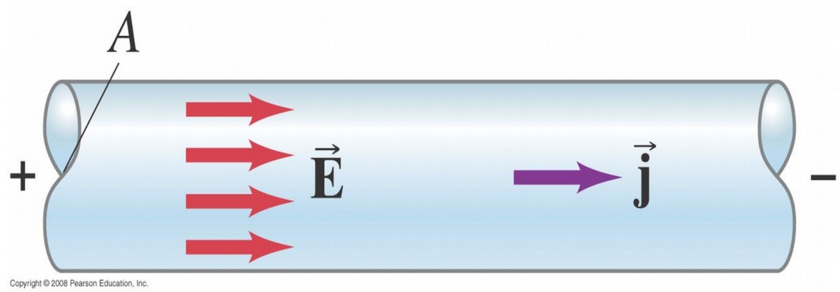
Johtimen resistanssi R riippuu *poikkipinta-alasta* A, *pituudesta* ℓ ja *resistiivisyydestä* ρ:

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

Georg Simon Ohm (1789-1854)

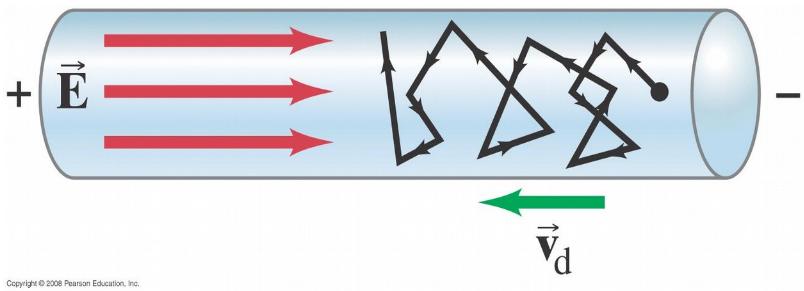
Virran teho P on: $P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} V = IV$

Mikroskooppinen virta



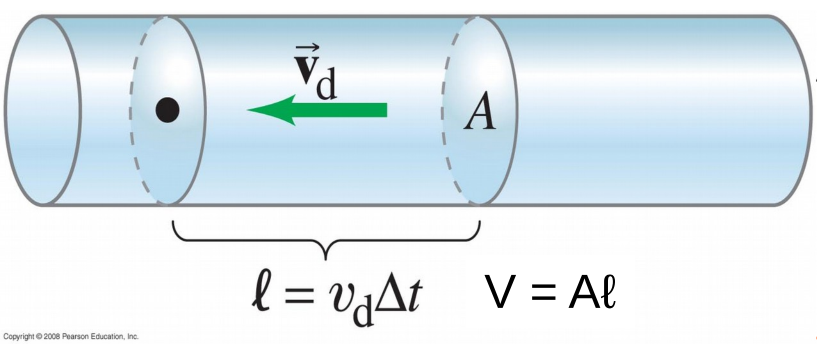
Virrantiheys **j**: $I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$

Jos j on vakio: j = I/A



Varauksenkuljettajien ajautumisnopeus $\mathbf{v}_d$

n = N/V = varauksenkuljettajien tiheys



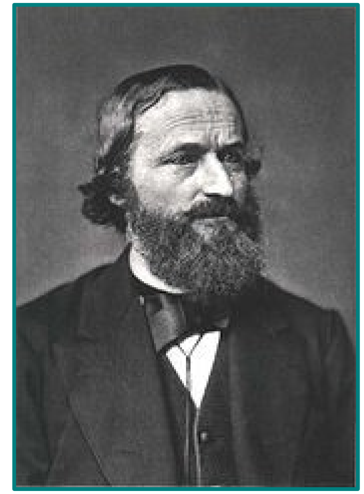
$$\Delta Q = (nV)(-e) = -(nAv_d\Delta t)(e)$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -neAv_d$$

$\boxed{j = -nev_d}$ eli $\boxed{\vec{j} = -ne\vec{v}_d}$

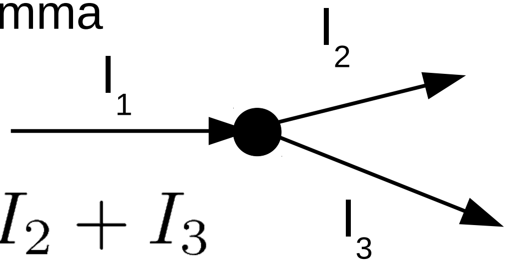
Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Virta ja vastus



Gustav Robert Kirchhoff
(1824 – 1887)

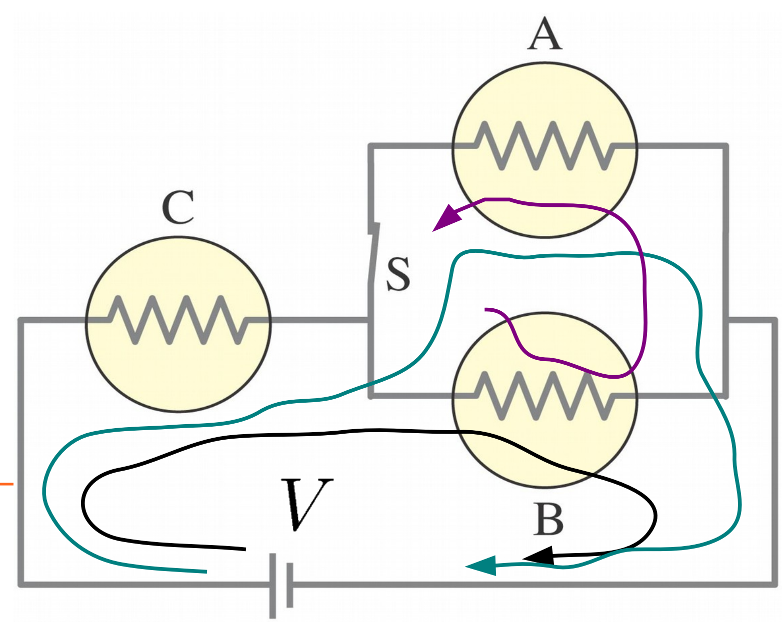
1. Varaus säilyy → *Kirchhoffin 1. sääntö* eli lähtvien virtojen summa on tulevien virtojen summa



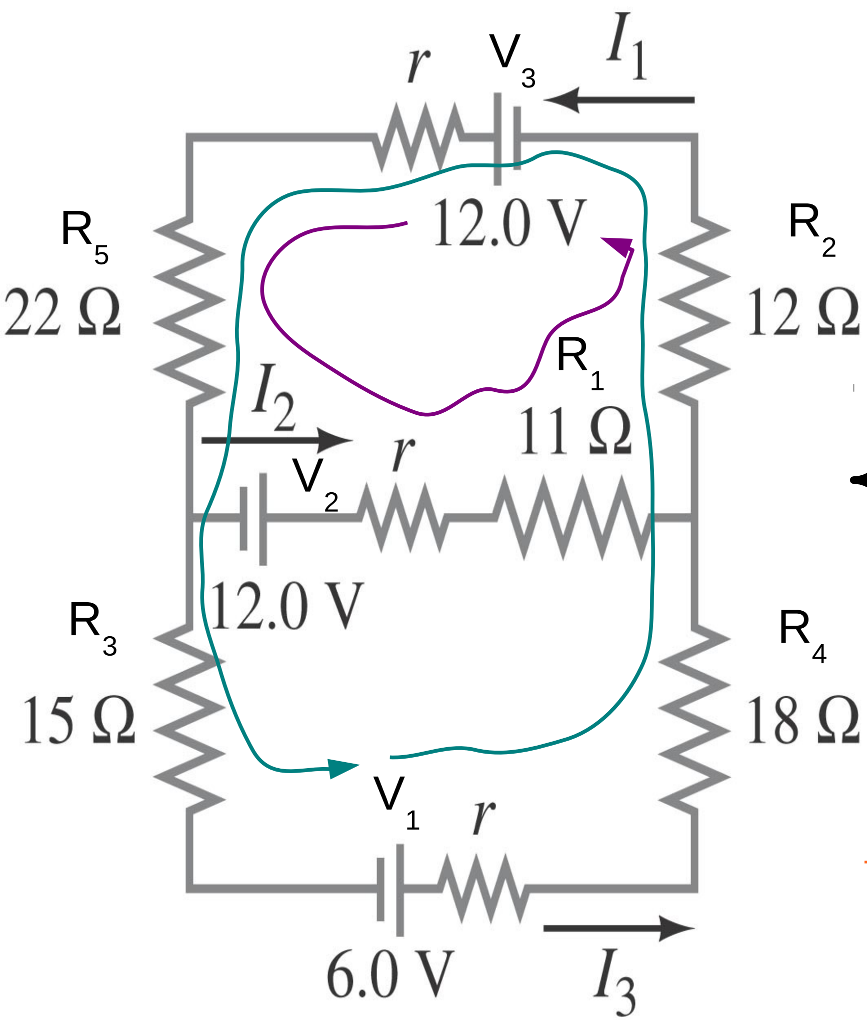
$$I_1 = I_2 + I_3$$

2. Energia säilyy → *Kirchhoffin 2. sääntö* eli potentiaalin muutos kierrossa on nolla

$$\begin{cases} V + V_C + V_B = 0 & \text{(i)} \\ V + V_C + V_A = 0 & \text{(ii)} \\ V_B - V_A = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} (r+R_2+R_5) & (r+R_1) & 0 \\ (r+R_2+R_5) & 0 & (r+R_3+R_4) \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2+V_3 \\ V_1+V_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



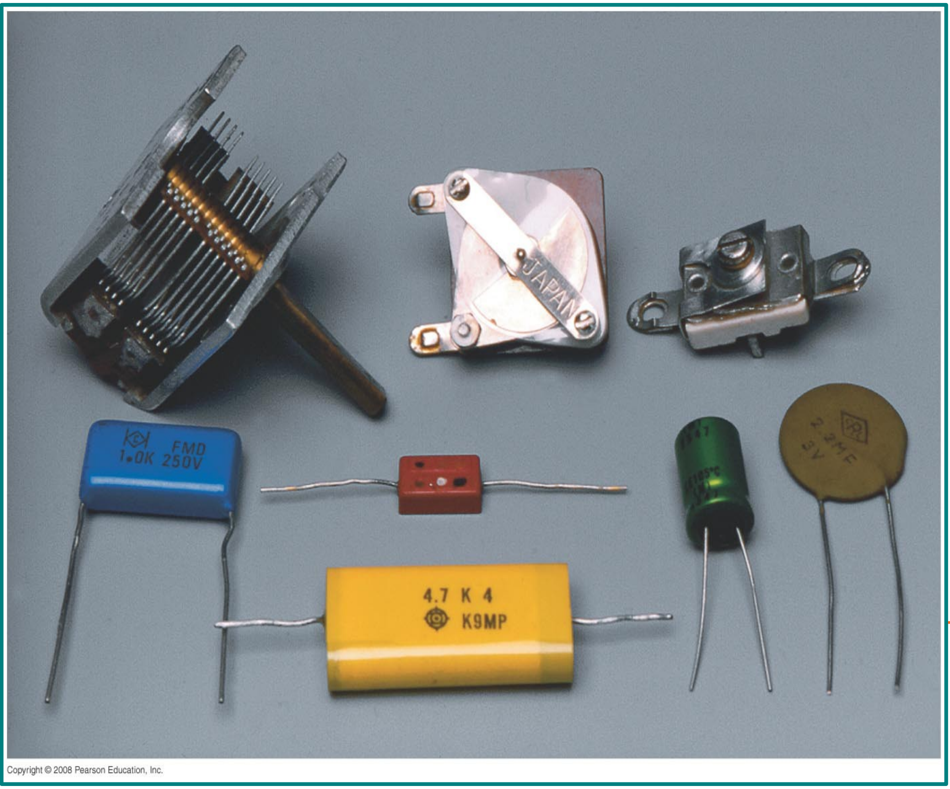
Kirchhoffin 1. sääntö: $I_1 = I_2 + I_3$

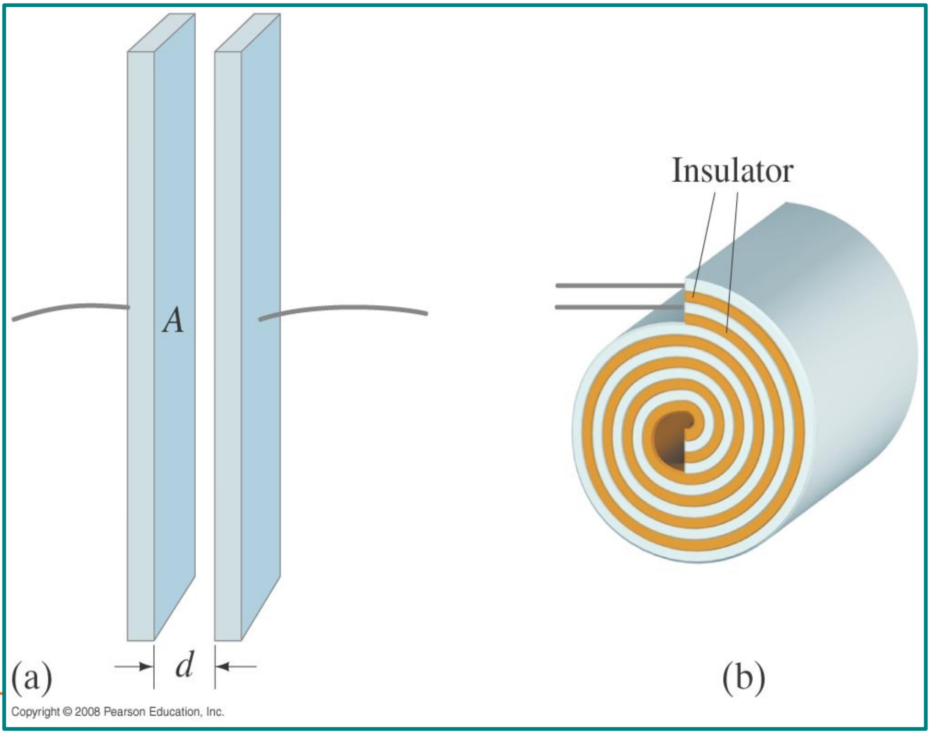
Kirchhoffin 2. sääntö:

$$\begin{cases} V_3 - r I_1 - R_5 I_1 + V_2 - r I_2 - R_1 I_2 - R_2 I_1 = 0 \\ V_1 - r I_3 - R_4 I_3 - R_2 I_1 + V_3 - r I_1 - R_5 I_1 - R_3 I_3 = 0 \end{cases}$$

Kapasitanssi & kondensaattori

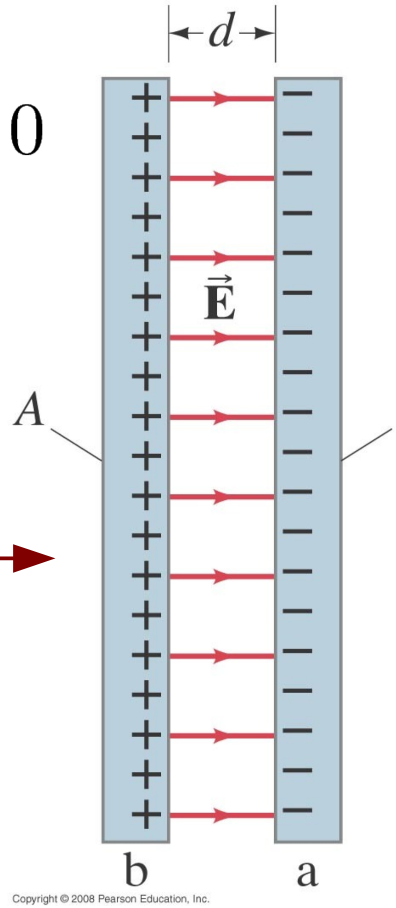
Kondensaattori (engl. capacitor) on laite, joka pystyy varastoimaan sähkövarausta.





Kapasitanssi ja levykondensaattori

$$+Q > 0 \qquad -Q < 0$$



$$\sigma_+ = \frac{+Q}{A} \qquad \sigma_- = \frac{-Q}{A}$$

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} \qquad E_- = \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0}$$

$$E = |\vec{E}| = E_+ + E_- = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Ed$$

$$\boxed{\frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d} = C}$$

C on ***kapasitanssi***

Kapasitanssi

Siis: Vehkeen, joka säilöö yhden coulombin varauksen yhden voltin jännitteen yli, kapasitanssi on

Eri C
(kapasitanssi / coulombi)

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{1\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{V}} = 1\ \mathrm{F}$$ (faradi)

Eri V
(jännite / voltti)

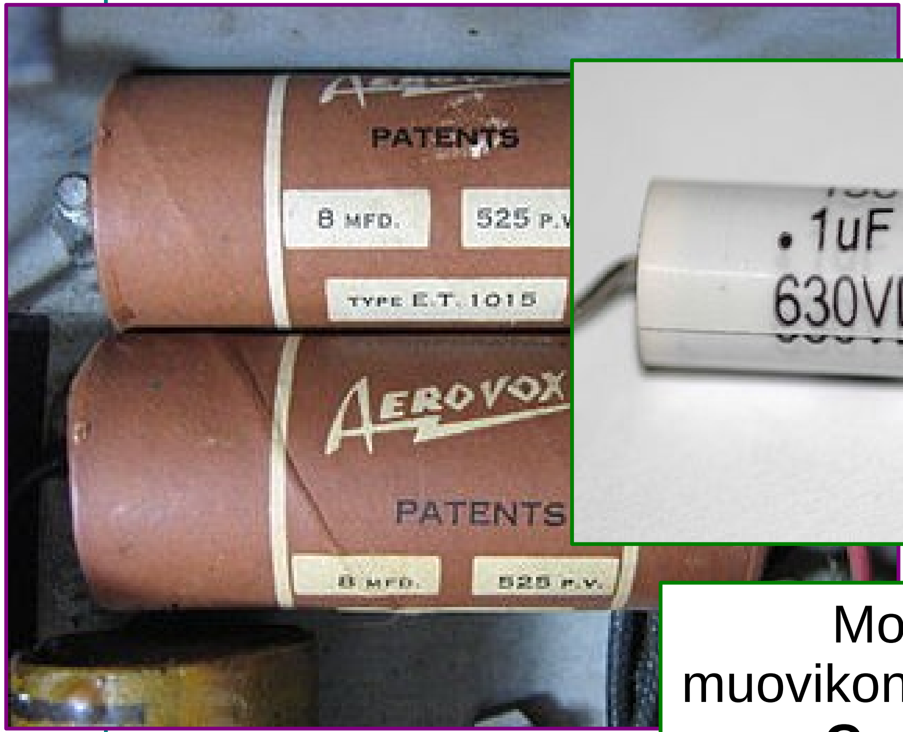
Paljonko 1 faradi sitten on?

Sanotaan, että levykondensaattorissa d = 1,0 mm ja halutaan C = 1,0 F

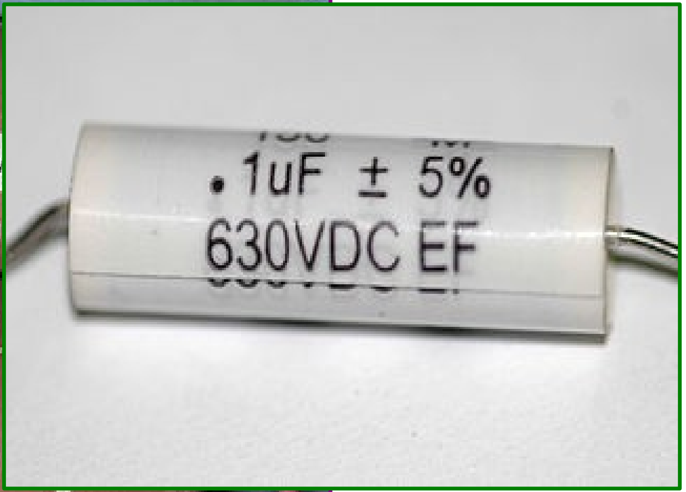
$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} \approx 10^8\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{km}^2$$

Kondensaattoreita

Leydenin pullo,
Ewald Georg von Kleist
1745, **C ~ 1 nF**



Paperikondensaatto
1930-luku
C = 8 μF
V_{max} = 525 V



Moderni
muovikondensaattori
C = 1 μF
V_{max} = 630 V

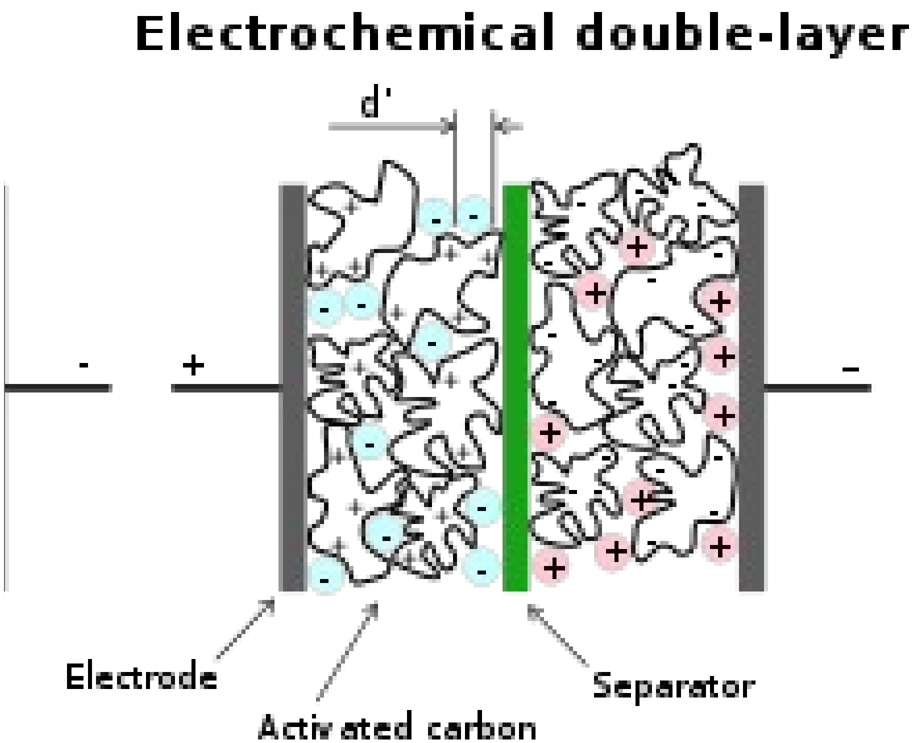
Kuvat: Wikipedia

Parempia kondensaattoreita?

“Superkondesaattori”:
C = jopa 1000 F
V_{max} = muutama V

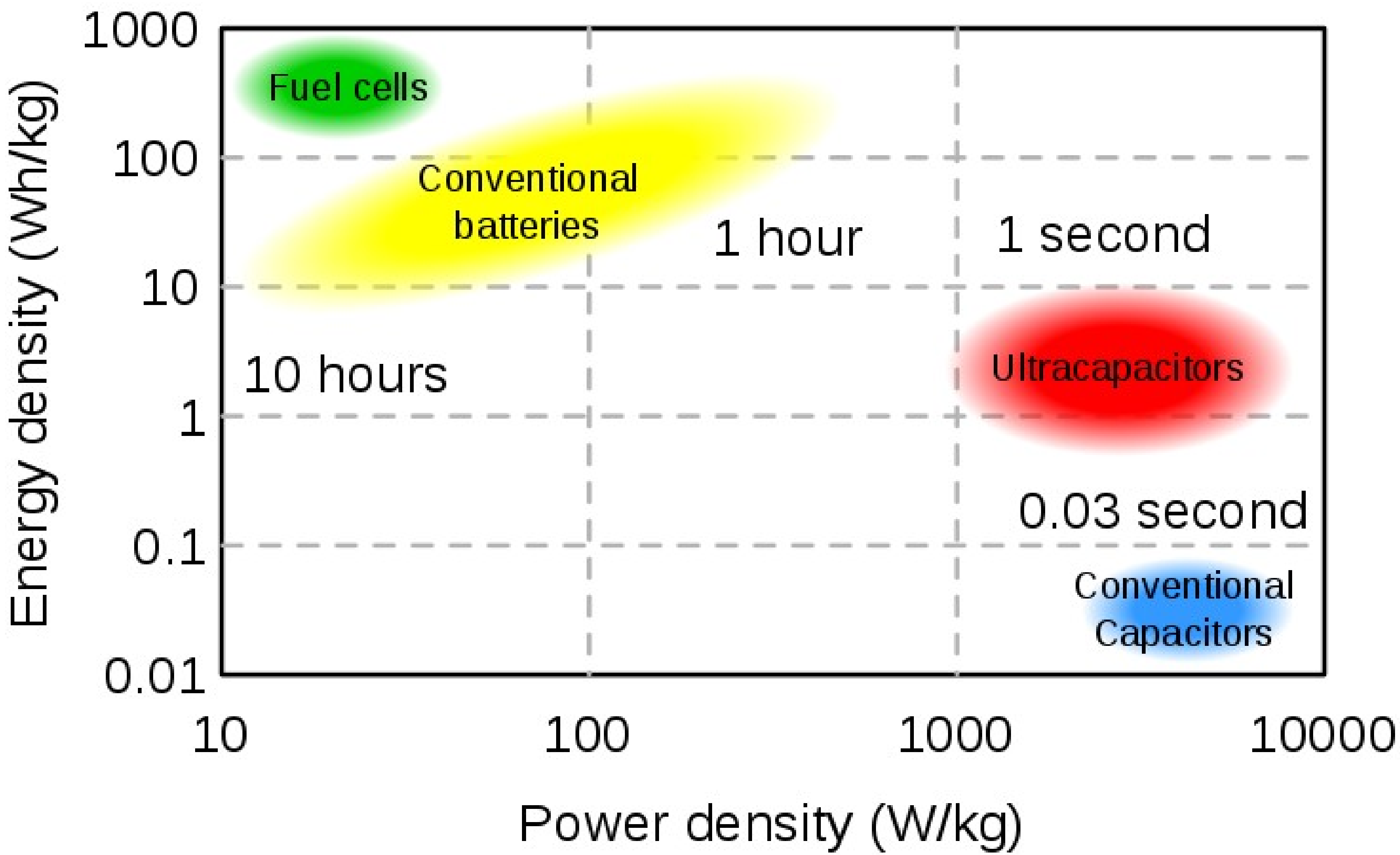
- Purkautuu itsestään
- Pieni jännitteenkesto

- Voidaan purkaa nopeasti
- Helppo ladata
- “Suuri” kapasiteetti



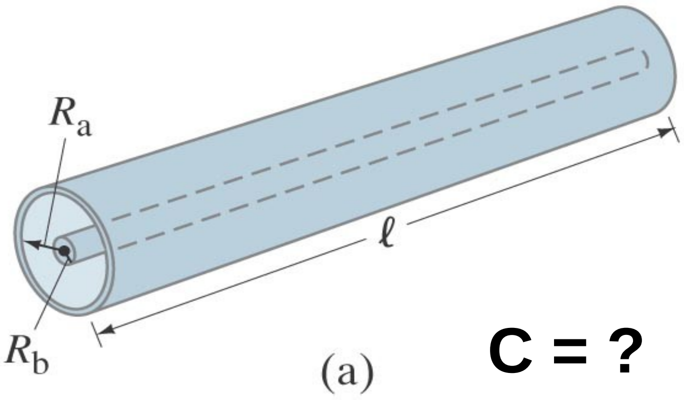
Kuvat: Wikipedia

Kondensaattori vai jokin muu?



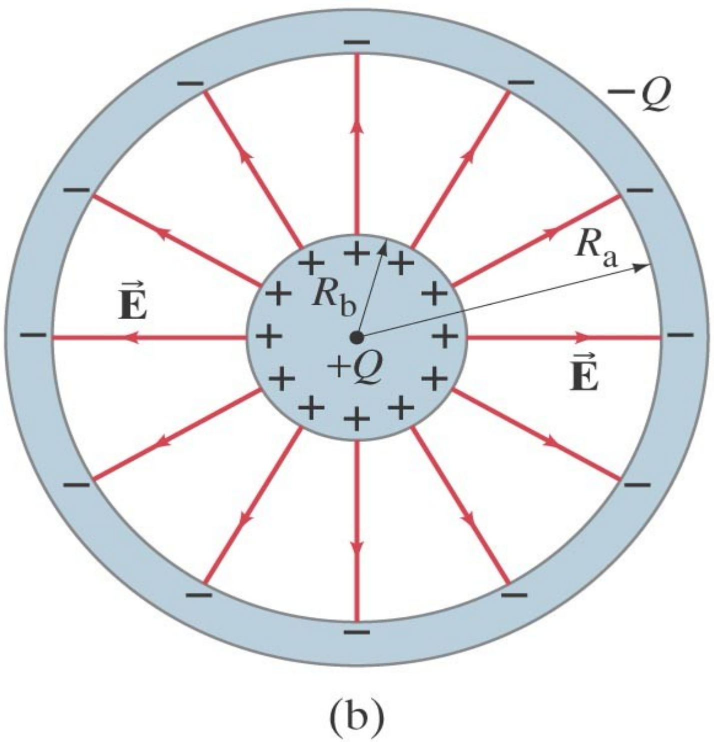
Kuvat: Wikipedia

Kapasitanssi ja geometria



(a)

C = ?



(b)

Määritettävä jännite **V**, kun varaus **Q** tunnetaan.

Gaussin lain avulla, kun $R_b < R < R_a$

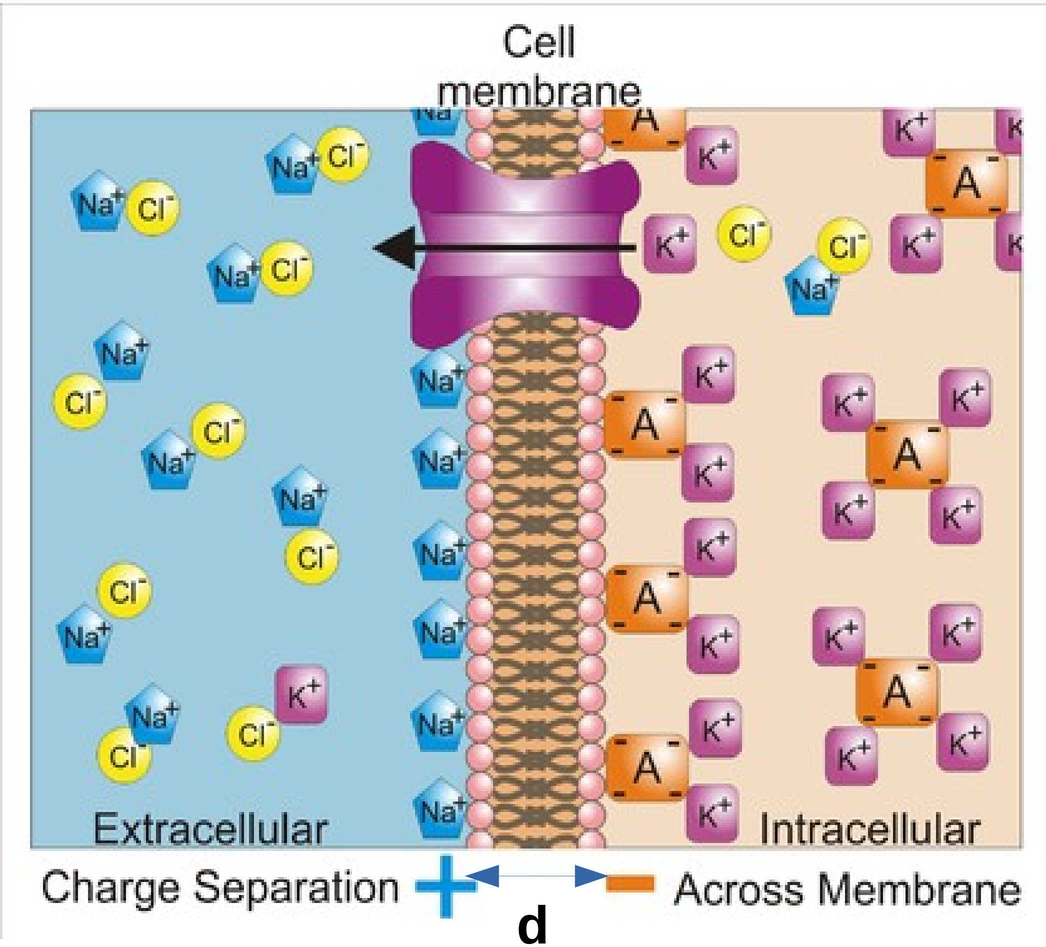
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\ell R}$$

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\int_{R_b}^{R_a}\frac{dR}{R} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}\ln\frac{R_a}{R_b}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln\left(R_a/R_b\right)}}$$

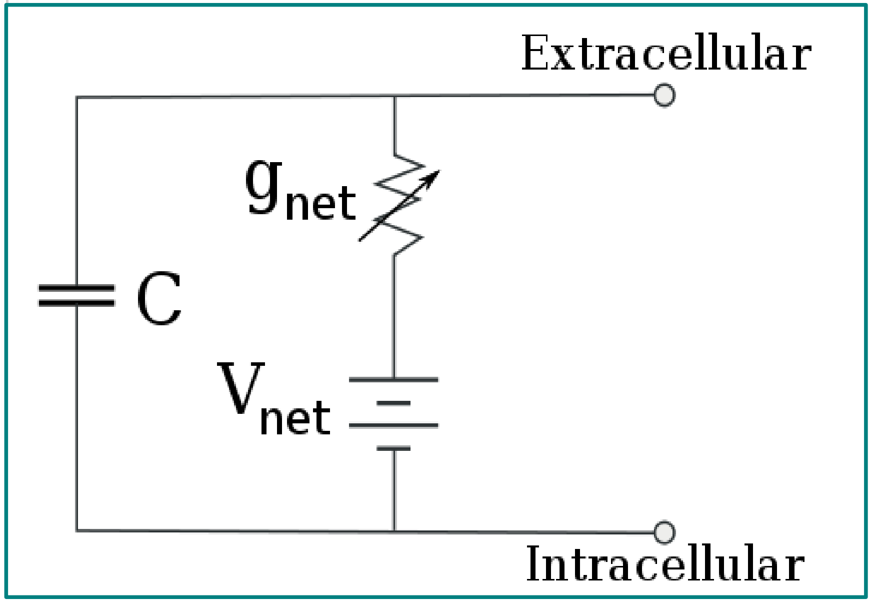
Meissäkin on kapasitanssia



Solukalvon kapasitanssi
C ~ 2 μF/cm^2

Solukalvon maksimijännte
V_{max} ~ 200 mV

Solukalvon kytkentäkaavio:

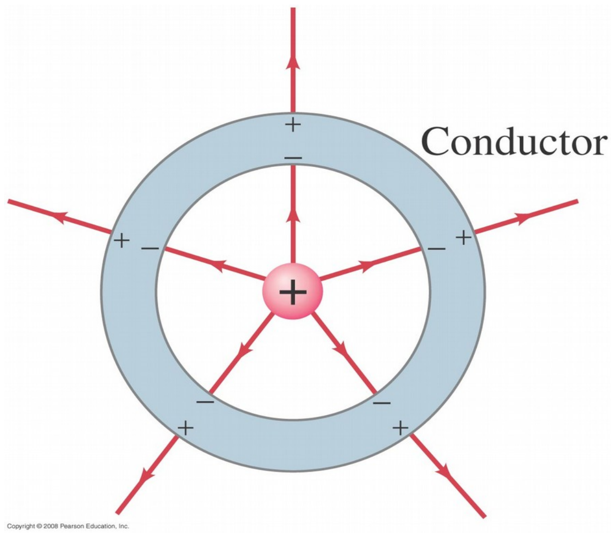


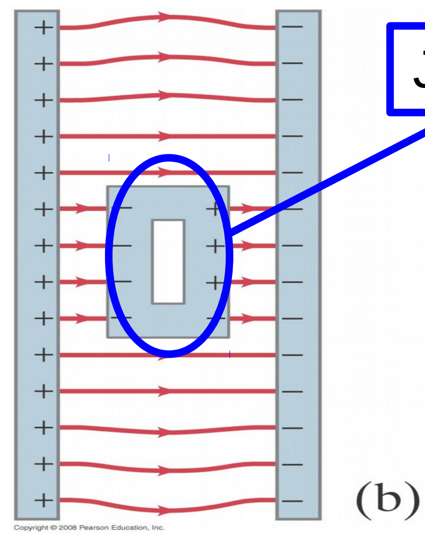
Solukavon paksuus
d ~ 7-8 nm

Kuvat: Wikipedia

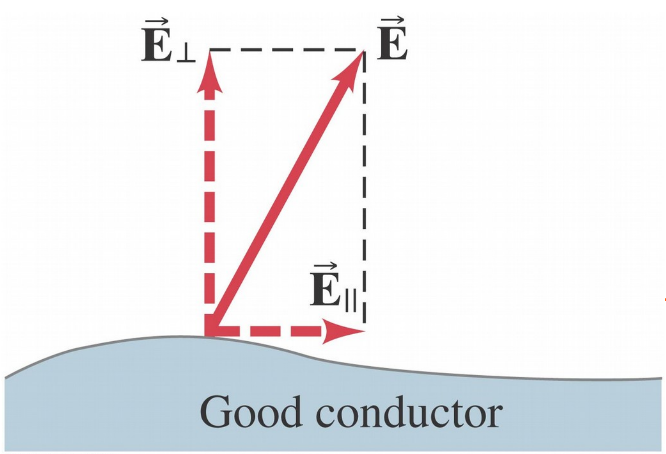
Sähkökenttä ja väliaine: Johde

Johteessa sähkökenttä häviää. Jollei näin olisi, liikkuisivat varaukset kunnes näin olisi.



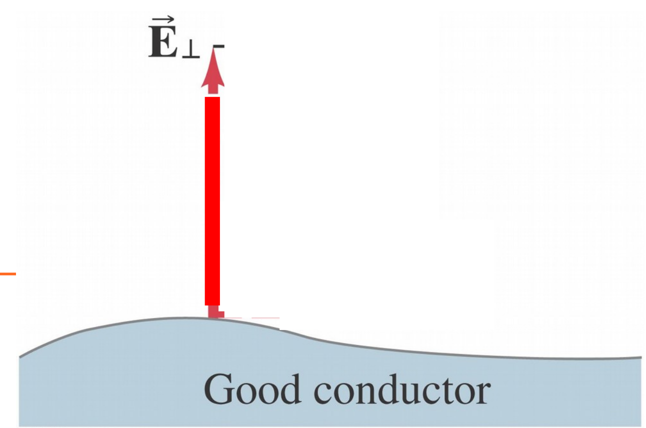


Johde suojaa sähkökentältä



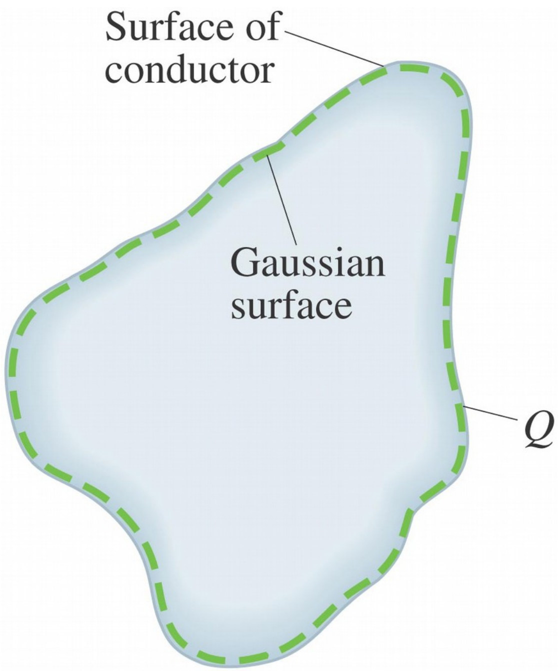
Varaukset liikkuvat johteessa, kunnes

$$\vec{E}_{||} = 0$$



Sähkökenttä ja väliaine: Johde

Gaussin laista seuraa, että varaus on johteen pinnalla



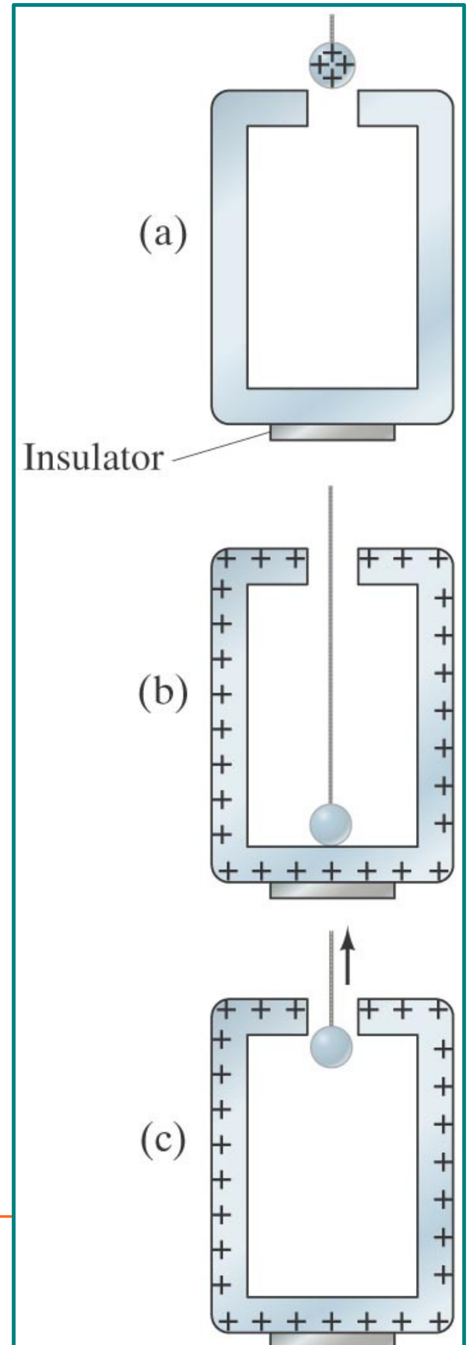
Johteen sisällä sähkökenttää ei ole

⬇

$$\Phi_E = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{encl}} = 0$$

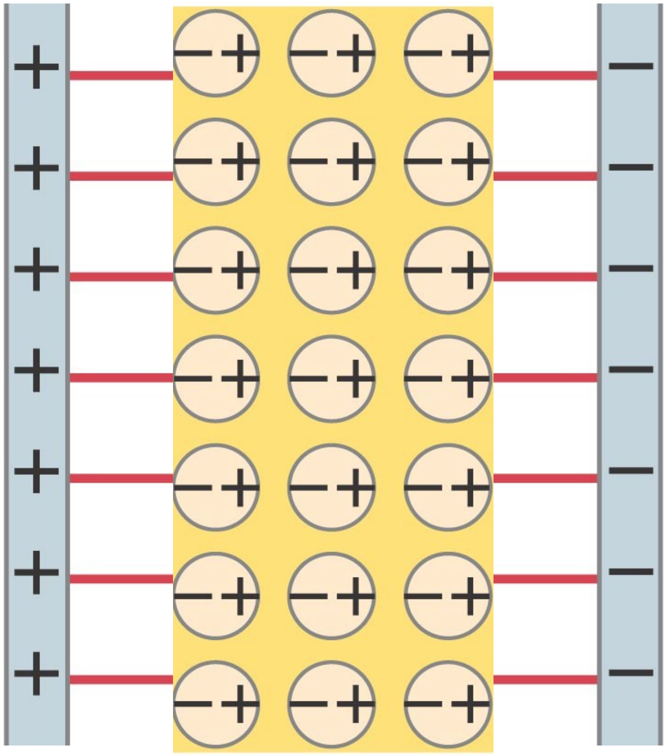
⬇

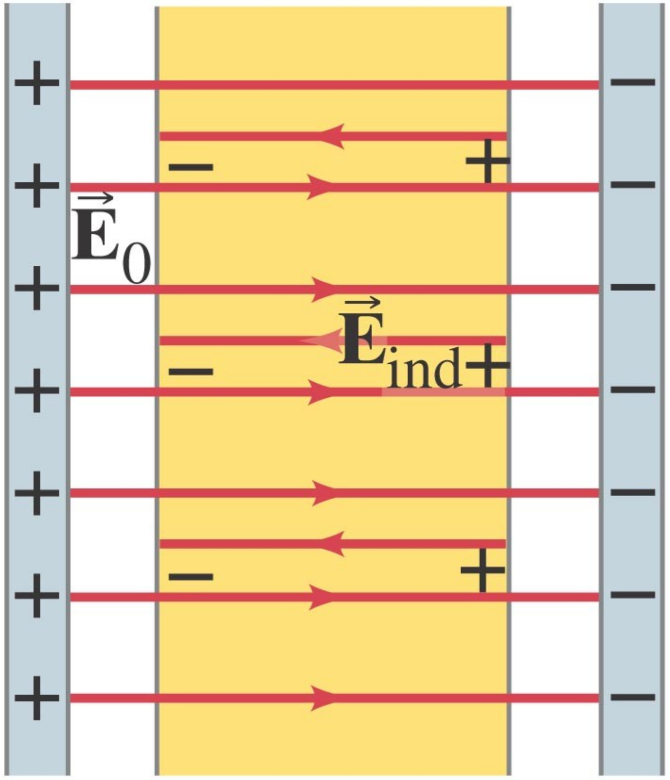
Varausta vain pinnalla



Sähkökenttä ja väliaine: Eriste

Eristeessä ei ole vapaasti liikkuvia varauksia.
Kenttä *polarisoi* eristeen.



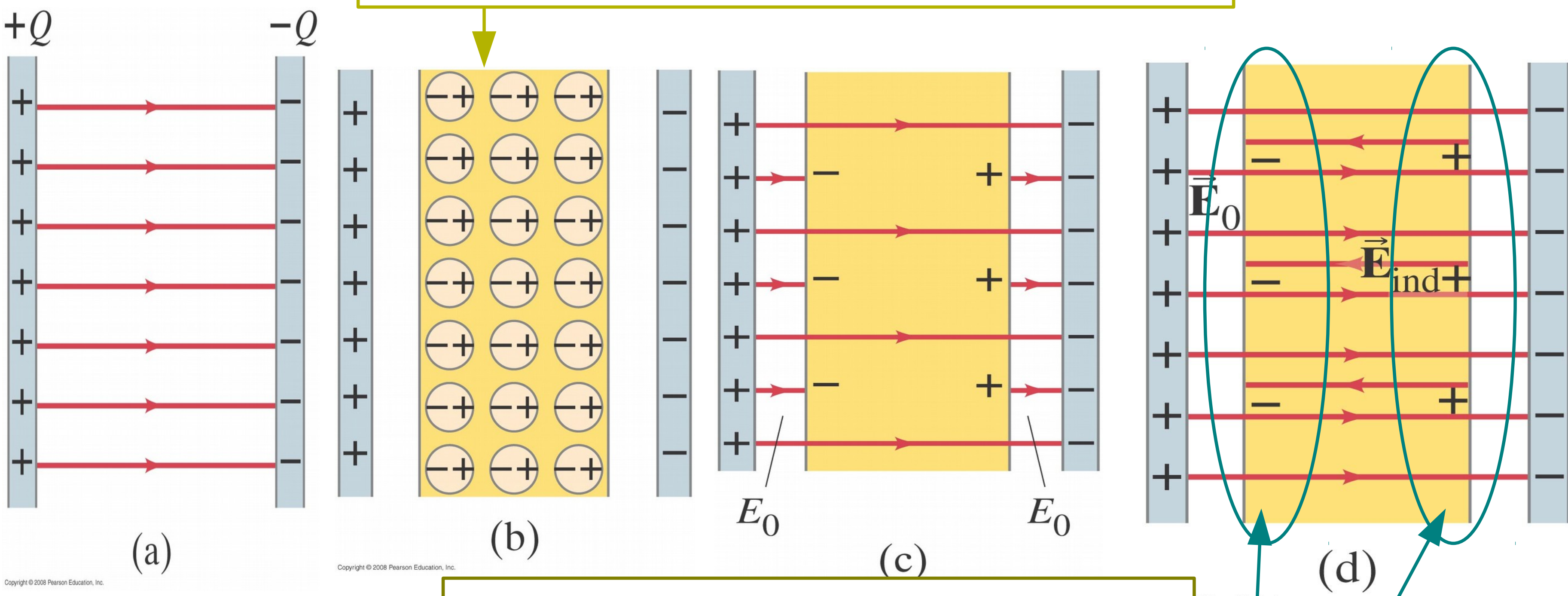


$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{ind}}$$

$$|\vec{E}| < |\vec{E}_0|$$

Täytetty kondensaattori

Eriste, ei johda sähköä mutta *polarisoituu*
→ kenttä E_0 heikkenee kentäksi E_D



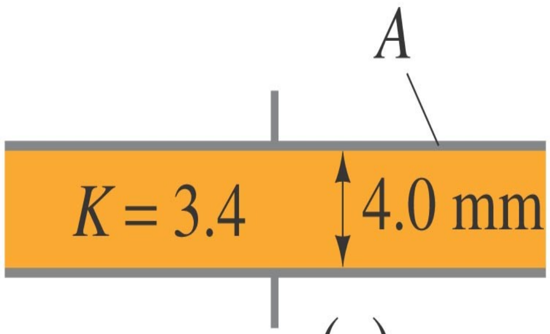
Kenttä eristeessä.

suhteellinen permittiivisyys, myös κ

$$E_D = E_0 - E_{\text{ind}} = \frac{E_0}{K} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{ind}} = E_0\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E_{\text{ind}} = \frac{\sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{ind}} = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{ind}} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

Täytetty kondensaattori: Kuinka käy kapasitanssin ja miksi?



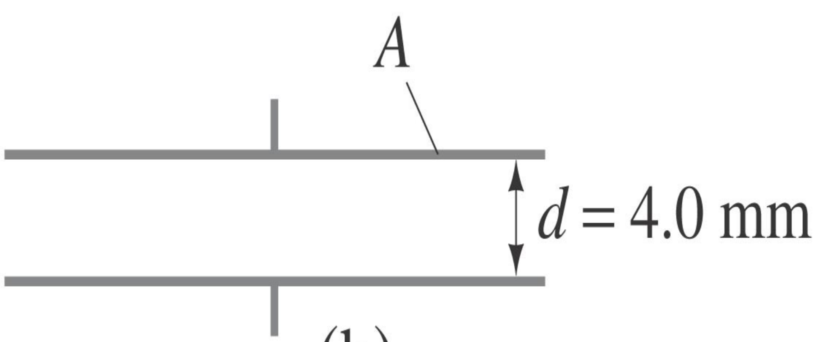
(a)

$$Q = Q_0$$

$$E_D = \frac{E_0}{K} \Rightarrow V = V_D = \frac{V_0}{K}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_0}{V_0/K} = KC_0}$$

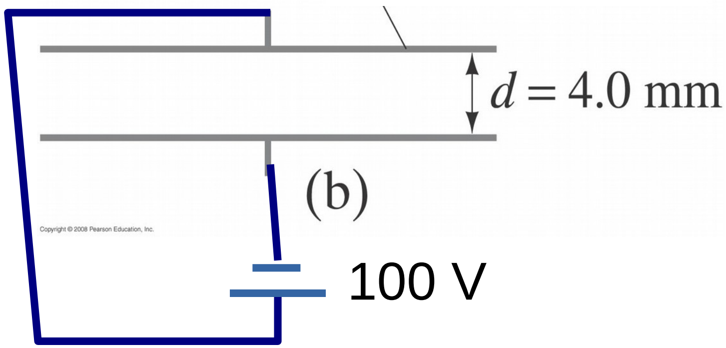
Koska K ≥ 1, kapasitanssi *kasvaa*.



(b)

Täytetty kondensaattori: Kuinka käy?

$$A = 4{,}0\ \mathrm{m}^2 \qquad C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = 8{,}8 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F} = 8{,}8\ \mathrm{nF}$$

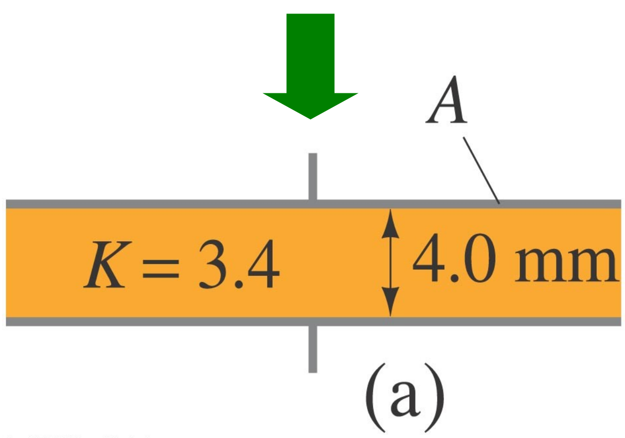


$$V_0 = 100\ \mathrm{V}$$

$$E_0 = V_0/d = 25\ \mathrm{kV/m}$$

$$Q_0 = C_0 V_0 = 0{,}88\ \mu\mathrm{C}$$

1. Irrotetaan jänniteähde
2. Työnnetään eriste kondensaattoriin



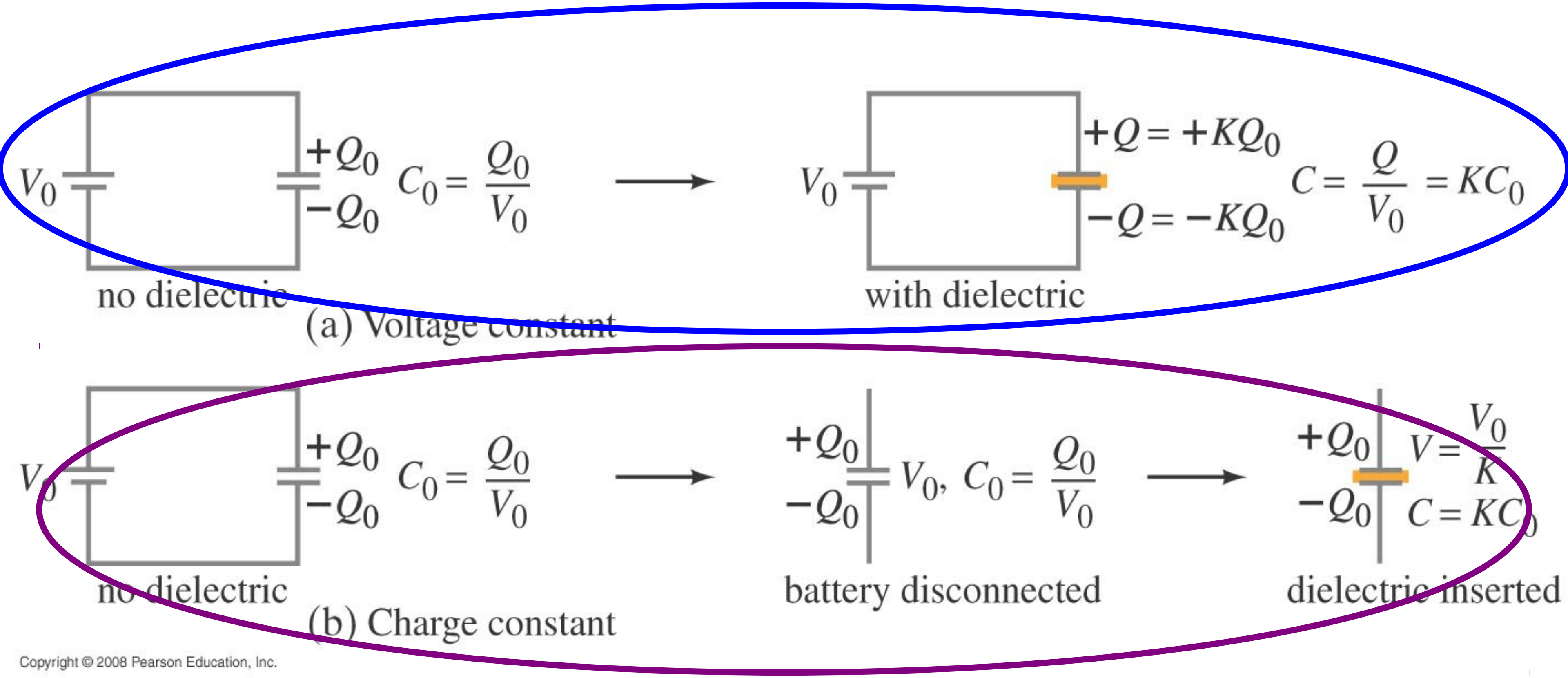
$$C = KC_0 = 30\ \mathrm{nF} \qquad Q = Q_0$$

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{KC_0} = \frac{V_0}{K} = 29\ \mathrm{V}$$

$$E = V/d = 7{,}4\ \mathrm{kV/m}$$

Täytetty kondensaattori: Kaksi toimintatapaa

Toinen tapaus: $V = V_0$ jolloin $Q = KQ_0 > Q_0$



Äskeinen esimerkki $Q = Q_0$

Kondensaattorin syömä energia

Olkoon kondensaattorissa varaus q ja jännite V.
Siirrettäessä varaus dq levyltä toiselle tehdään työ:

$$dW = V\,dq$$

Ladattaessa kondesaattori varaukseen Q tehdään siis työ:

$$W = \int_0^Q V\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Koska häviöitä ei ole, on tämä myös kondensaattoriin varastoitu energia U

Eristetäytteinen tapaus: C = KC$_0$

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_0} = \frac{1}{2}C_0V_0^2$$

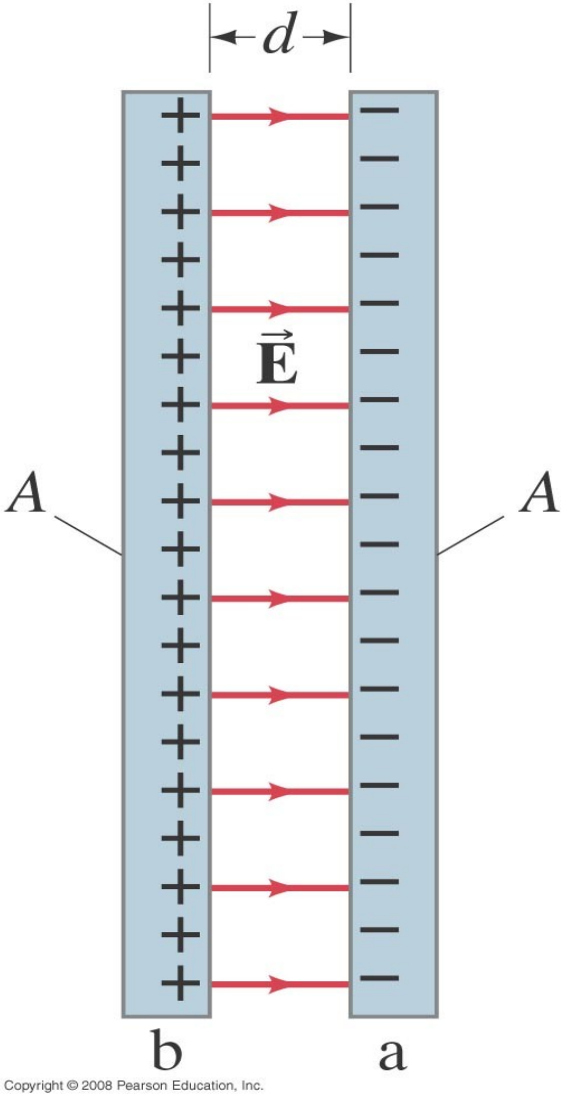
$$Q = Q_0$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{KC_0} = \frac{1}{K}U_0$$

$$V = V_0$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}KC_0V_0^2 = KU_0$$

Kondensaattorin energian paikka



Kondensaattoriin varattu energia säilötään *sähkökenttään*, näin:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}E^2 d^2$$

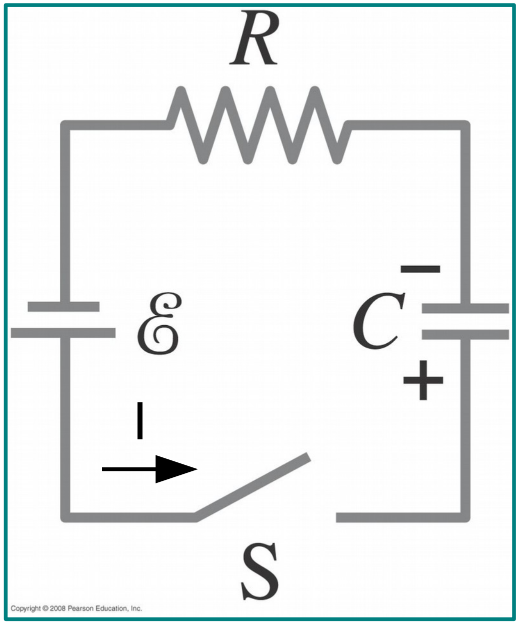
$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \boxed{Ad}$$

Kondensaattorin tilavuus

$$\boxed{u = \frac{U}{Ad} = \text{energiatiheys} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$$

Yleistävä loppupäätelmä: sähkökentässä on säilöttynä energiaa.

Kondensaattori ja vastus piirissä (RC-piiri)

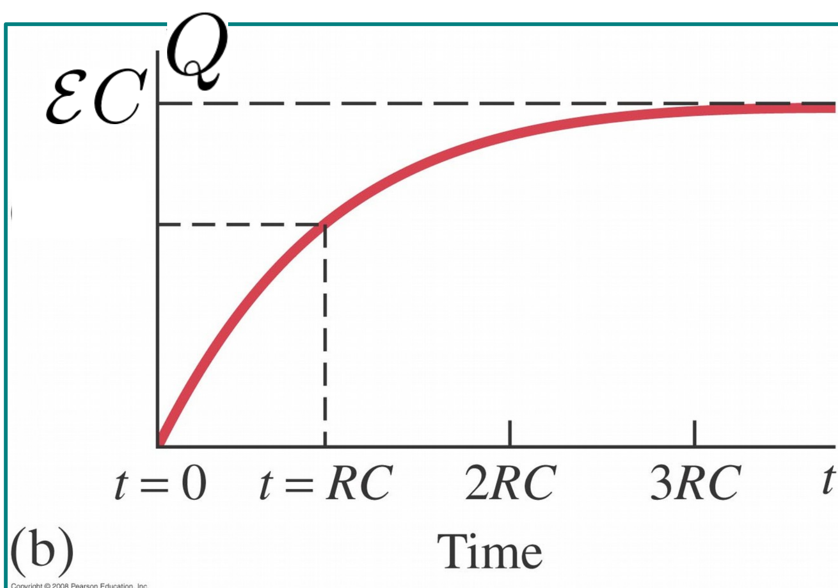


Virta alkaa kulkea, kondensaattori varautua, vastustaa yhä enemmän virran kulkua

Kirchhoffin lait ovat hyvä idea

$$\begin{cases} RI + \dfrac{1}{C}Q = \mathcal{E} \\ I = \dfrac{dQ}{dt} = \dot{Q} \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \frac{\mathcal{E}}{R}}$$



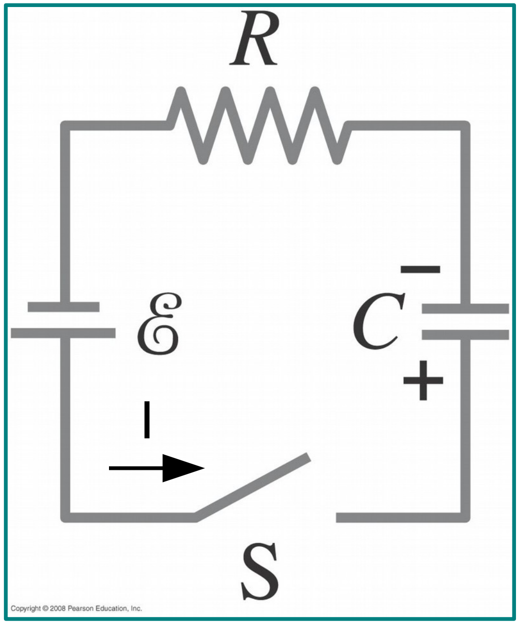
atkaisu: $Q_{\mathrm{HY}} = De^{-\frac{t}{RC}}$

sratkaisu: $Q_{EHY} = \mathcal{E}C$

$$Q_{\mathrm{HY}} + Q_{\mathrm{EHY}} = De^{-\frac{t}{RC}} + \mathcal{E}C$$

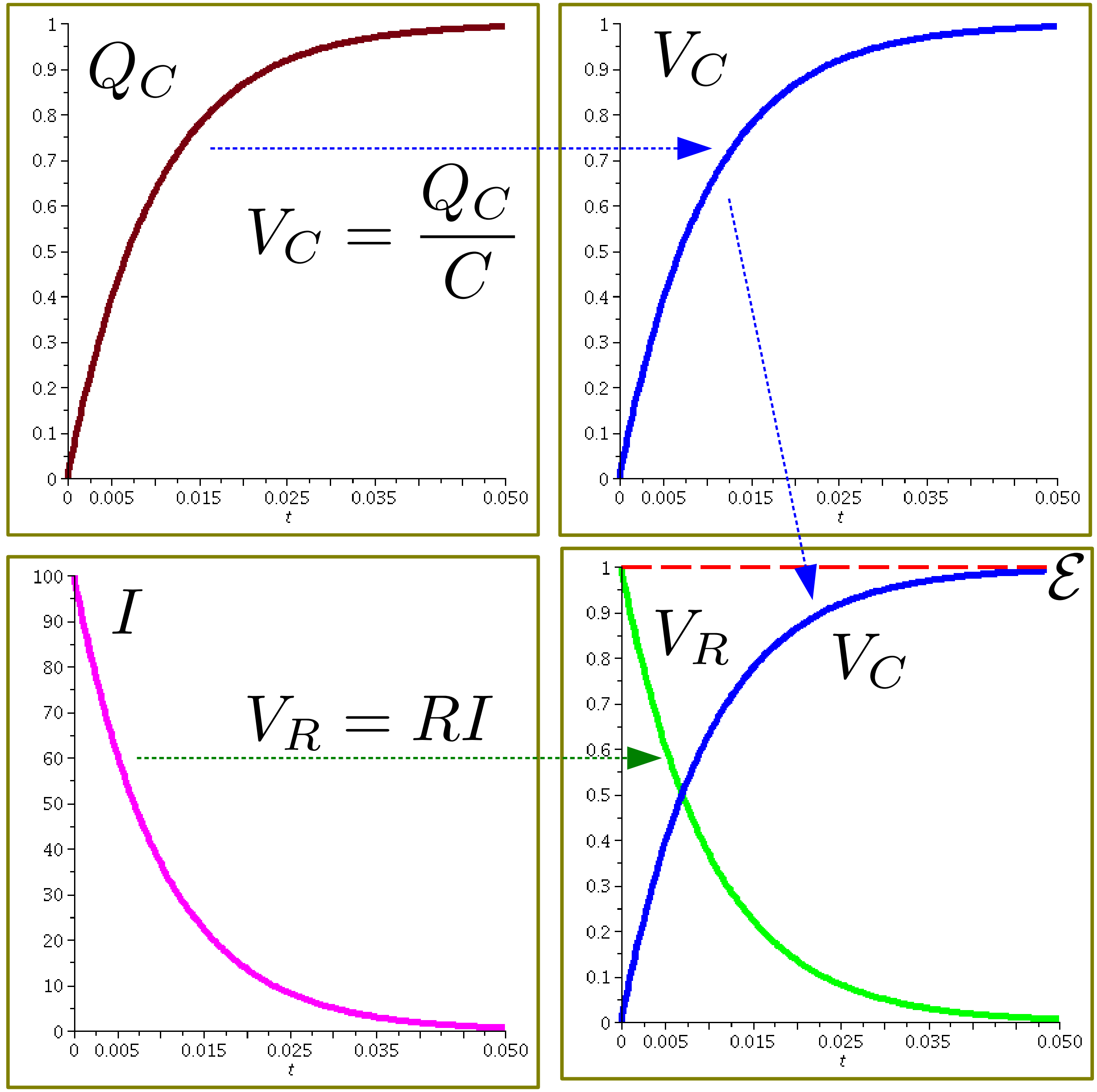
$$D = -\mathcal{E}C \qquad Q = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Kondensaattori ja vastus piirissä kuvina (RC)

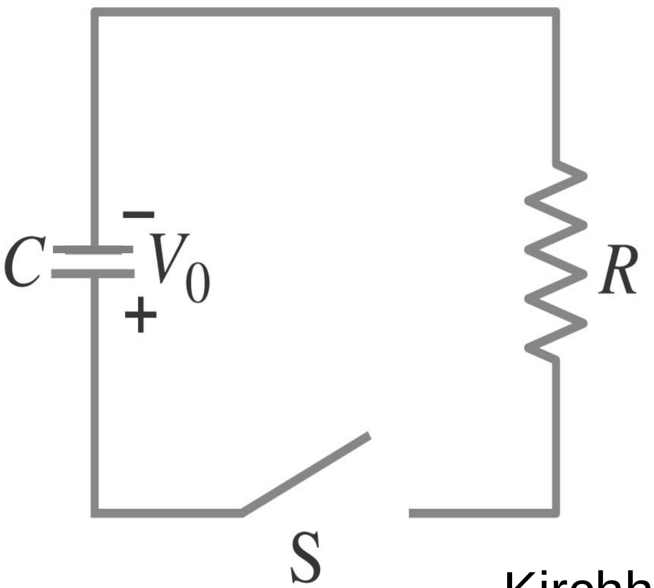


$$\begin{cases} C = 1{,}0\ \mathrm{F} \\ R = 0{,}01\ \Omega \\ \mathcal{E} = 1{,}0\ \mathrm{V} \end{cases}$$

$$\tau = RC = 0{,}01\ \mathrm{s}$$



Kondensaattori ja vastus piirissä (RC)



Kondensaattori varattu: $Q_0 = CV_0$

Suljetaan katkaisija S → Epäilemättä kondensaattori purkautuu, mutta miten?

$$V_C(t) = \frac{1}{C}Q(t)$$

$$V_R(t) = RI(t)$$

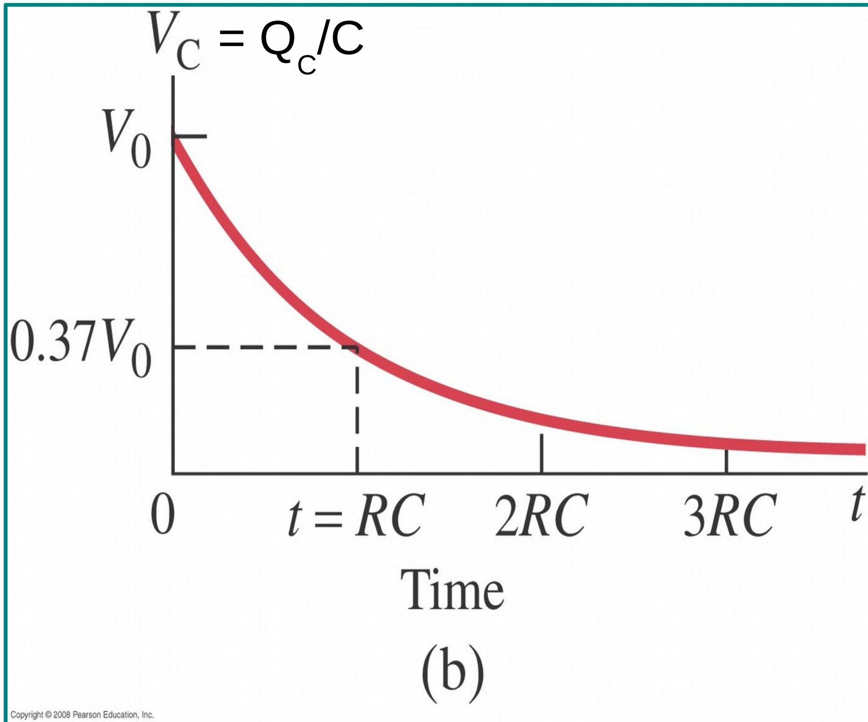
Kirchhoffin 2. sääntö (jännitetasapaino): $V_C(t) + V_R(t) = 0$

Kirchhoffin 1. sääntö (virtatasapaino): $I(t) = dQ/dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{C}Q(t) + RI(t) = \frac{1}{C}Q(t) + R\dot{Q} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q(t) = 0}$$

Kondensaattori ja vastus piirissä (RC)



$$\boxed{\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q(t) = 0}$$

kaisuyrite: $Q = De^{rt}$

2. Sijoitus yhälöön:

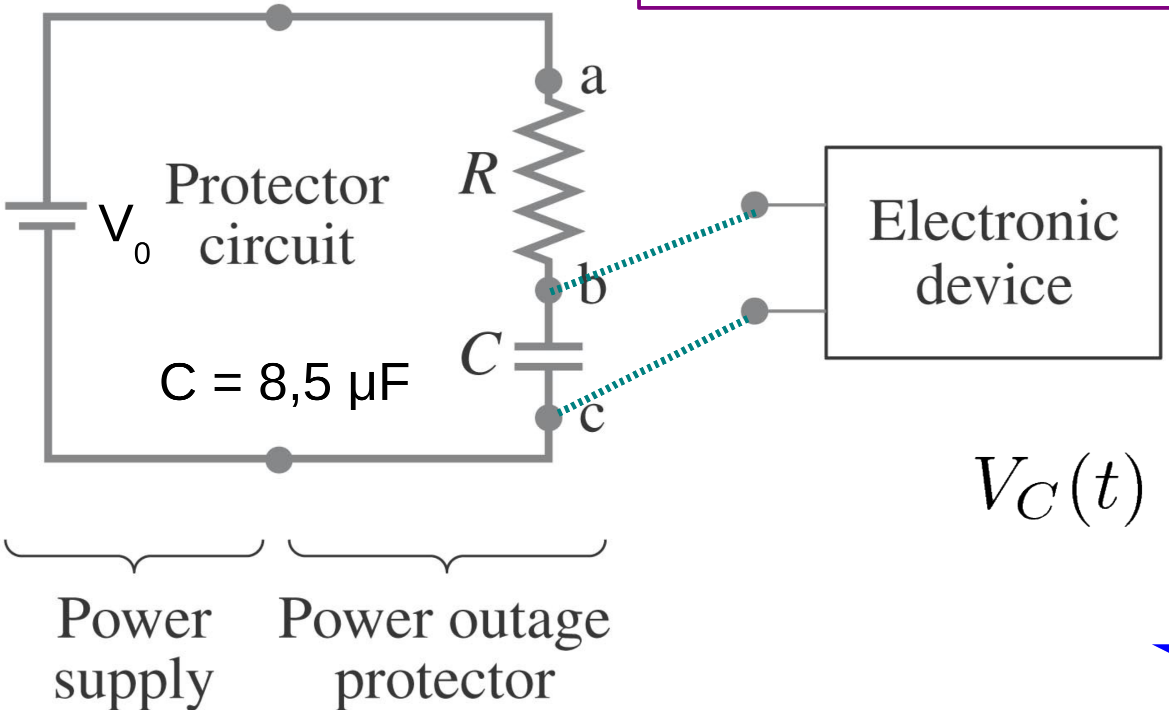
$$\left(r + \frac{1}{RC}\right)e^{rt} = 0 \Rightarrow Q = De^{-\frac{t}{RC}}$$

Tässä on aikavakio: $\tau = RC$

3. Alkuarvo: $Q(0) = Q_0 \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

Kondensaattori ja vastus piirissä (RC)

Halutaan, että jännite pysyy yli 75 %:n tasolla ainakin 0,2 s, kun lähde pettää. Oletetaan, että itse elektroniikkalaite ei vie juurikaan virtaa



$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$0{,}75 V_0 = V_0 e^{-\frac{0{,}2\ \mathrm{s}}{RC}}$$

$$R = 82\ \mathrm{k\Omega}$$