



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Moring

Harjoitukset, Viikko 2, 2021



Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ M1 Yksikköympyrä $x^2 + y^2 = 1$ on tasokäyrä. Esitä eräät parametrisaatiot, kun parametri on välillä: (a) $0 \leq t \leq 2\pi$, (b) $0 \leq s \leq \sqrt{2\pi}$, (c) $-1 \leq u \leq 1$, (d) $-\sqrt{2} \leq w \leq \sqrt{2}$.

TEHTÄVÄ M2 Etsi parametrisoidun käyrän $x = t^3 + t$, $y = 1 - t^3$, kulmakerroin parametrin arvolla $t = 1$.

TEHTÄVÄ J1 Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} \mathbf{i} + \frac{t}{t + 1} \mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

Ratkaisu: Asymptootit $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$;

pystysuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), -1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1), 1/\sqrt{2})$.

TEHTÄVÄ J2

- a) Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt,$$

missä a on ellipsin ison akselin puolikas ja e eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

Ratkaisu: a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

TEHTÄVÄ K1 Laske asteroidin $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$ koko pituus.

Ratkaisu: $6a$.

TEHTÄVÄ K2 (a) Muodosta käyrän $\mathbf{r}(t) = at^2 \mathbf{i} + bt \mathbf{j} + c \ln t \mathbf{k}$ pituuden määrätty integraali, kun $1 \leq t \leq T$. Laske integraalin arvo, kun $b^2 = 4ac$. (b) Piirrä käyrä S ja määrittele sen laatu:

$$x(t) = a \cos t \sin t, \quad y(t) = a \sin^2 t, \quad z(t) = bt.$$

Mikä on käyrän S pituus, kun $0 \leq t \leq T$?

Ratkaisu: a) $a(T^2 - 1) + c \ln T$; b) $T\sqrt{a^2 + b^2}$.

Haaste

Hiukkanen liikkuu pitkin ellipsiä

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

parametrisoituna muodossa $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Määritä hiukkasen nopeus ja kiihtyvyys parametrin arvolla $t = \pi/4$.

b) Määritä kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponentit parametrin arvolla $t = \pi/4$.

(Vast: $\mathbf{a}_N = -(6\sqrt{2}/13)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$)