Aalto University
School of Business

Talousmatematiikan perusteet: Luento 6

Derivointisääntöjä
Yhdistetyn funktion derivointi
Tulon ja osamäärän derivointi

Viime luennolla

- Funktion
  - Derivaatta $f'(x)$ kuvaa funktion muutosnopeutta
  - Toinen derivaatta $f''(x) = D\big(f'(x)\big)$ kuvaa muutosnopeuden muutosnopeutta eli kiihtyvyyttä

- Funktio on
  - Kasvava, kun $f'(x) > 0$
  - Vähenevä, kun $f'(x) < 0$

- Derivointisääntöjä
  - Vakiofunktio: $D(a) = 0$
  - Yksinkertainen polynomifunktio: $D(x^n) = nx^{n-1}$

Tällä luennolla

- Lisää derivointisääntöjä
  - Potenssifunktio
  - Eksponenttifunktio
  - Logaritmifunktio
- Yhdistetyn funktion derivointi
- Tulon ja osamäärän derivointi

Potenssifunktion derivointi

D5: Potenssifunktion derivaatta

- Olkoon $f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$. Tällöin

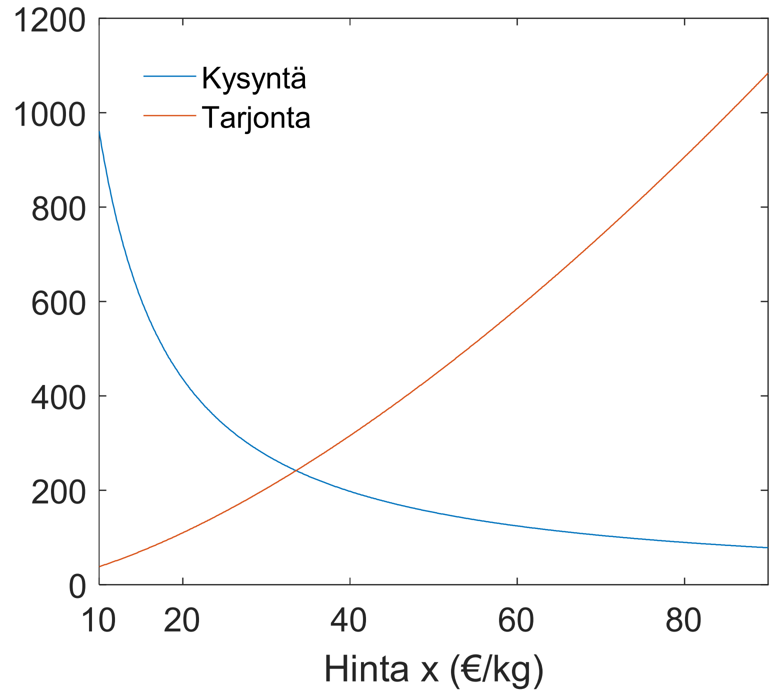
$$\boxed{f'(x) = D(x^n) = nx^{n-1}}$$

- Sääntö toimii siis aivan kuten yksinkertaisen polynomifunktion tapauksessa

- Esim.
  - $f(x) = x\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.$
  - $f(x) = x^{0.75} \Rightarrow f'(x) = 0.75x^{-0.25}$

Potenssifunktion derivointi

- Esim. Kultakalakaviaarin kysynnän ja tarjonnan (kg) riippuvuutta yksikköhinnasta x (€/kg) kuvaavat funktiot:
  - Kysyntä $f(x) = 13262x^{-1.14}$
  - Tarjonta $g(x) = 1.16x^{1.52}$

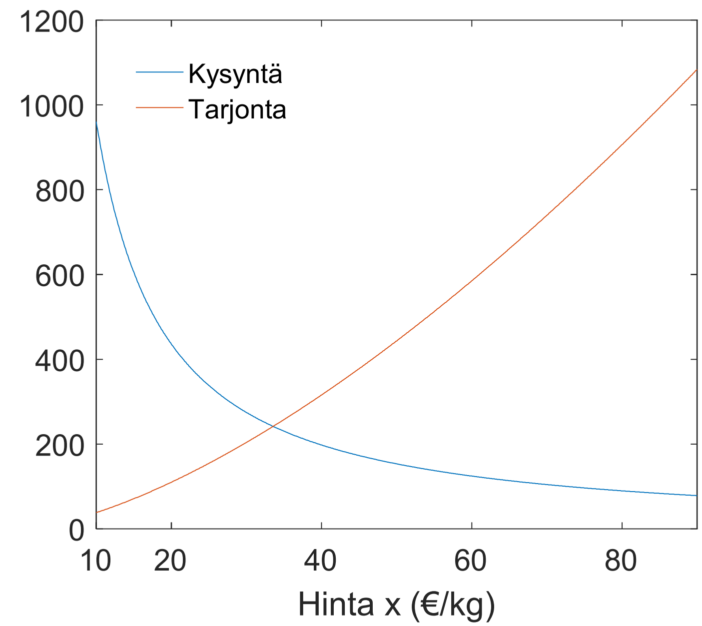


- Kuvaajan perusteella näyttää siltä, että yksikköhinnan kasvaessa
  - Tarjonta kasvaa, jolloin muutosnopeus $g'(x) > 0$
  - Kasvu on kiihtyvää, jolloin kiihtyvyys $g''(x) > 0$

- Päätelmä voidaan vahvistaa derivoimalla
  - $g'(x) = D(1.16x^{1.52}) = 1.16 \cdot 1.52x^{1.52-1} = 1.7632x^{0.52} > 0$
  - $g''(x) = D(1.7632x^{0.52}) = 1.7632 \cdot 0.52x^{0.52-1} = 0.9169x^{-0.48} > 0$

Potenssifunktion derivointi

- (Jatkuu) Kultakalakaviaarin kysynnän ja tarjonnan (kg) riippuvuutta yksikköhinnasta x (€/kg) kuvaavat funktiot:
  - Kysyntä $f(x) = 13262x^{-1.14}$
  - Tarjonta $g(x) = 1.16x^{1.52}$
- Kuvaajan perusteella näyttää siltä, että yksikköhinnan kasvaessa
  - Kysyntä vähenee, jolloin muutosnopeus $f'(x) < 0$
  - Väheneminen hidastuu, eli muutosnopeus kasvaa (tulee vähemmän negatiiviseksi), jolloin kiihtyvyys $f''(x) > 0$ (!)
- Päätelmä voidaan vahvistaa derivoimalla
  - $f'(x) = D(13262x^{-1.14}) = 13262 \cdot (-1.14)x^{-1.14-1} = -15118.68x^{-2.14} < 0$
  - $f''(x) = D(-15118.68x^{-2.14}) = -15118.68 \cdot (-2.14)x^{-2.14-1} = 32354x^{-3.14} > 0$



Taukojumppa

Tuotannon yksikkökustannusta (€/kg) tuotantomäärän x (t) suhteen kuvaa funktio $f(x) = 2x^{-0.3}$. Määritä yksikkökustannuksen vähenemisnopeus tuotantomäärän ollessa 5 tonnia.

1. 7 c/kg / lisätty tonni
2. 37 c/kg / lisätty tonni
3. 1.23 €/kg / lisätty tonni

Harjoittele verkossa!

http://www.wolframalpha.com/problem-generator/

Calculus → Derivatives → Power rule (Intermediate- ja Advanced-tasot)

Eksponenttifunktion derivointi

D6: Eksponenttifunktion derivaatta

- Olkoon $f(x) = a^x$. Tällöin

$$\boxed{f'(x) = D(a^x) = a^x \cdot \ln a}$$

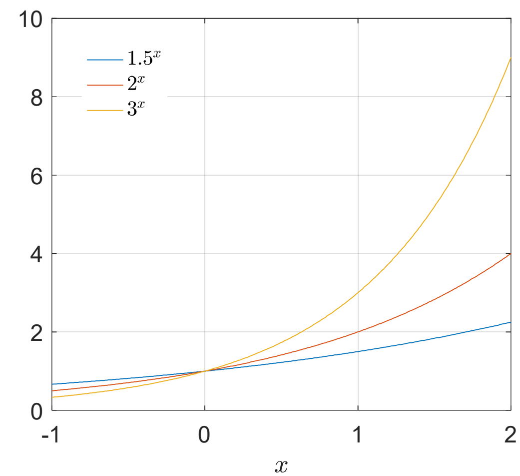
- Erityisesti

$$\boxed{f'(x) = D(e^x) = e^x}$$

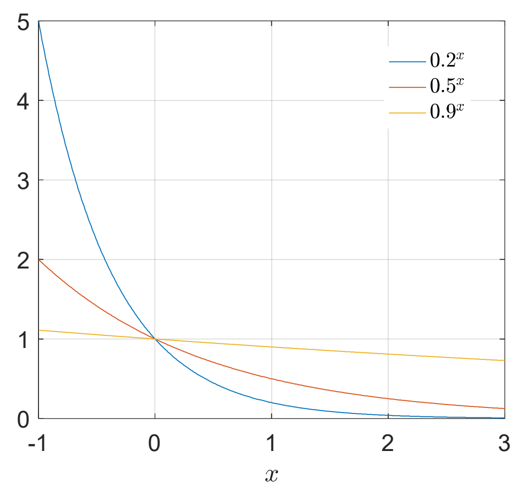
- Todistus kalvolla 37 (jos kiinnostaa)

Eksponenttifunktion derivointi

- Millä tahansa kantaluvulla $a > 1$ eksponenttifunktio $f(x) = a^x$ kasvaa kiihtyvästi
  - $f'(x) = a^x \cdot \ln a > 0 \rightarrow$ Muutosnopeus on positiivinen, eli funktio kasvaa
  - $f''(x) = a^x \cdot (\ln a)^2 > 0 \rightarrow$ Muutosnopeus kasvaa, eli kasvu kiihtyy



- Millä tahansa kantaluvulla $0 < a < 1$ eksponenttifunktio $f(x) = a^x$ vähenee hidastuvasti
  - $f'(x) = a^x \cdot \ln a < 0 \rightarrow$ Muutosnopeus on negatiivinen, eli funktio vähenee
  - $f''(x) = a^x \cdot (\ln a)^2 > 0 \rightarrow$ Muutosnopeus kasvaa, eli väheneminen hidastuu



Eksponenttifunktion derivointi

- Esim. Lääkkeen *L* valmistuksessa käytettävän bakteerikannan suuruutta ajan x (h) suhteen kuvaa funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = 10\,000 \cdot 2^x$. Mikä on bakteerikannan kasvunopeus tarkastelujakson alussa? Entä kolmen tunnin kuluttua?

- Kasvunopeutta kuvaa derivaattafunktio

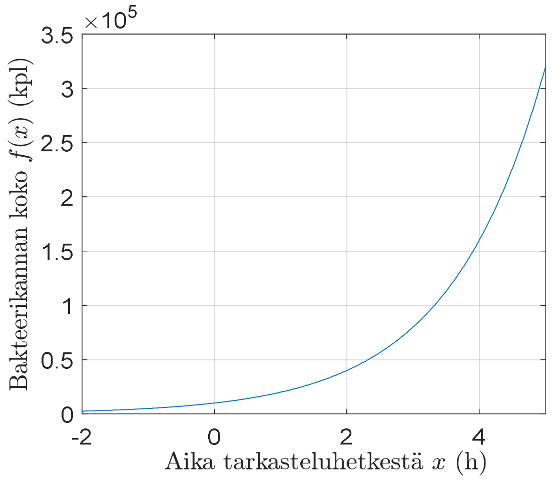
$$f'(x) = D(10\,000 \cdot 2^x) = 10\,000 \cdot D(2^x) = 10\,000 \cdot \ln 2 \cdot 2^x$$

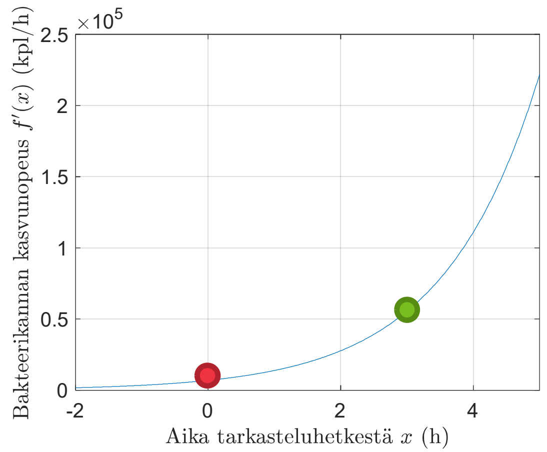
- Kasvunopeus alussa:

$$f'(0) = 10\,000 \cdot \ln 2 \cdot 2^0 \approx 6932 \text{ kpl/h}$$

- Kasvunopeus kolmen tunnin kuluttua:

$$f'(3) = 10\,000 \cdot \ln 2 \cdot 2^3 \approx 55\,452 \text{ kpl/h}$$





Taukojumppa

- Auton arvo on uutena 80 000 €, ja arvo vähenee 20% vuodessa. Mikä on auton arvon vähenemisnopeus kolmen vuoden kuluttua?

1. 1030 €/v
2. 4096 €/v
3. 9140 €/v

Logaritmifunktion derivointi

D7: Logaritmifunktion derivaatta

- Olkoon $f(x) = \log_a x$. Tällöin

$$\boxed{f'(x) = D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

- Erityisesti

$$\boxed{f'(x) = D(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

- Todistus kalvolla 38 (jos kiinnostaa)

Logaritmifunktion derivointi

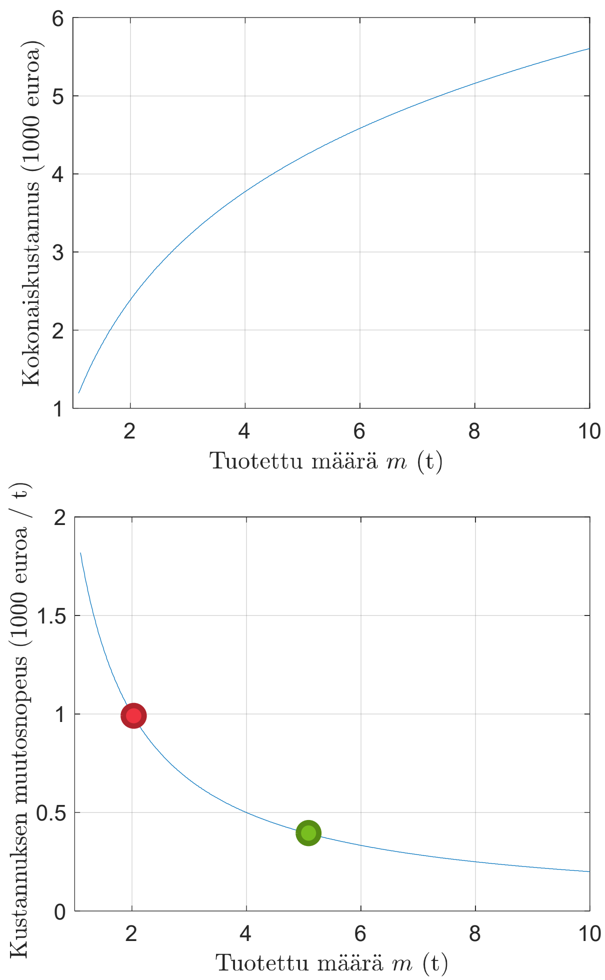
- Esim. Tuotantoprosessin päivittäistä kokonaiskustannusta (1000 €) tuotetun määrän m (tonnia) suhteen kuvaa funktio $c\colon [1,\infty) \to [1,\infty), c(m) = 1 + \ln m^2$. Mikä on kustannuksen kasvunopeus tuotantomäärän ollessa 2 tonnia? Entä 5 tonnia?

- Kustannuksen muutosnopeutta kuvaa derivaattafunktio

$$c'(m) = D(1 + \ln m^2) = D(1) + D(\ln m^2) = 0 + D(2 \cdot \ln m)$$
$$= 2 \cdot D(\ln m) = \frac{2}{m}$$

- Kasvunopeus tuotantomäärän ollessa 2 tonnia:
  $c'(2) = \frac{2}{2} = 1 \;\to 1000$ € / lisätonni

- Kasvunopeus tuotantomäärän ollessa 5 tonnia:
  $c'(5) = \frac{2}{5} = 0.4 \;\to 400$ € / lisätonni



Taukojumppa

- Tuotekehitystyön odotettua tuottoa (k€) työhön sijoittujen resurssien x (k€) suhteen kuvaa funktio $r(x) = 100 \cdot \ln 2x$. Mikä on odotetun tuoton kasvunopeus resurssitason ollessa 80 000 euroa?

1. 0.63 € /sijoitettu lisäeuro
2. 1.25 € / sijoitettu lisäeuro
3. 5.08 € /sijoitettu lisäeuro

Derivointisääntöjä

- Säännöt **D1, D2, D5, D6** ja **D7** esittivät, kuinka eräistä tärkeistä perusfunktioista f saadaan niiden muutosnopeutta kuvaavat derivaattafunktiot f'
  - **D1**: Vakiofunktion derivointi
  - **D5**: Potenssifunktion (sis. **D2** yksinkertaisen polynomifunktion) derivointi
  - **D6**: Eksponenttifunktion derivointi
  - **D7**: Logaritmifunktion derivointi

- Säännöt **D3** ja **D4** (vakiolla kerrotun funktion / funktoiden summan derivointi) ovat yleisiä funktioiden yhdistelmien käsittelysääntöjä, kuten myös seuraavaksi esiteltävät säännöt
  - **D8**: Yhdistetyn funktion derivointi
  - **D9**: Tulon derivointi
  - **D10**: Osamäärän derivointi

Yhdistetyn funktion derivointi

- Esim. Tarkastellaan funktiota

$$t(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} = (x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}}$$

- Funktio ei ole mitään perustyyppiä eikä sille ole valmista derivointisääntöä.

- Se voidaan kuitenkin hahmottaa yhdistettynä funktiona $t(x) = (g \circ f)(x)$, kun
  - Sisäfunktiona on polynomifunktio $f(x) = x^2 + 2x + 3$
  - Ulkofunktio on potenssifunktio $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$

Yhdistetyn funktion derivointi

D8: Yhdistetyn funktion derivointi

- Olkoon $(g \circ f)(x)$ yhdistetty funktio siten, että
  - Sisäfunktio f on derivoituva pisteessä x
  - Ulkofunktio g on derivoituva pisteessä $y = f(x)$

- Tällöin yhdistetyn funktion derivaatta on

$$D(g \circ f)(x) = \underbrace{g'\big(f(x)\big)}_{\text{Ulkofunktion muutosnopeus sisäfunktion suhteen}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{Sisäfunktion muutosnopeus } x\text{:n suhteen}} \qquad (= g'(y) \cdot f'(x))$$

Yhdistetyn funktion derivointi

- Esim. $t(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, missä
  - Sisäfunktio $f(x) = x^2 + 2x + 3$
  - Ulkofunktio $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$

- Tällöin
  - $f'(x) = 2x + 2$
  - $g'(y) = \frac{1}{2} y^{\frac{-1}{2}}$

$\rightarrow$ $t'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{\frac{-1}{2}} \cdot (2x + 2) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Yhdistetyn funktion derivointi

- Esim. Tuotantoprosessin kokonaiskustannusta (1000 €) tuotetun määrän m (t) suhteen kuvaa funktio $c(m) = 1 + (\ln m)^2$. Mikä on kustannuksen kasvunopeus tuotantomäärän ollessa 2 tonnia? Entä 5 tonnia?

- Kustannusfunktio voidaan hahmottaa yhdistettynä funktiona $c(m) = (g \circ f)(m)$, missä
  - Sisäfunktio $f(m) = \ln m \rightarrow f'(m) = \frac{1}{m}$
  - Ulkofunktio $g(y) = 1 + y^2 \rightarrow g'(y) = 2y$

- Tällöin kustannuksen muutosnopeutta kuvaa derivaattafunktio

$$c'(m) = g'\big(f(m)\big) \cdot f'(m) = 2\ln m \cdot \frac{1}{m} = \frac{2\ln m}{m}$$

- Muutosnopeus tuotantomäärän ollessa 2 tonnia: $c'(2) = \frac{2\ln}{2} = 0.693 \rightarrow 693$ € / lisätonni

- Muutosnopeus tuotantomäärän ollessa 5 tonnia: $c'(5) = \frac{2\ln 5}{5} = 0.644 \rightarrow 644$ € / lisätonni

Taukojumppa

Mikä on funktion $f(x) = \ln(1 + x^2)$ derivaatta?

1. $\frac{2}{x}$
2. $\frac{1}{1+x^2}$
3. $\frac{2x}{1+x^2}$

Taukojumppa

Mikä on funktion $f(x) = 2^{x^2+x}$ derivaatta?

1. $2^{x^2+x} \cdot \ln 2$
2. $2^{x^2+x} \cdot \ (2x+1)$
3. $2^{x^2+x} \cdot \ln 2 \cdot (2x+1)$

Taukojumppa

Tuotteen yksikkökustannusta (€/kg) tuotantomäärän x (t) suhteen kuvaa funktio $f(x) = \frac{2}{(x+1)^{0.3}}$. Määritä yksikkökustannuksen vähenemisnopeus tuotantomäärän ollessa 3 tonnia.

1. 6 c/kg / lisätonni
2. 10 c/kg / lisätonni
3. 23 c/kg / lisätonni

Harjoittele verkossa!

http://www.wolframalpha.com/problem-generator/

Calculus → Derivatives → Chain rule

Monet tehtävistä sisältävät trigonometrisia funktioita → Skip this question

Tulon derivointi

- Esim. Härvelitehtaan tuotannon määrän ja yksikköhinnan kehitystä ajan x suhteen kuvaavat funktiot
  - Määrä: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 186400(x+1)^{0.54}$ (potenssifunktio)
  - Yksikköhinta: $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, g(x) = 3.47 \cdot 1.08^x$ (eksponenttifunktio)

- Tuotannon arvoa kuvaa tällöin funktio

$$v\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, v(x) = f(x) \cdot g(x) = 186400(x+1)^{0.54} \cdot 3.47 \cdot 1.08^x$$

- Funktio v on funktioiden f ja g **tulo**.

Tulon derivointi

D9: Tulon derivointi

- Jos funktiot *f* ja *g* ovat derivoituvia pisteessä *x*, niin

f:n muutosnopeus

g:n muutosnopeus

$$D(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Kokonais-
muutosnopeus

$g(x)$-kertaisena

$f(x)$-kertaisena

Tulon derivointi

- Esim. Tuotannon arvoa ajan suhteen kuvaa funktio

$$v(x) = f(x) \cdot g(x) = 186400(x+1)^{0.54} \cdot 3.47 \cdot 1.08^x$$

- Tuotannon arvon muutosnopeutta kuvaa funktio

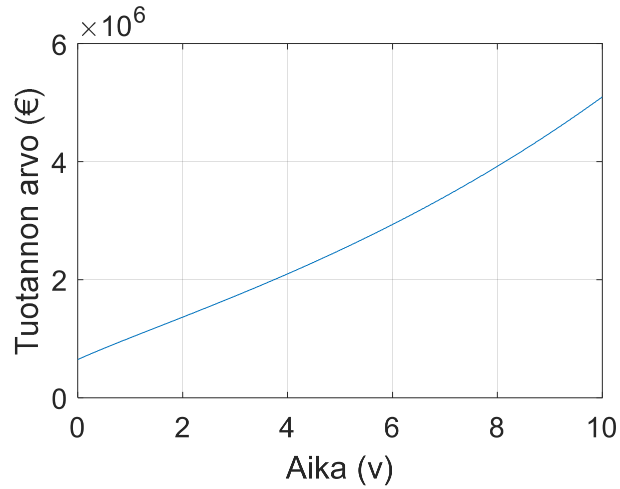
$$v'(x) = D\big(f(x) \cdot g(x)\big) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

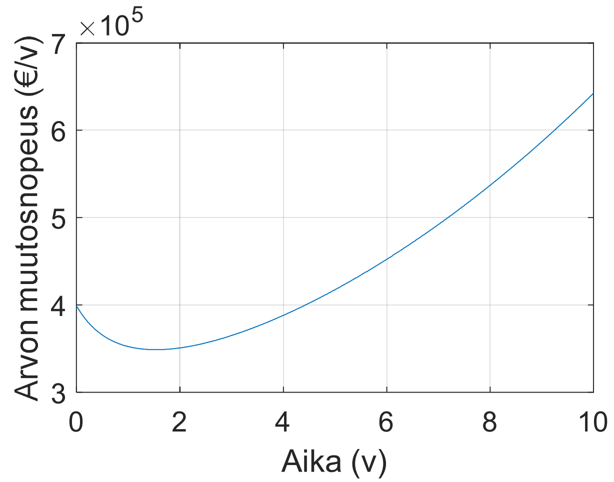
$$= D(186400(x+1)^{0.54}) \cdot (3.47 \cdot 1.08^x) + D(3.47 \cdot 1.08^x) \cdot (186400(x+1)^{0.54})$$

$$= 0.54 \cdot 186400(x+1)^{-0.46} \cdot (3.47 \cdot 1.08^x) + 3.47 \cdot 1.08^x \ln 1.08 \, (186400(x+1)^{0.54})$$

$$= 349276 \cdot (x+1)^{-0.46} \cdot 1.08^x + 49779 \cdot 1.08^x \cdot (x+1)^{0.54}$$

$$= 1.08^x(349276(x+1)^{-0.46} + 49779 \cdot (x+1)^{0.54})$$





Aalto University
School of Business

Lauri Viitasaari (pohjaa Eeva Vilkkumaan ja Juha Heikkilän materiaaleihin)

Taukojumppa

Määritä funktion $s(x) = 2^x \ln(x+1)$ derivaattafunktio.

1. $\frac{2^x}{x+1}$
2. $2^x\left(\ln(x+3) + \frac{1}{x+1}\right)$
3. $2^x\left(\ln 2 \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)$

Taukojumppa

Tuotteen kysyntää (kpl) ajan t (vko) suhteen kuvaa funktio $k(t) = -7.5t^2 + 300t + 2000$, ja tuotteen hintaa (€/kpl) funktio $h(t) = 25 \cdot 0.9^t$. Mikä on tuotteen myynnistä saatavan tulon muutosnopeus 10 viikon kuluttua tarkastelujakson alusta?

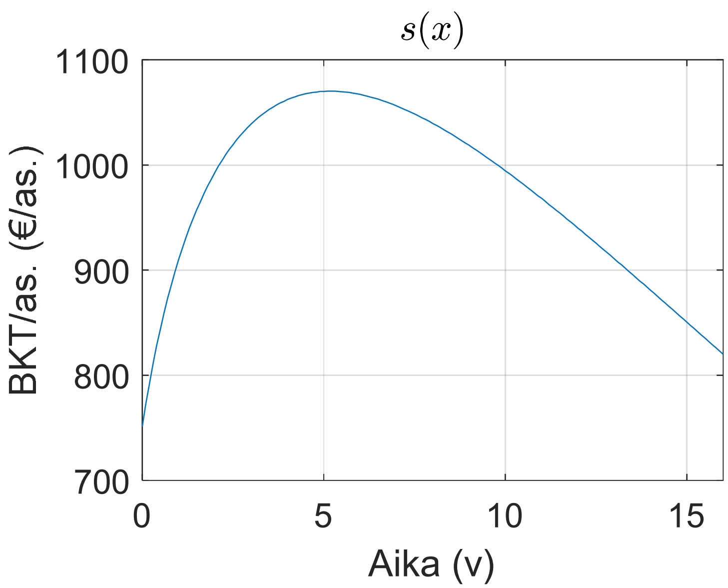
1. -2596 €/vko
2. -1596 €/vko
3. 1596 €/vko

Osamäärän derivointi

- Esim. Kehitysmaassa arvioidaan, että BKT (M€) ja väkiluku (milj. ihmistä) riippuvat ajasta (v) seuraavalla tavalla
  - BKT: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 5860(x+1)^{0.36}$
  - Väkiluku: $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, g(x) = 7.8 \cdot 1.06^x$

- BKT:n arvoa asukasta kohden kuvaa näiden **osamäärä**

$$s: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, s(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5860(x+1)^{0.36}}{7.8 \cdot 1.06^x}$$



Osamäärän derivointi

D10: Osamäärän derivointi

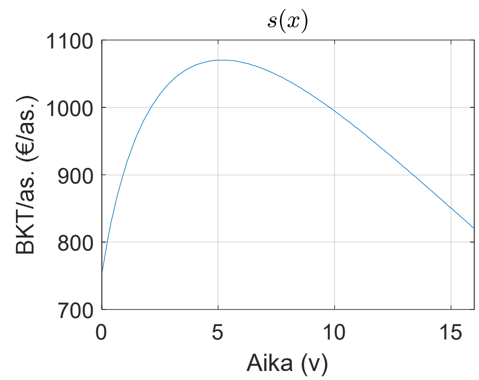
- Jos funktiot f ja g ovat derivoituvia pisteessä x ja $g(x) \neq 0$, niin

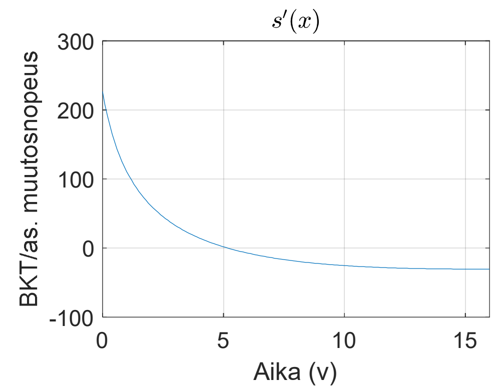
$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Osamäärän derivointi

- BKT:n arvoa asukasta kohden kuvaa funktio

$$s: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, s(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5860(x+1)^{0.36}}{7.8 \cdot 1.06^x}$$





- Asukasta kohden lasketun BKT:n muutosnopeutta kuvaa funktio

$$s'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$= \frac{5860 \cdot 0.36(x+1)^{-0.64} \cdot \cancel{7.8 \cdot 1.06^x} - \cancel{7.8 \cdot 1.06^x} \ln 1.06 \cdot 5860(x+1)^{0.36}}{(7.8 \cdot 1.06^x)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{(x+1)^{0.64}}{(x+1)^{0.64}}$$

$$= \frac{5860 \cdot 0.36 - \ln 1.06 \cdot 5860(x+1)}{7.8 \cdot 1.06^x \cdot (x+1)^{0.64}} = \frac{1768 - 341.5x}{7.8 \cdot 1.06^x \cdot (x+1)^{0.64}} = \frac{226.7 - 43.8x}{1.06^x \cdot (x+1)^{0.64}}$$

Taukojumppa

Määritä funktion $s(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$ derivaattafunktio.

1. $\frac{e^x - 1}{2x}$
2. $\frac{e^x(x-2)+2}{x^3}$
3. $\frac{e^x x^2 + 2x}{x^4}$

Taukojumppa

Tuotannon määrää (kpl) ajan t (vko) suhteen kuvaa funktio $m(t) = 1000 \cdot 1.05^t$, ja tuotannon kokonaiskustannusta (€) funktio $k(t) = 2000 \cdot \ln(t + e)$. Mikä on tuotteen yksikkökustannuksen muutosnopeus 20 viikon kuluttua tarkastelujakson alusta?

1. -8.2 c/vko
2. -5.6 c/vko
3. 1.5 c/vko

Harjoittele verkossa!

http://www.wolframalpha.com/problem-generator/

Calculus → Derivatives →

- ❑ Tulon derivaatta: Product rule
- ❑ Osamäärän derivaatta: Quotient rule

Yhteenveto derivointisäännöistä

- Derivointisäännöt joillekin tavallisille funktiotyypeille
  - Potenssifunktio: $D(x^n) = nx^{n-1}$
  - Eksponenttifunktio: $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$, $D(e^x) = e^x$
  - Logaritmifunktio: $D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$, $D(\ln x) = \frac{1}{x}$

- Yleisiä sääntöjä funktioiden yhdistelmien käsittelyyn
  - Yhdistetyn funktion derivaatta: $D(g \circ f)(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$
  - Tulon derivaatta: $D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
  - Osamäärän derivaatta: $D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

Todistuksia aiheesta kiinnostuneille: D6

- Olkoon $f(x) = e^x$. Tällöin $f'(x) = D(e^x) = e^x$.
- Todistus:

Funktion e^h Taylorin sarjakehitelmä, ks. luento 2

$$D(e^x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \ldots - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \ldots)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \cdots) \to e^x$$

- Olkoon $f(x) = a^x$. Tällöin $f'(x) = D(a^x) = a^x \cdot \ln a$
- Todistus:
  - Merkitään $f(x) = (h \circ g)(x) = a^x = e^{\ln \ ^x} = e^{x \ln a}$, missä sisäfunktio $g(x) = x \ln a$ ja ulkofunktio $h(y) = e^y$.
  - Tällöin $g'(x) = \ln a$ ja $h'(y) = e^y$.
  - Yhdistetyn funktion derivointisäännöstä seuraa $f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$.

Todistuksia aiheesta kiinnostuneille: D7

- Olkoon $f(x) = \ln x$. Tällöin $f'(x) = D(\ln x) = \frac{1}{x}$.

- Todistus: $D(\ln x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{k\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{k}\right)^{k} \to \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$.

Muuttujan vaihto:
$k = \frac{1}{h}$

- Olkoon $f(x) = \log_a x$. Tällöin $f'(x) = D(\ln x) = \frac{1}{x \ln a}$
- Todistus: $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$, jolloin $D(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot D(\ln x) = \frac{1}{x \ln a}$