



Aalto University
School of Business

Talousmatematiikan perusteet: Luento 7

Suhteellinen muutosnopeus ja jousto

Viime luennoilla

- Derivointisääntöjä eri funktiotyypeille:
 - Polynomifunktio
 - Potenssifunktio
 - Eksponenttifunktio
 - Logaritmifunktio

- Funktioiden yhdistelmien derivointi:
 - Yhdistetyn funktion derivointi
 - Tulon ja osamäärän derivointi

Tällä luennolla

- Derivaatan kauppatieteellisiä sovelluksia
 - Suhteellinen muutosnopeus
 - Jousto

Suhteellinen muutosnopeus

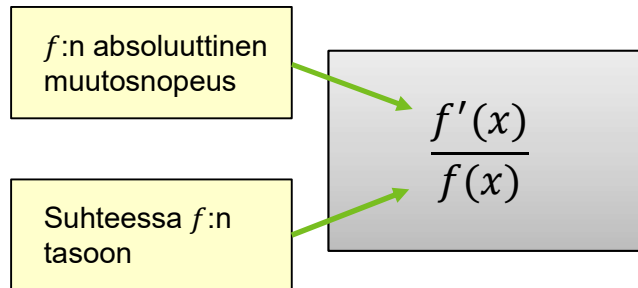
- Esim. Härvelitehtaan tuotannon määrän kehitystä ajan x (v) suhteen kuvaa funktio $f(x) = 186400(x + 1)^{0.54}$
 - Esim. Vuonna $x=5$ tuotannon taso on $f(5) \approx 490\,510$ kpl.

- Tuotannon määrän **absoluuttista muutosnopeutta** ajan suhteen kuvaa derivaattafunktio $f'(x) = 186400 \cdot 0.54(x + 1)^{0.54-1} = 100656 \cdot (x + 1)^{-0.46}$
 - Esim. Vuodesta 5 vuoteen 6 tuotanto kasvaa likimäärin $f'(5) = 100656 \cdot (5 + 1)^{-0.46} = 44\,146$ kpl/v.

- Kuinka paljon tuotanto kasvaa prosentuaalisesti vuodesta 5 vuoteen 6? Eli mikä on tuotannon **suhteellinen muutosnopeus**?
 - Suhteellinen muutosnopeus vuonna 5: $\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{44\,146}{490\,510} = 0.09 = 9\%$

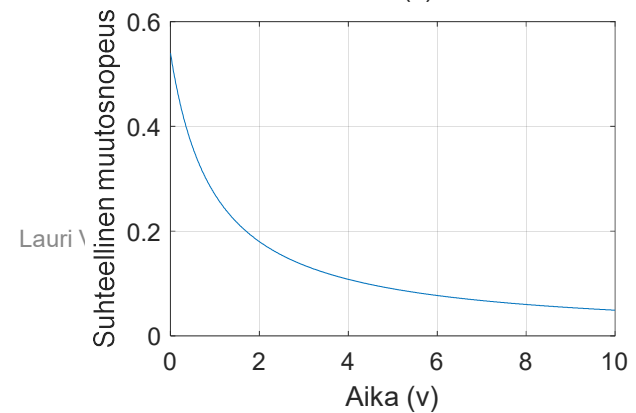
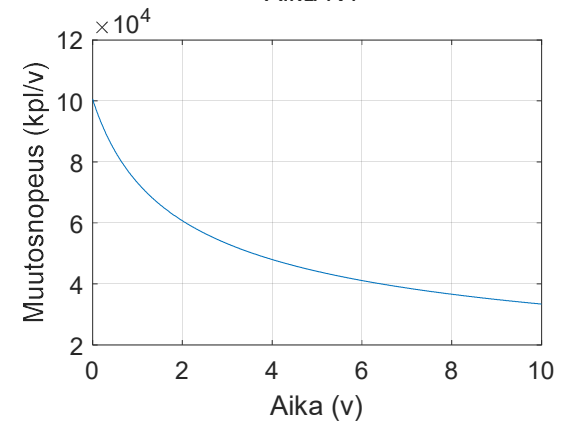
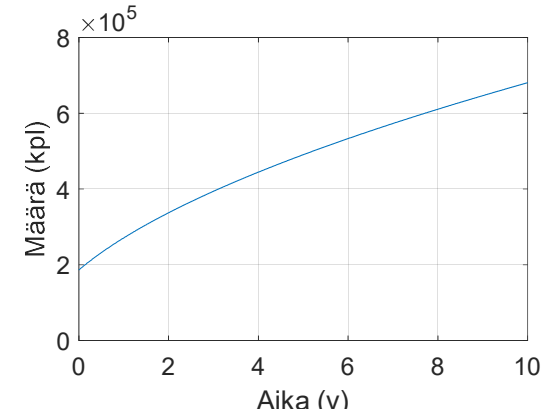
Suhteellinen muutosnopeus

- Funktion $f(x)$ suhteellinen muutosnopeus arvon x kohdalla saadaan siis kaavalla



- Esim. Härvelitehtaan tuotannon määrän suhteellinen muutosnopeus on

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{100656(x+1)^{-0.46}}{186400(x+1)^{0.54}} = \frac{0.54}{x+1}$$



Suhteellinen muutosnopeus

- Huomaa, että f :n suhteellinen muutosnopeus = f :n logaritmin absoluuttinen muutosnopeus

$$D(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- Perustelu yhdistetyn funktion $(g \circ f)(x) = \ln f(x)$ derivaatan kautta:
 - Sisäfunktio $f(x)$, derivaatta $f'(x)$
 - Ulkofunktio $g(y) = \ln y$, derivaatta $g'(y) = \frac{1}{y}$
 - Yhdistetyn funktion derivaatta $D(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
- Miksi kiinnostavaa? Joskus $D(\ln f(x))$ on paljon helpompi laskea kuin $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

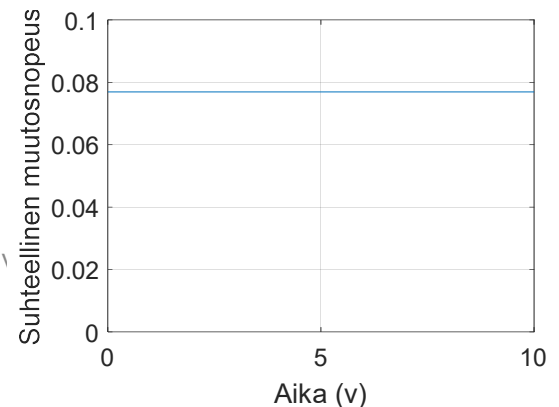
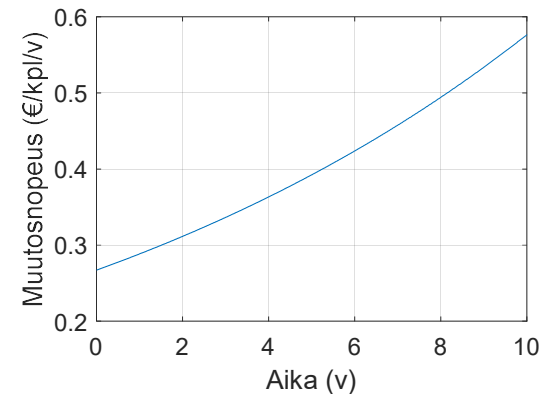
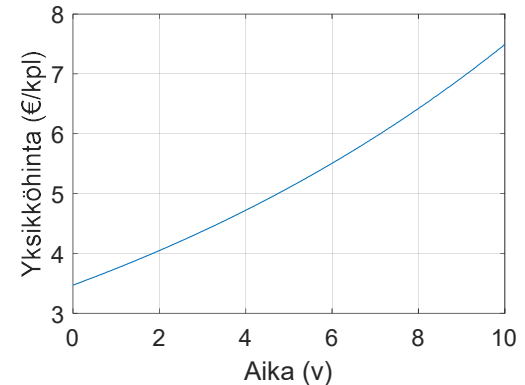
Suhteellinen muutosnopeus

- ❑ Härvelitehtaan tuotteiden yksikköhinnan kehitystä ajan x (v) suhteen kuvaa funktio $g(x) = 3.47 \cdot 1.08^x$
- ❑ Yksikköhinnan absoluuttista muutosnopeutta kuvaa derivaattafunktio $g'(x) = 3.47 \cdot \ln 1.08 \cdot 1.08^x$
- ❑ Yksikköhinnan suhteellista muutosnopeutta kuvaa vakiofunktio

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3.47 \cdot \ln 1.08 \cdot 1.08^x}{3.47 \cdot 1.08^x} = \ln 1.08 \approx 7.7\%$$

- ❑ Sama tulos saadaan myös huomaamalla, että $\ln g(x) = \ln 3.47 + x \ln 1.08$, jolloin suhteellinen muutosnopeus on

$$D(\ln g(x)) = \ln 1.08 \approx 7.7\%$$



Lauri \

Taukojumppa

Lääkkeen valmistuksessa käytettävän bakteerikannan suuruutta B (kpl) ajan x (h) suhteen kuvaa funktio $B = f(x) = 10\,000 \cdot 2^x$. Mikä funktio $g(x)$ kuvaa bakteerikannan suuruuden suhteellista muutosnopeutta?

1. $g(x) = \ln 2$
2. $g(x) = x \ln 2$
3. $g(x) = \ln 2 \cdot 10\,000 \cdot 2^x$

Taukojumppa

Tuotannon kokonaiskustannusta (k€) ajan t (vko) suhteen kuvaa funktio $k(t) = 2 \ln(t + e)$. Mikä on tuotteen kokonaiskustannuksen suhteellinen muutosnopeus 5 viikon kuluttua tarkastelujakson alusta?

1. 2.1 %
2. 4.2 %
3. 6.3 %

Tulon suhteellinen muutosnopeus

- Härvelitehtaan tuotannon arvo $v(x)$ ajan funktiona saatiin tuotantomäärän $f(x)$ ja yksikköhinnan $g(x)$ tulona:

$$v(x) = f(x) \cdot g(x) = \overbrace{186400(x+1)^{0.54}}^{f(x)} \cdot \underbrace{3.47 \cdot 1.08^x}_{g(x)}$$

- Tuotannon arvon suhteellinen muutosnopeus saadaan tällöin

$$D(\ln v(x)) = D(\ln(f(x) \cdot g(x))) = D(\ln f(x) + \ln g(x)) = D(\ln f(x)) + D(\ln g(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{186400 \cdot 0.54 \cdot (x+1)^{-0.46}}{186400(x+1)^{0.54}} + \frac{3.47 \cdot 1.08^x \cdot \ln 1.08}{3.47 \cdot 1.08^x} = \frac{0.54}{x+1} + \ln 1.08$$

Tuotantomäärän suht.
muutosnopeus

Yksikköhinnan suht.
muutosnopeus

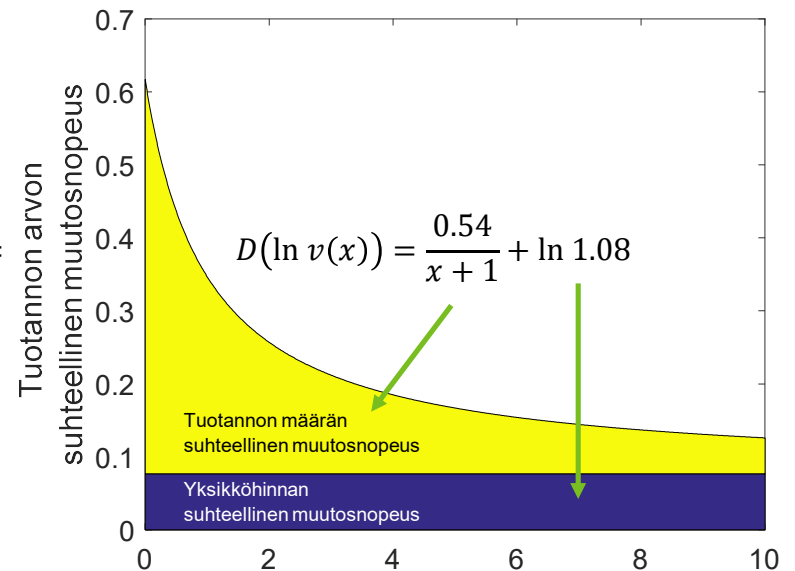
- Tulofunktion (tuotannon arvo) suhteellinen muutosnopeus on sen tekijöiden (tuotantomäärän ja yksikköhinnan) suhteellisten muutosnopeuksien summa!

Tulon suhteellinen muutosnopeus

- Tuotannon määrän ja yksikköhinnan vaikutus näkyy paljon selvemmin tuotannon arvon suhteellisessa kuin absoluuttisessa muutosnopeudessa:

- Alussa $D(\ln v(0)) = \frac{0.54}{1} + \ln 1.08 = 54\% + 7.7\% = 61.7\%$
- 5 vuoden kuluttua $D(\ln v(5)) = \frac{0.54}{6} + \ln 1.08 = 9\% + 7.7\% = 16.7\%$
- 10 vuoden kuluttua $D(\ln v(10)) = \frac{0.54}{11} + \ln 1.08 = 4.9\% + 7.7\% = 12.6\%$

→ Alussa tuotannon arvon suhteellista muutosnopeutta ruokkii voimakkaammin tuotannon määrän muutos, myöhemmin taas yksikköhinnan muutospyrkimys



Taukojumppa

Tuotteen kysyntää (kpl) ajan t (vko) suhteen kuvaa funktio $k(t) = -7.5t^2 + 300t + 2000$, ja tuotteen hintaa (€/kpl) funktio $h(t) = 25 \cdot 0.9^t$. Mikä on tuotteen myynnistä saatavan tulon suhteellinen muutosnopeus 8 viikon kuluttua tarkastelujakson alusta?

1. -6 %
2. -5 %
3. -4 %

Miten suhteellinen muutosnopeus jakautuu kysynnän ja hinnan muutospyrkimysten suhteen?

Osamäärän suhteellinen muutosnopeus

- BKT:n asukaskohtainen arvo $s(x)$ ajan funktiona saatiin BKT:n arvon $f(x)$ ja asukasmäärän $g(x)$ osamääränä:

$$s(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5860(x+1)^{0.36}}{7.8 \cdot 1.06^x}$$

- BKT:n asukaskohtaisen arvon suhteellinen muutosnopeus saadaan tällöin

$$\begin{aligned} D(\ln s(x)) &= D\left(\ln \frac{f(x)}{g(x)}\right) = D(\ln f(x) - \ln g(x)) = D(\ln f(x)) - D(\ln g(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{5860 \cdot 0.36 (x+1)^{-0.64}}{5860(x+1)^{0.36}} - \frac{7.8 \cdot 1.06^x \cdot \ln 1.06}{7.8 \cdot 1.06^x} = \frac{0.36}{x+1} - \ln 1.06 \end{aligned}$$

BKT:n
muutosnopeus

Asukasmäärän
muutosnopeus

- Osamääräfunktion (BKT:n asukaskohtainen arvo) suhteellinen muutosnopeus on sen tekijöiden (BKT:n ja asukasmäärän) suhteellisten muutosnopeuksien erotus!

Osamäärän suhteellinen muutosnopeus

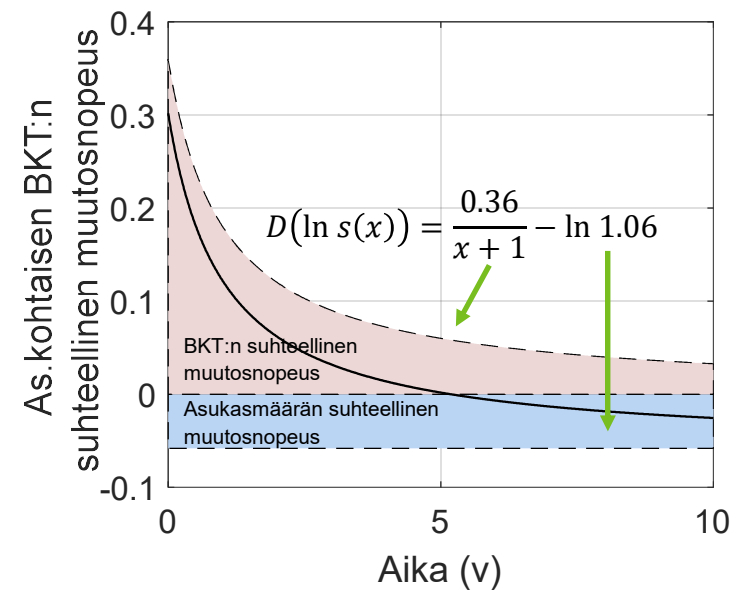
- BKT:n ja asukasmäärän vaikutus näkyy paljon selvemmin asukaskohtaisen BKT:n suhteellisessa kuin absoluuttisessa muutosnopeudessa:

- Alussa $D(\ln s(0)) = \frac{0.36}{1} - \ln 1.06 = 36\% - 5.8\% = 30.2\%$

- 5 vuoden kuluttua $D(\ln s(5)) = \frac{0.36}{6} - \ln 1.06 = 6\% - 5.8\% = 0.2\%$

- 10 vuoden kuluttua $D(\ln s(10)) = \frac{0.36}{11} - \ln 1.06 = 3.3\% - 5.8\% = -2.5\%$

- Alussa BKT:n voimakas kasvu ruokkii asukaskohtaisen BKT:n kasvua, mutta myöhemmin väestön voimakas kasvu voittaa hiipuvan BKT:n kasvun ja asukaskohtainen BKT pienenee.



Taukojumppa

Tuotannon määrää (kpl) ajan t (vko) suhteen kuvaa funktio $m(t) = 1000 \cdot 1.05^t$, ja tuotannon kokonaiskustannusta (k€) funktio $k(t) = 2000 \cdot \ln(t + e)$. Mikä on tuotteen yksikkökustannuksen suhteellinen muutosnopeus 10 viikon kuluttua tarkastelujakson alusta?

1. -2.8 %
2. -1.8 %
3. 1.8 %

Miten suhteellinen muutosnopeus jakautuu kokonaiskustannuksen ja tuotannon määrän muutospyrkimysten suhteen?

Jousto

- ❑ **Derivaattafunktio** $f'(x)$ antaa likimääräisen vastauksen kysymykseen: “Kuinka suuri on f :n arvon **absoluuttinen muutos**, jos $x \rightarrow x + 1$ (pieni **absoluuttinen muutos**)?”
- ❑ **Suhteellinen muutosnopeus** $D(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ taas vastaa kysymykseen: “Kuinka suuri on f :n arvon **suhteellinen muutos**, jos $x \rightarrow x + 1$ (pieni, **absoluuttinen muutos**)?”
- ❑ Joskus kiinnostaa tietää, kuinka suuri on f :n arvon **suhteellinen muutos**, kun x kasvaa 1% (pieni, **suhteellinen muutos**).
- ❑ Tähän kysymykseen vastaa (likimäärin) funktion f **jousto**

Jousto

- Funktion f derivaatta $f'(x)$ pisteessä x on funktion arvon ja x :n arvon **absoluuttisten muutosten suhteen raja-arvo**:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Funktion f jousto $Ef(x)$ pisteessä x on vastaavien **suhteellisten muutosten raja-arvo**:

$$Ef(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}}{\frac{(x+h) - x}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{x}{f(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)}_{f'(x)} \cdot \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$Ef(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

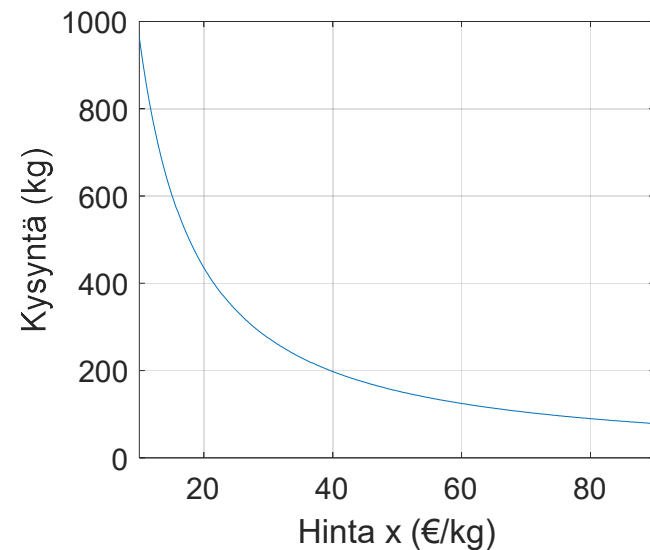
Jousto

- Esim. Kultakalakaviaarin kysynnän (kg) riippuvuutta yksikköhinnasta x (€/kg) kuvaa funktio $f(x) = 13262x^{-1.14}$. Kuinka monta prosenttia kysyntä pienenee, kun hinta nousee prosentin?

- Ratkaisu: Kysynnän hintajousto on

$$E_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{-1.14 \cdot 13262x^{-2.14}}{13262x^{-1.14}} \cdot x = \frac{-1.14}{x} \cdot x = -1.14 \text{ (vakio!)}$$

- Hinnan lähtötasosta x riippumatta hinnan suhteellinen nousu pienentää kysyntää 1.14-kertaisesti (eli 1% hinnankorotus pienentää kysyntää likimäärin 1.14%)



Taukojumppa

Kultakalakaviaarin tarjonnan (kg) riippuvuutta yksikköhinnasta x (€/kg) kuvaa funktio $g(x) = 1.16x^{1.52}$. Mikä on tarjonnan hintajousto lähtöhinnan ollessa 5 €/kg?

1. 0.52
2. 1.52
3. 1.76

Taukojumppa

Mätitähnan viikkokysynnän (t) riippuvuutta yksikköhinnasta h (€/kg) kuvaa funktio $k(h) = 500 \cdot 0.9^h$. Mikä on kysynnän hintajousto lähtöhinnan ollessa 5 €/kg?

1. -0.11
2. -0.53
3. -0.64

Jousto

- Yleisimmin tarkasteltu jousto on kysynnän hintajousto
 - Kuinka muutos hyödykkeen hinnassa vaikuttaa kysyntään?

- Muita tavallisia joustoja:
 - Hyödykkeen kysynnän tulojousto: Kuinka muutos tulotasossa vaikuttaa hyödykkeen kysyntään?
 - Kulutuksen tulojousto: Kuinka muutos tulotasossa vaikuttaa kulutukseen?
 - Kahden hyödykkeen kysynnän ristijousto: Kuinka muutos hyödykkeen 1 kysynnässä vaikuttaa hyödykkeen 2 kysyntään?
 - Hyödykkeen tarjonnan hintajousto: Kuinka muutos hyödykkeen hinnassa vaikuttaa tarjontaan?

Yhteenvedo suhteellisesta muutosnopeudesta ja joustosta

- Derivaatta eli absoluuttinen muutosnopeus $f'(x)$
 - Mikä on funktion arvon absoluuttinen muutos, kun $x \rightarrow x + 1$?
 - Esim. Kuinka monta kpl hyödykkeen kysyntä vähenee, kun hinta nousee euron?
- Suhteellinen muutosnopeus $\frac{f'(x)}{f(x)} = D(\ln f(x))$
 - Mikä on funktion arvon suhteellinen muutos, kun $x \rightarrow x + 1$?
 - Esim. Kuinka monta prosenttia hyödykkeen kysyntä vähenee, kun hinta nousee euron?
- Jousto $Ef(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$
 - Mikä on funktion arvon suhteellinen muutos, kun $x \rightarrow 1.01x$?
 - Esim. Kuinka monta prosenttia hyödykkeen kysyntä vähenee, kun hinta nousee prosentin?