Aalto University
School of Business

Talousmatematiikan perusteet: Luento 8

Usean muuttujan funktiot
Lineaariset funktiot ja indeksit
Osittaisderivaatta

Motivointi

- Tähän asti olemme tarkastelleet yhden muuttujan funktioita ja yhtälöitä
  - Esim. $f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x}, \;\; \ln x + 2 = 0$

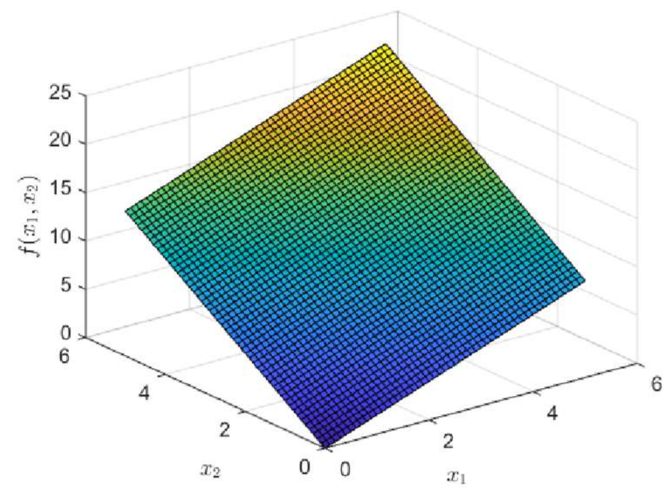
- Luennoilla 8-12 tarkastelemme useamman muuttujan funktioita ja yhtälöitä
  - Esim. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + \frac{2}{x_2}, \;\; \ln x_1 + 2x_2 = 0$

Usean muuttujan lineaariset funktiot

- Usean muuttujan lineaarinen funktio on muotoa $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.
  - Esim. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

- Usean muuttujan lineaarisen funktion kuvaaja on (hyper)taso

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$



Lineaaristen funktioiden sovellus: indeksit

- Esim. Ekonomisti E hankkii USA:sta terveysvaikutteisia luonnontuotteita: Kuntojuomaa (KJ), Terveysuutetta (TU) ja Ihmepillereitä (IP). Hän seuraa näiden hyödykkeiden hintoja ja viikon aikana kuluttamiaan määriä noin vuoden välein:

	Hinnat			Määrät		
Vuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)
2017	0.40	0.50	1.40	35	60	30
2018	0.80	0.60	2.00	50	70	25
2019	0.30	0.80	4.00	120	90	50

- Kuinka suuri on kunkin tuotteen hinnan suhteellinen muutos perusvuodesta 2017 tarkasteluvuoteen 2018? Entä tarkasteluvuoteen 2019?

	Suhteelliset hintamuutokset		
Tarkasteluvuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)
2018	0.80/0.40=2.000	1.200	1.429
2019	0.30/0.40=0.750	1.600	2.857

Laspeyers'n hintaindeksi

- Edellisessä esimerkissä hintatason suhteellinen muutos riippuu tuotteesta
- Yleistä hintatason suhteellista muutosta voidaan kuvata Laspeyers'n hintaindeksillä, jossa tarkastellaan jonkin "hyödykekorin" hinnanmuutosta
- Esim. Valitaan vertailun pohjaksi perusvuoden 2017 keskimääräistä viikkokulutusta vastaava hyödykekori:

	Hinnat			Vuoden 2017 hyödykekori			Korin arvo ($)	Suhteellinen muutos
Vuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)		
2017	0.40	0.50	1.40	35	60	30	86 €	100 %
2018	0.80	0.60	2.00	35	60	30	124 €	144.2 %
2019	0.30	0.80	4.00	35	60	30	178.5 €	207.6 %

Laspeyers’n hintaindeksi

- Laspeyers’n hintaindeksin määritelmä:

$$P_{t_0}^{t}(La) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}},$$

jossa

$q_{10}, \dots, q_{n0}$ muodostavat perusajanjakson t_0 määriä vastaavan hyödykekorin,

$p_{10}, \dots, p_{n0}$ ovat perusajanjakson t_0 tuotekohtaiset hinnat, ja

$p_{1t}, \dots, p_{nt}$ ovat tarkasteluajanjakson t tuotekohtaiset hinnat.

- Edellisen kalvon esimerkissä $P_{2017}^{2018}(La) = 144.2\ \%$ ja $P_{2017}^{2019}(La) = 207.6\ \%$

Paaschen hintaindeksi

- Vertailun pohjaksi voidaan perusajanjakson hyödykekorin sijasta valita tarkasteluajanjakson kori.
- Tällöin hintatason suhteellista muutosta kuvaa Paaschen hintaindeksi:

$$P_{t_0}^{t}(Pa) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it}},$$

- Esim.

$P_{2017}^{2018}(Pa)$

	Hinnat			Vuoden 2018 hyödykekori			Korin arvo ($)	Suhteellinen muutos
Vuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)		
2017	0.40	0.50	1.40	50	70	25	90 €	100 %
2018	0.80	0.60	2.00	50	70	25	132 €	146.7 %

	Hinnat			Vuoden 2019 hyödykekori			Korin arvo ($)	Suhteellinen muutos
Vuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)		
2017	0.40	0.50	1.40	120	90	50	163 €	100 %
2019	0.30	0.80	4.00	120	90	50	308 €	189.0 %

$P_{2017}^{2019}(Pa)$

Indeksien vertailua

- Laspeyers'n hintaindeksi on lineaarinen funktio $f(p_{0t}, \dots, p_{nt}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$, jossa muuttujina ovat tarkasteluajanjakson hinnat $p_{it}, i = 1, \dots, n$ ja i. muuttujan kerroin $a_i = \frac{q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$.
- Paaschen hintaindeksi on lineaarinen funktio $f(p_{0t}, \dots, p_{nt}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it}}$, jossa muuttujina ovat tarkasteluajanjakson hinnat $p_{it}, i = 1, \dots, n$ ja i. muuttujan kerroin $a_i = \frac{q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it}}$.

Vuosi	Laspeyers'n hintaindeksi	Paaschen hintaindeksi
2017	100 %	100 %
2018	144.2 %	146.7 %
2019	207.6 %	189.0 %

- Kerrointen valinta vaikuttaa hintatason suhteellisen muutoksen arviointiin
- Yksikäsitteistä parasta tapaa ei ole, mutta käytännössä Laspeyers'n hintaindeksi on käyttökelpoisempi – ja sitä käytetäänkin esim. kuluttajahintaindeksin laskemisessa.

Fisherin hintaindeksi

- Kompromissi Laspeyres'n ja Paaschen hintaindeksien välillä on Fisherin indeksi, joka on edellisten geometrinen keskiarvo:

$$P_{t_0}^{t}(F) = \sqrt{P_{t_0}^{t}(La) \cdot P_{t_0}^{t}(Pa)}$$

Vuosi	Laspeyers'n hintaindeksi	Paaschen hintaindeksi	Fisherin hintaindeksi
2017	100 %	100 %	100 %
2018	144.2 %	146.7 %	145.4 %
2019	207.6 %	189.0 %	198.1 %

Taukojumppa

- Taulukossa on kahden tuotteen X ja Y hinnat ja kulutetut määrät vuosina 2017 ja 2018. Mikä on hintatason suhteellinen muutos Laspeyers’n hintaindeksin perusteella?

	Hinnat		Määrät	
Vuosi	X (€/kg)	Y (€/g)	X (kg)	Y (g)
2017	1.20	0.77	25	120
2018	1.50	1.00	35	250

1. 122 %
2. 129 %
3. 158 %

Taukojumppa

- Taulukossa on kahden tuotteen X ja Y hinnat ja kulutetut määrät vuosina 2017 ja 2018. Mikä on hintatason suhteellinen muutos Paaschen hintaindeksin perusteella?

	Hinnat		Määrät	
Vuosi	X (€/kg)	Y (€/g)	X (kg)	Y (g)
2017	1.20	0.77	25	120
2018	1.50	1.00	35	250

1. 129 %
2. 154 %
3. 196 %

Taukojumppa

- Taulukossa on kahden tuotteen X ja Y hinnat ja kulutetut määrät vuosina 2017 ja 2018. Mikä on hintatason suhteellinen muutos Fisherin hintaindeksin perusteella?

	Hinnat		Määrät	
Vuosi	X (€/kg)	Y (€/g)	X (kg)	Y (g)
2017	1.20	0.77	25	120
2018	1.50	1.00	35	250

1. 121 %
2. 129 %
3. 142 %

Volyymi- eli määräindeksi

- Kulutettujen määrien suhteellista muutosta voidaan kuvata volyymi- eli määräindekseillä.
- Hintaindeksiä laskettaessa vakioidaan ostettava määräkori, jonka arvon muutos lasketaan muuttuvassa hintatilanteessa
- Volyymi-indeksiä laskettaessa vakioidaan hinnat, joiden vallitessa lasketaan muuttuvan määräkorin arvo.

Laspeyers’n volyymi-indeksi

- Kun hintataso vakioidaan perusvuoden tasoon, kuvaa määrien suhteellista muutosta Laspeyers’n määräindeksi:

$$Q_{t_0}^{t}(La) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

$Q_{2017}^{2018}(La)$

	Vuoden 2017 hinnat			Määrät			Korin arvo ($)	Suhteellinen muutos
Vuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)		
2017	0.40	0.50	1.40	35	60	30	86 €	100 %
2018	0.40	0.50	1.40	50	70	25	90 €	104.7 %
2019	0.40	0.50	1.40	120	90	50	163 €	189.5 %

$Q_{2017}^{2019}(La)$

Paaschen volyymi-indeksi

- Vertailun pohjaksi voidaan perusajanjakson hintojen sijasta valita tarkasteluajanjakson hinnat.
- Tällöin määrien suhteellista muutosta kuvaa Paaschen volyymi-indeksi:

$$Q_{t_0}^{t}(Pa) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}},$$

$Q_{2017}^{2018}(Pa)$

	Vuoden 2018 hinnat			Määrät			Kokonaisarvo ($)	Suhteellinen muutos
Vuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)		
2017	0.80	0.60	2.00	35	60	30	124 €	100 %
2018	0.80	0.60	2.00	50	70	25	132 €	106.5 %

	Vuoden 2019 hinnat			Määrät			Kokonaisarvo ($)	Suhteellinen muutos
Vuosi	KJ ($/dl)	TU ($/g)	IP ($/kpl)	KJ (dl)	TU (g)	IP (kpl)		
2017	0.30	0.80	4.00	35	60	30	178.5 €	100 %
2019	0.30	0.80	4.00	120	90	50	308 €	172.6 %

$Q_{2017}^{2019}(Pa)$

Fisherin volyymi-indeksi

- Fisherin volyymi-indeksi on hintaindeksin tapaan Laspeyres'n ja Paaschen indeksien geometrinen keskiarvo:

$$Q_{t_0}^{t}(F) = \sqrt{Q_{t_0}^{t}(La) \cdot Q_{t_0}^{t}(Pa)}$$

Vuosi	Laspeyers'n volyymi-indeksi	Paaschen volyymi-indeksi	Fisherin volyymi-indeksi
2017	100 %	100 %	100 %
2018	104.7 %	106.5 %	105.5 %
2019	189.5 %	172.6 %	180.8 %

Taukojumppa

- Taulukossa on kahden tuotteen X ja Y hinnat ja kulutetut määrät vuosina 2017 ja 2018. Mikä on Laspeyers'n volyymi-indeksin arvo?

	Hinnat		Määrät	
Vuosi	X (€/kg)	Y (€/g)	X (kg)	Y (g)
2017	1.20	0.77	25	120
2018	1.50	1.00	35	250

1. 122 %
2. 192 %
3. 235 %

Taukojumppa

- Taulukossa on kahden tuotteen X ja Y hinnat ja kulutetut määrät vuosina 2017 ja 2018. Mikä on Paaschen volyymi-indeksin arvo?

	Hinnat		Määrät	
Vuosi	X (€/kg)	Y (€/g)	X (kg)	Y (g)
2017	1.20	0.77	25	120
2018	1.50	1.00	35	250

1. 142 %
2. 172 %
3. 192 %

Usean muuttujan funktiot

- Tähän mennessä olemme tarkastelleet
  - Erilaisia yhden muuttujan funktioita
  - Usean muuttujan lineaarisia funktioita

- Yhden muuttujan funktioista $f(x)$ tiedämme:
  - Derivaatta $f'(x)$ kuvaa funktion muutosnopeutta x:n suhteen

- Seuraavaksi tarkastelemme usean muuttujan funktioita yleisesti

- Erityisesti määrittelemme osittaisderivaatan eli derivaatan vastineen usean muuttujan funktioille

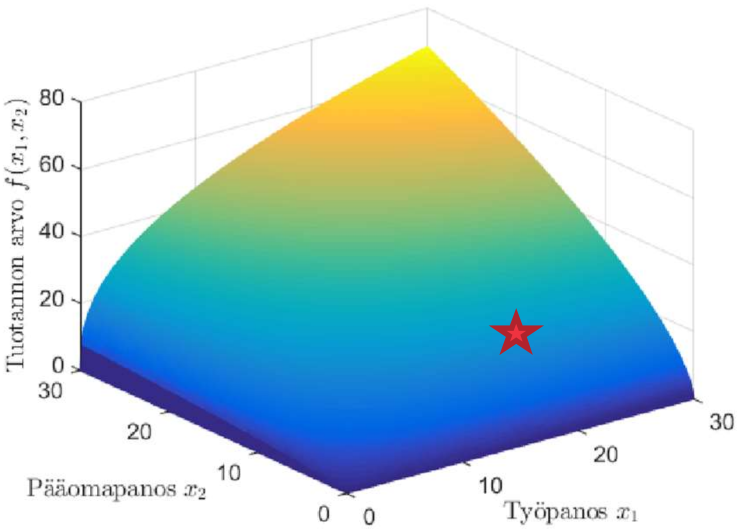
Usean muuttujan funktiot

- Esim. Ekonomisti selvitti, että Arktinen Kala –yhtiön tuotannon arvon riippuvuutta työvoimasta x_1 (M€) ja fyysisestä pääomasta x_2 (M€; laitteet, rakennukset ym. infrastruktuuri) kuvaa Cobb-Douglas-tuotantofunktio f:

$$f(x_1, x_2) = 2.28{x_1}^{0.38}{x_2}^{0.62}.$$

- Esim. Työpanoksella $x_1 = 20$ M€ ja pääomapanoksella $x_2 = 10$ M€ tuotannon arvo on $f(20,10) = 2.28 \cdot 20^{0.38} \cdot 10^{0.62} \approx 29.67$ M€

→ Tuotanto on tappiollista: $(29.67 - 30\,)\text{M€} = -\,0.33\ \text{M€}$



Usean muuttujan funktiot

- Yritys suunnittelee lisäinvestointia tuotantoon. Kuinka työvoimaan ja pääomaan kohdennetut lisäinvestoinnit vaikuttavat tuotannon arvoon?

- Tällaiseen kysymykseen voidaan vastata tarkastelemalla tuotantofunktion <u>muutosnopeutta</u> työvoima- ja pääomapanosten suhteen

Derivaatta ja osittaisderivaatta

- Yhden muuttujan funktion $f(x)$ muutosnopeudesta muuttujan x suhteen kertoo derivaatta $f'(x)$
  - $f'(x) > 0$: funktio kasvaa muuttujan x suhteen
  - $f'(x) < 0$: funktio vähenee muuttujan x suhteen

- Monen muuttujan funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ muutosnopeudesta muuttujan x_i suhteen kertoo <u>osittaisderivaatta</u> $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i}$
  - $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} > 0$: funktio kasvaa muuttujan x_i suhteen
  - $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} < 0$: funktio vähenee muuttujan x_i suhteen
- Eri merkintätapoja:

$$\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i}, D_i f(x_1, \dots, x_n), D_{x_i} f(x_1, \dots, x_n), f_i(x_1, \dots, x_n), f_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

Osittaisderivaatta

- Jos sijoitetun pääoman tasoksi kiinnitetään esim. $x_2 = 10$ M€ ja työpanoksen annetaan vaihdella vapaasti, tuotantofunktio muuttuu yhden muuttujan funktioksi

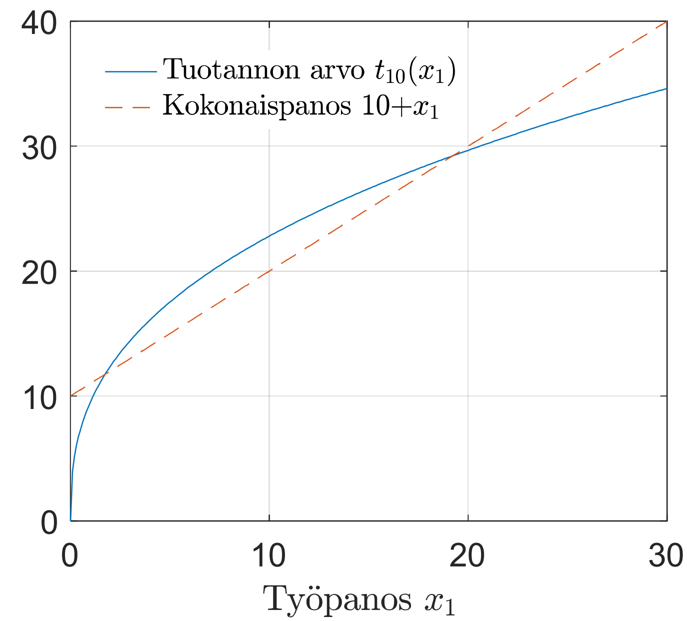
$$t_{10}(x_1) = f(x_1, 10)$$

$$= 2.28{x_1}^{0.38}10^{0.62} = 9.505{x_1}^{0.38}$$

- Tuotanto on voitollista, kun

$$9.505{x_1}^{0.38} - (10 + x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 \in (1.75, 19.24)$$

- Nollakohdat voi ratkaista esim. Wolfram Alphassa komennolla solve(9.505*x^0.38-10-x=0)



Osittaisderivaatta

- Kun x_2 on kiinnitetty arvoon 10 M€, tuotannon arvon muutosnopeutta työvoimapanoksen x_1 suhteen kuvaa derivaatta

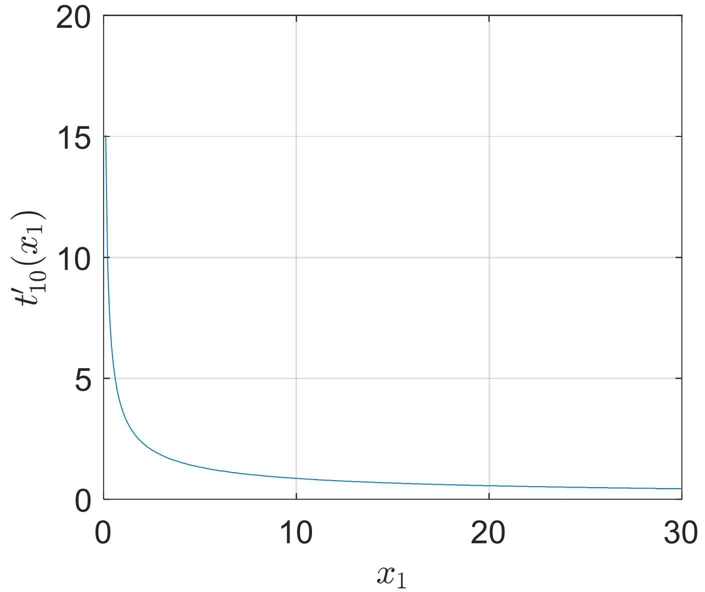
$$t'_{10}(x_1) = D(9.505{x_1}^{0.38}) = 3.612{x_1}^{-0.62}$$

- Yleisemmin: Kun muuttujaa x_2 ajatellaan vakiona, tuotannon arvon muutosnopeutta muuttujan x_1 suhteen kuvaa <u>osittaisderivaatta</u>

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = D_1(2.28{x_1}^{0.38}\boxed{{x_2}^{0.62}}) \quad \text{Vakio!}$$

$$= 2.28{x_2}^{0.62} D_1({x_1}^{0.38}) = 0.38 \cdot 2.28{x_2}^{0.62}{x_1}^{-0.62}$$

$$= 0.8664{x_1}^{-0.62}{x_2}^{0.62}$$



Osittaisderivaatta

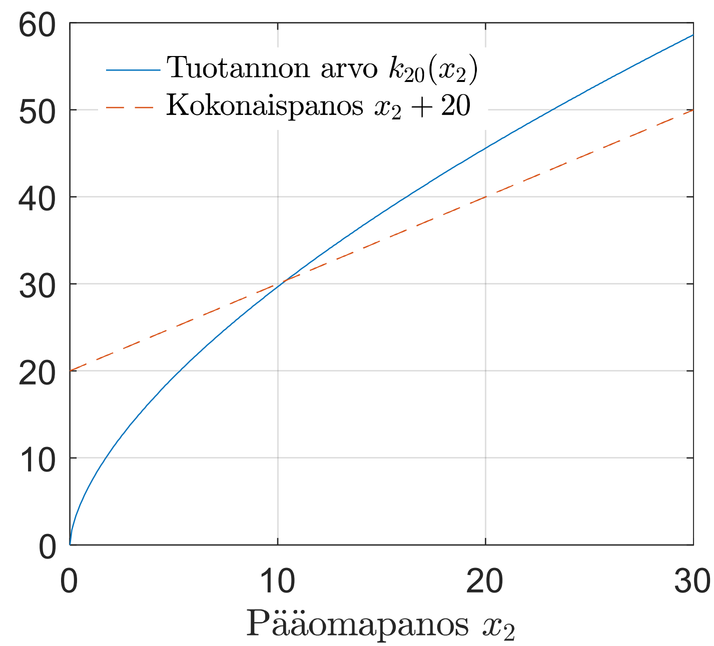
- Jos työpanokseksi kiinnitetään esim. $x_1 = 20$ M€ ja pääomapanoksen annetaan vaihdella vapaasti, tuotantofunktio muuttuu yhden muuttujan funktioksi

$$k_{20}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, k_{20}(x_2) = f(20, x_2)$$

$$= 2.28 \cdot 20^{0.38} {x_2}^{0.62} = 7.117 {x_2}^{0.62}$$

- Tuotanto on voitollista, kun

$$7.117 {x_2}^{0.62} - (20 + x_2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$x_2 \in (10.40, 114.54)$$



Osittaisderivaatta

- Kun x_1 on kiinnitetty arvoon 20 M€, tuotannon arvon muutosnopeutta pääoman x_2 suhteen kuvaa derivaatta

$$k'_{20}(x_2) = D_2(7.117{x_2}^{0.62}) = 4.413{x_2}^{-0.38}$$

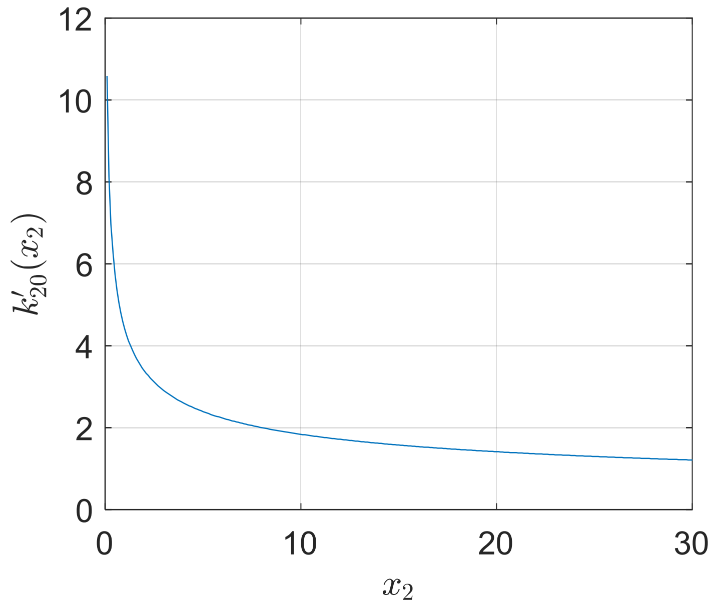
- Yleisemmin: Kun muuttujaa x_1 ajatellaan vakiona, tuotannon arvon muutosnopeutta muuttujan x_2 suhteen kuvaa <u>osittaisderivaatta</u>

Vakio!

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = D_2(2.28\boxed{{x_1}^{0.38}}{x_2}^{0.62}) =$$

$$2.28{x_1}^{0.38}D_2({x_2}^{0.62}) = 0.62 \cdot 2.28{x_1}^{0.38}{x_2}^{-0.38} =$$

$$1.4136{x_1}^{0.38}{x_2}^{-0.38}$$



Osittaisderivaatta

- Tuotantofunktion $f(x_1, x_2)$ osittaisderivaattoja sanotaan myös työpanoksen ja pääoman <u>rajatuottavuuksiksi</u>, esim.

  — $D_1 f(x_1, x_2) = 0.8664 {x_1}^{-0.62} {x_2}^{0.62}$ on työpanoksen rajatuottavuus (kuinka paljon yhden yksikön lisäys työpanokseen kasvattaa tuotannon arvoa eri työvoima- ja pääomapanostasoilla?)

  — $D_2 f(x_1, x_2) = 1.4136 {x_1}^{0.38} {x_2}^{-0.38}$ on pääomapanoksen rajatuottavuus (kuinka paljon yhden yksikön lisäys pääomapanokseen kasvattaa tuotannon arvoa eri työvoima- ja pääomapanostasoilla?)

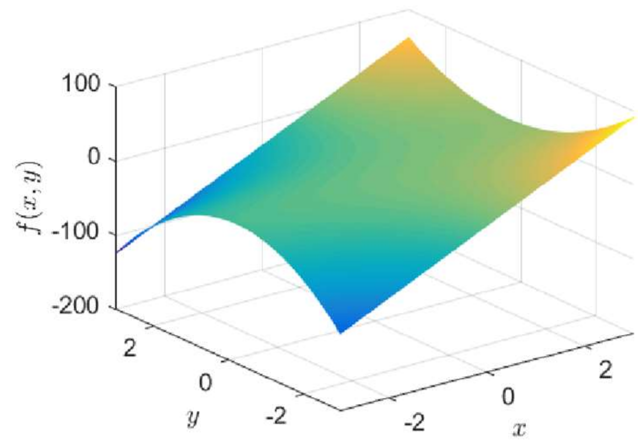
Osittaisderivaatta

- Yhden muuttujan funktioille määriteltyjä derivointisääntöjä voidaan soveltaa, kun muut muuttujat ajatellaan vakioina.

- Esim. $f(x,y) = 3xy^2 - 2y^2 + 4x - 5y + 1$

- $$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= D_x(3xy^2 - 2y^2 + 4x - 5y + 1) \\ &= D_x(3xy^2 + 4x) + D_x(-2y^2 - 5y + 1) \\ &= 3y^2 D_x(x) + 4D_x(x) + 0 = 3y^2 + 4 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} D_y f(x,y) &= D_y(3xy^2 - 2y^2 + 4x - 5y + 1) \\ &= D_y(3xy^2 - 2y^2 - 5y) + D_y(4x + 1) \\ &= 3xD_y(y^2) - 2D_y(y^2) - 5D_y(y) + 0 = 6xy - 4y - 5 \end{aligned}$$

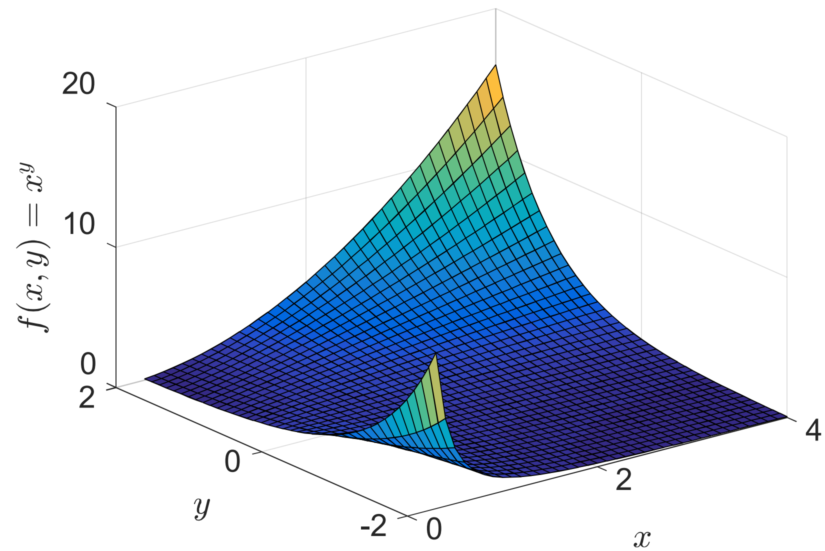


Osittaisderivaatta

- Esim. $f(x,y) = x^y$ on potenssifunktio *x*:n suhteen ja eksponenttifunktio *y*:n suhteen

- $D_x f(x,y) = D_x(x^y) = yx^{y-1}$

- $D_y f(x,y) = D_y(x^y) = x^y \cdot \ln x$



Taukojumppa

Määritä funktion $f(x,y,z) = ze^{2x} + x^3\sqrt{y} - \frac{y}{\ln}$ osittaisderivaatta $f_x(x,y,z)$.

1. $2ze^{2x} + 3x^2\sqrt{y}$
2. $e^{2x} + \sqrt{y}$
3. $2ze^{2x} + \frac{3x^2}{2\sqrt{y}} - \frac{y}{\ln z}$

Taukojumppa

Tuotannon arvoa työvoimapanoksen x_1 (M€) ja pääomapanoksen x_2 (M€) suhteen kuvaa tuotantofunktio f:

$$f(x_1, x_2) = 1.5{x_1}^{0.30}{x_2}^{0.70}$$

Mikä funktio kuvaa pääomapanoksen rajatuottavuutta?

1. $g(x_1, x_2) = 0.45{x_1}^{-0.70}{x_2}^{0.70}$
2. $g(x_1, x_2) = 1.05{x_1}^{0.30}{x_2}^{-0.30}$
3. $g(x_1, x_2) = 1.05{x_1}^{0.30}{x_2}^{-0.70}$