Aalto University
School of Business

Talousmatematiikan perusteet: Luento 9

Gradientti
Suhteellinen muutosnopeus ja osittaisjousto

Viime luennolla

- Usean muuttujan funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ muutosnopeutta muuttujan x_i suhteen kuvaa osittaisderivaatta $\mathrm{D}_i f(x_1, \dots, x_n)$

- Osittaisderivaatta lasketaan
  1. Mieltämällä kaikki muut muuttujat vakioiksi
  2. Soveltamalla yhden muuttujan funktion dervointisääntöjä

Tällä luennolla

- Määrittelemme osittaisderivaattojen muodostaman vektorin eli gradientin

- Määrittelemme suhteellisen muutosnopeuden ja jouston vastineet usean muuttujan funktioille
  - (Osittainen) suhteellinen muutosnopeus
  - Osittaisjousto

Gradientti

- Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ gradientti $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$ on pystyvektori, jonka i. komponentti on f:n osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} D_1 f(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ D_n f(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

- Gradientti kertoo funktion f muutospyrkimyksestä (suunta ja voimakkuus) pisteessä $(x_1, \dots, x_n)$.

Gradientti

- Esim. Ekonomisti selvitti, että Arktinen Kala –yhtiön tuotannon arvon riippuvuutta työvoimasta x_1 (M€) ja fyysisestä pääomasta x_2 (M€; laitteet, rakennukset ym. infrastruktuuri) kuvaa Cobb-Douglas-tuotantofunktio f:

$$f(x_1, x_2) = 2.28{x_1}^{0.38}{x_2}^{0.62}.$$

- Tuotannon arvon osittaisderivaatta työpanoksen suhteen:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0.8664{x_1}^{-0.62}{x_2}^{0.62}$$

- Tuotannon arvon osittaisderivaatta pääomapanoksen suhteen

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 1.4136{x_1}^{0.38}{x_2}^{-0.38}$$

Gradientti

- Tuotantofunktion muutospyrkimystä kuvaa vektori:

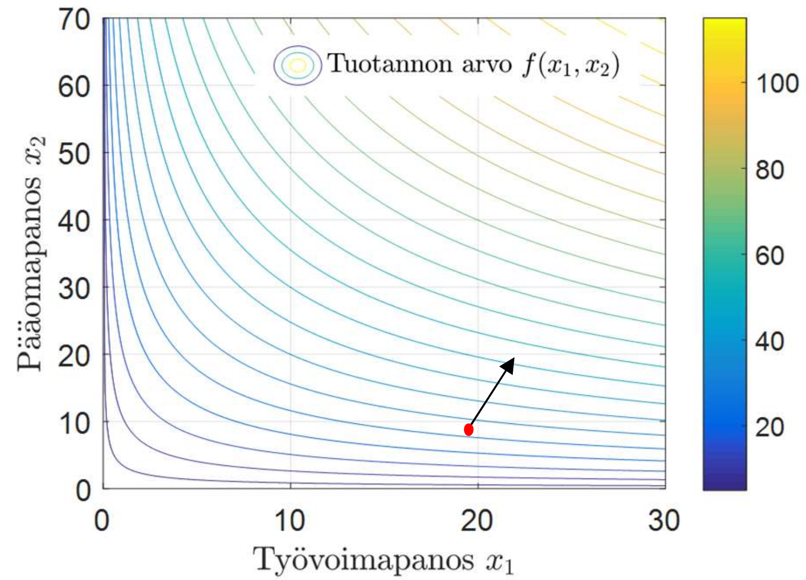
$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0.8664{x_1}^{-0.62}{x_2}^{0.62} \\ 1.4136{x_1}^{0.38}{x_2}^{-0.38} \end{bmatrix}$$

- Tuotannon arvon muutospyrkimys työvoimapanoksen ollessa 20 M€ ja pääomapanoksen 10 M€:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0.8664 \cdot 20^{-0.62}10^{0.62} \\ 1.4136 \cdot 20^{0.38}10^{-0.38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.564 \\ 1.840 \end{bmatrix}$$

- Esim. 0.1 M€:n lisäpanostus työvoimaan kasvattaa tuotannon arvoa likimäärin $0.1 \cdot 0.564 = 0.0564 = 56\,400€$

- Esim. 0.1 M€:n lisäpanostus pääomaan kasvattaa tuotannon arvoa likimäärin $0.1 \cdot 1.840 = 0.184 = 184\,000€$



Gradientti

- Yleisesti: Kun muuttuja $x_i \to x_i + \Delta x_i$, niin funktion arvon likimääräinen muutos on

$$f(x_1, \dots, x_n) \to f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \Delta x_i$$

- Kun muuttujavektori $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ \vdots \\ x_n + \Delta x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}$, niin funktion arvon likimääräinen muutos on

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n) &\to f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n \\ &= f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Gradientti

- Muuttujavektorin pienillä muutoksilla $\Delta\boldsymbol{x}$ muutos funktion arvossa on siis likimäärin gradientin ja muutosvektorin pistetulo $\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta\boldsymbol{x}$

- Pätee, että $\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta\boldsymbol{x} = \cos\theta \cdot ||\nabla f(\boldsymbol{x})||||\Delta\boldsymbol{x}||$, missä θ on vektorien $\nabla f(\boldsymbol{x})$ ja $\Delta\boldsymbol{x}$ välinen kulma

- Jos vektorit $\nabla f(\boldsymbol{x})$ ja $\Delta\boldsymbol{x}$ ovat
  - Lähes samansuuntaiset $\rightarrow \theta \approx 0 \rightarrow \cos\theta \approx 1$
  - Lähes vastakkaissuuntaiset $\rightarrow \theta \approx 180° \rightarrow \cos\theta \approx -1$
  - Kohtisuorassa toisiaan vastaan, $\rightarrow \theta \approx 90° \rightarrow \cos\theta \approx 0$

Gradientti

- Jos muutosvektorin $||\Delta \boldsymbol{x}\ ||$ pituus on kiinnitetty, funktion muutos on suurin, kun $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0°$.

Funktion $f(\boldsymbol{x})$ arvo muuttuu eniten, kun $\boldsymbol{x}$ muuttuu gradientin $\nabla f(\boldsymbol{x})$ suuntaan

Gradientti

- Esim. Jos lisäpanos 0.2 M€ jaetaan tasan työn ja pääoman kesken, niin tuotannon arvo kasvaa likimain

$$[0.564 \quad 1.840] \cdot \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 0.1 \cdot 0.564 + 0.1 \cdot 1.840 = 0.24 \approx 240\,000\ €$$

- Gradientti ja muutosvektori ovat melko erisuuntaiset: $\cos\theta = \frac{0.2404}{\sqrt{0.564^2+1.840^2}\sqrt{0.1^2+0.1^2}} = 0.88 \Leftrightarrow \theta \approx 28^\circ \rightarrow$ lisäpanos käytetään todennäköisesti epätehokkaasti

- Jaetaan lisäpanos gradientin suhteessa:

$$\Delta x_1 = \frac{0.564}{0.564 + 1.840} \cdot 0.2 = 0.047\ \text{M€}, \qquad \Delta x_2 = \frac{1.840}{0.564 + 1.840} \cdot 0.2 = 0.153\ \text{M€}$$

- Tällä jaolla tuotannon arvo kasvaa likimain $[0.564 \quad 1.840] \cdot \begin{bmatrix} 0.047 \\ 0.153 \end{bmatrix} \approx 308\,000\ €$

Kulman määrittäminen laskimella / Excelissä

- Kosinin käänteisfunktio:
  - Laskimessa tyypillisesti $\cos^{-1}$, acos tai arccos
  - Excelissä =ACOS()

- Excel antaa kulman radiaaneina, jotka voi muuttaa asteiksi funktiolla =DEGREES()

- Laskimessa oletusasetus on yleensä antaa kulma asteina (varmista, näkyykö näytön yläreunassa D vai R). Radiaanituloksen voi muuttaa asteiksi tyypillisesti napista DRG tai DEG.

Taukojumppa

Tuotannon arvoa työvoimapanoksen x_1 (M€) ja pääomapanoksen x_2 (M€) suhteen kuvaa tuotantofunktio f:

$$f(x_1, x_2) = 1.5{x_1}^{0.30}{x_2}^{0.70}$$

Tällä hetkellä työvoima- ja pääomapanokset ovat 5 M€ ja 8 M€. Miten 2 M€:n lisäpanos jakautuu työvoiman ja pääoman kesken, kun jako tehdään gradientin suunnassa?

1. $\Delta x_1 = 0.42, \Delta x_2 = 1.58$
2. $\Delta x_1 = 0.6, \Delta x_2 = 1.4$
3. $\Delta x_1 = 0.81, \Delta x_2 = 1.19$

Kuinka paljon tuotannon arvo likimäärin kasvaa? Entä todellisuudessa?

Suhteellinen muutosnopeus

- Kuten yhden muuttujan funktioiden tapauksessa…
- **Osittaisderivaatta** $\mathrm{D}_i f(x_1, \ldots, x_n)$ antaa likimääräisen vastauksen kysymykseen: “Kuinka suuri on f:n arvon **absoluuttinen muutos**, jos $x_i \to x_i + 1$ (pieni **absoluuttinen muutos**)?”
- **Suhteellinen muutosnopeus** $\mathrm{D}_i\big(\ln f(x_1, \ldots, x_n)\big) = \frac{\mathrm{D}_i f(x_1,\ldots,x_n)}{f(x_1,\ldots,x_n)}$ taas vastaa kysymykseen: “Kuinka suuri on f:n arvon **suhteellinen muutos**, jos $x_i \to x_i + 1$ (pieni, **absoluuttinen muutos**)?”

Suhteellinen muutosnopeus

- Esim. Tuotannon arvon $f(x_1, x_2) = 2.28{x_1}^{0.38}{x_2}^{0.62}$ suhteellinen muutosnopeus työpanoksen x_1 suunnassa:

$$\mathrm{D}_1\big(\ln f(x_1, x_2)\big) = \mathrm{D}_1(\ln 2.28 + 0.38 \ln x_1 + 0.62 \ln x_2) = \frac{0.38}{x_1}$$

- Pääoman suunnassa:

$$\mathrm{D}_2\big(\ln f(x_1, x_2)\big) = \mathrm{D}_2(\ln 2.28 + 0.38 \ln x_1 + 0.62 \ln x_2) = \frac{0.62}{x_2}$$

- Esim. Työpanoksen ollessa 20 M€ ja pääomapanoksen 10 M€
  - 1 M€ lisäys työpanokseen kasvattaa tuotannon arvoa n. $\frac{0.38}{20} = 1.9\%$ (kaikilla pääomatasoilla!)
  - 1 M€ lisäys pääomapanokseen kasvattaa tuotannon arvoa n. $\frac{0.62}{10} = 6.2\%$ (kaikilla työvoimatasoilla!)

Taukojumppa

Tuotannon arvoa (M€) yksikköhinnan x (€) ja ajan t (v) suhteen kuvaa funktio

$$v(x,t) = 1.2(x+1)^{0.2} \cdot 1.08^t$$

Kahden vuoden kuluttua tarkastelujakson alusta tuotteen yksikköhinta on 5 €. Kuinka monta prosenttia yhden euron hinnankorotus likimäärin kasvattaa tuotannon arvoa?

1. 3.3 %
2. 6.7 %
3. 11.0 %

Osittaisjousto

- **Osittaisderivaatta** $\mathrm{D}_i f(x_1, \dots, x_n)$ antaa likimääräisen vastauksen kysymykseen: “Kuinka suuri on f:n arvon **absoluuttinen muutos**, jos $x_i \to x_i + 1$ (pieni **absoluuttinen muutos**)?”

- **Suhteellinen muutosnopeus** $\mathrm{D}_i\big(\ln f(x_1, \dots, x_n)\big) = \frac{\mathrm{D}_i f(x_1,\dots,x_n)}{f(x_1,\dots,x_n)}$ taas vastaa kysymykseen: “Kuinka suuri on f:n arvon **suhteellinen muutos**, jos $x_i \to x_i + 1$ (pieni, **absoluuttinen muutos**)?”

- **Osittaisjousto** $\mathrm{E}_i f(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{D}_i\big(\ln f(x_1, \dots, x_n)\big) \cdot x_i = \frac{\mathrm{D}_i f(x_1,\dots,x_n)}{f(x_1,\dots,x_n)} \cdot x_i$ antaa likimääräisen vastauksen kysymykseen: “Kuinka suuri on f:n arvon **suhteellinen muutos**, kun x kasvaa 1% (pieni, **suhteellinen muutos**)?”

Osittaisjousto

- Esim. Tuotannon arvon $f(x_1, x_2) = 2.28{x_1}^{0.38}{x_2}^{0.62}$ osittaisjousto työpanoksen x_1 suunnassa:

$$\mathrm{D}_1\big(\ln f(x_1, x_2)\big) \cdot x_1 = \frac{0.38}{x_1} \cdot x_1 = 0.38$$

- Pääoman suunnassa:

$$\mathrm{D}_2\big(\ln f(x_1, x_2)\big) \cdot x_2 = \frac{0.62}{x_2} \cdot x_2 = 0.62$$

- Tulkinta:
  - 1% lisäys työpanokseen kasvattaa tuotannon arvoa 0.38% työpanoksen ja pääomapanoksen tasoista riippumatta
  - 1% lisäys pääomapanokseen kasvattaa tuotannon arvoa 0.62% työpanoksen ja pääomapanoksen tasoista riippumatta

Taukojumppa

Määritä funktion $f(x_1, x_2) = e^{x_1}\sqrt{x_2}$ osittaisjousto muuttujan x_1 suhteen.

1. x_1
2. $x_1\sqrt{x_2}$
3. ${x_1}^2$

Taukojumppa

Tuotannon arvoa (M€) yksikköhinnan x (€) ja ajan t (v) suhteen kuvaa funktio

$$v(x,t) = 1.2(x+1)^{0.2} \cdot 1.08^{t}$$

Kahden vuoden kuluttua tarkastelujakson alusta tuotteen yksikköhinta on 5 €. Kuinka monta prosenttia yhden prosentin hinnankorotus likimäärin kasvattaa tuotannon arvoa?

1. 0.17 %
2. 16.7 %
3. 33.4 %

Yhteenveto

- Funktion gradientti $\nabla f(x_1, \ldots, x_n)$ on vektori, jonka i. komponentti on osittaisderivaatta $\mathrm{D}_i f(x_1, \ldots, x_n)$

- Gradientti kertoo funktion nopeimman kasvun suunnan

- Suhteellinen muutosnopeus muuttujan x_i suunnassa: $\mathrm{D}_i(\ln f(x_1, \ldots, x_n)) = \frac{\mathrm{D}_i f(x_1,\ldots,x_n)}{f(x_1,\ldots,x_n)}$

- Osittaisjousto muuttujan x_i suunnassa: $\mathrm{D}_i(\ln f(x_1, \ldots, x_n)) \cdot x_i = \frac{\mathrm{D}_i f(x_1,\ldots,x_n)}{f(x_1,\ldots,x_n)} \cdot x_i$