Sähkömagnetismi (ENG2)

Jami Kinnunen

6. helmikuuta 2019

Sisältö

1 Sähkökentät **2**
1.1 Sähköinen voima, sähkökenttä ja sähköpotentiaali . . . 2
1.2 Coulombin voima . . . 2
1.3 Sähkökenttä ja Gaussin laki . . . 2
1.3.1 Sähkökenttä . . . 2
1.3.2 Gaussin laki sähkökentälle: varaus synnyttää sähkökentän . . . 2
1.4 Sähköinen potentiaalienergia ja sähköpotentiaali . . . 3
1.5 Sähkökenttä potentiaalista . . . 3
1.6 Usean varauksen kenttä ja potentiaali: superpositioperiaate . . . 4

2 Magneettikentät **4**
2.1 Kahden virtajohtimen välinen voima . . . 4
2.2 Lorentzin voima . . . 4
2.3 Ampèren laki: sähkövirta synnyttää magneettikentän . . . 5
2.4 Biot-Savartin laki . . . 5
2.5 Gaussin laki magneettikentälle: ei ole magneettista monopolia . . . 5

3 Sähkömagneettinen induktio **5**
3.1 Faradayn havainto . . . 5
3.2 Faradayn induktiolaki: Muuttuva magneettikenttä synnyttää sähkökentän . . . 6
3.3 Sähkömagneettisen induktion merkitys . . . 6

4 Maxwellin yhtälöt ja sähkömagneettinen aalto **6**
4.1 Maxwellin yhtälöt . . . 6
4.2 Sähkömagneettinen säteily . . . 7
4.3 Sähkömagneettinen aalto . . . 7
4.3.1 Sähkömagneettisen säteilyn energia . . . 7
4.3.2 Sähkömagneettisen säteilyn liikemäärä ja säteilypaine . . . 8

5 Sähköpiirit **8**
5.1 Kondensaattori . . . 8
5.2 Käämi . . . 8
5.3 RLC-piirit . . . 9
5.3.1 Kirchoffin lait . . . 9
5.3.2 Komponentit . . . 9
5.3.3 RC-piiri eli kondensaattori ja vastus . . . 9
5.3.4 LC-piiri eli käämi ja kondensaattori . . . 9
5.4 Vaihtojännite ja -virta . . . 10

1 Sähkökentät

1.1 Sähköinen voima, sähkökenttä ja sähköpotentiaali

Sähköllä on muutamia perusominaisuuksia:

1. *Sähkövaraus* eli lyhyemmin varaus on aineen ominaisuus. Sähkövarauksia on kahdenlaisia, positiivisia ja negatiivisia.
2. Sähkövaraus ilmenee varattujen kappaleiden välisenä *Coulombin voimana*.
3. Sähköisen voiman välittäjä on *sähkökenttä*.

1.2 Coulombin voima

Coulombin mukaan kahden varatun, pistemäisen kappaleen välillä vaikuttaa voima

$$\vec{F}_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12},$$

missä Q_1 ja Q_2 ovat kappaleiden varaukset, r_{12} niiden välinen etäisyys, $\hat{r}_{12}$ kappaleiden välinen yksikkövektori ja k verrannollisuuskerroin, joka yleensä kirjoitetaan tyhjiön permittiivisyyden ϵ_0 avulla $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Coulombin voiman suunta määräytyy varausten merkeistä. Samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan ja erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa.

1.3 Sähkökenttä ja Gaussin laki

1.3.1 Sähkökenttä

Michael Faraday esitti 1800-luvun puolivälissä, että Coulombin voima vaikuttaa sähkökentän kautta. Jokaiseen varaukseen liittyy sähkökenttä, jonka muut varaukset tuntevat Coulombin voimana. Sähkökenttä on määritelty testivarauksen avulla: ajatellaan, että meillä on pieni positiivinen varaus $q > 0$ (vaikkapa pieni varattu hiukkanen). Jos tähän kohdistuu jossakin pisteessä sähköinen voima $\vec{F}$, niin tässä pisteessä sähkökentäksi määritellään

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

1.3.2 Gaussin laki sähkökentälle: varaus synnyttää sähkökentän

Vaikka sähkökenttä on määritelty havaittavaksi testivarauksen avulla, niin se on ennenkaikkea kentän synnyttävän varauksen ominaisuus, sillä testivaraus jaetaan pois kentän määritelmästä. Sähkökenttä pystytäänkin lausumaan suoraan sen synnyttävän varauksen avulla käyttäen Gaussin lakia sähkökentälle.

Gaussin laissa perustana on sähkökentän vuo eli vastaus kysymykseen, kuinka suuri määrä kenttää $\vec{E}$ läpäisee tietyn avaruuden pinnan $\mathcal{A}$. Tämä on laskettavissa integraalina

$$\Phi_E = \int_{\mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA,$$

missä $\mathcal{A}$ on jokin avaruuden (suunnistuva) pinta, $\vec{E}$ sähkökenttä pinnalla ja $\vec{n}$ pinnan normaali. Jokaisessa pinnan pisteessä siis tarkastellaan sitä kentän osaa, joka suuntautuu pinnan läpi (eli pinnan normaalin suuntaan) ja vuo saadaan, kun lasketaan yhteen tilanne pinnan joka pisteessä.

Faradayn mukaan varaukset synnyttävät sähkökentän, joten Gaussin lain kannalta varaukset ovat sähkökentän lähteitä tai nieluja. Jos tarkastelemme suljettua pintaa (esimerkiksi pallopinta), niin on kaksi vaihtoehtoa:

1. Pinnan sisällä ei ole varauksia tai siellä on yhtä paljon positiivisia ja negatiivisia varauksia. Tällöin pinnan sisälle ei jää yhtään sähkökentän nettolähdettä tai -nielua, jolloin kaikki pinnan läpi sisään menevät kenttäviivat tulevat sieltä myös ulos (ja tietysti toisinpäin). Näin kokonaisvuo pinnan läpi on nolla.

2. Pinnan sisälle on jäänyt nettovaraus. Tällöin varauksista lähtevät sähkökentät joutuvat tulemaan ulos pinnasta eivätkä ne kaikki voi palata takaisin, joten pinnan läpi kulkee nollasta poikkeava sähkökentän vuo.

Gaussin laki formalisoi ylläolevan päättelyn. Sen mukaan sähkökentän vuo suljetun pinnan läpi on verrannollinen pinnan sisällä olevaan nettovaraukseen eli

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0},$$

missä $\mathcal{A}$ on suljettu pinta, $\rho(\mathbf{r})$ on pisteessä $\mathbf{r}$ oleva varaustiheys ja Q_{encl} pinnan sisään jäävä varaus

1.4 Sähköinen potentiaalienergia ja sähköpotentiaali

Huom: Sähköinen potentiaalienergia ja sähköpotentiaali ovat *ainoastaan* konservatiiviseen kenttään soveltuvia käsitteitä. Kaikki sähkökentät eivät ole konservatiivisia, mutta esimerkiksi paikallaan olevien varausten muodostama staattinen kenttä *on konservatiivinen*.

Kun varaus on sähkökentässä, siihen kohdistuu voima. Jos varaus liikkuu, tämä voima tekee työtä varaukseen. Kentän aiheuttaman voiman tekemä työ on

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

kun varaus liikkuu pisteestä A pisteeseen B. *Konservatiivisessa kentässä tehty työ on riippumaton siitä, mitä polkua pitkin pisteestä A kuljetaan pisteeseen B.* Niinpä kentän tekemä työ voidaan ilmaista myös potentiaalienergian muutoksen avulla

$$W = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -(U_B - U_A).$$

Tässä yhteydessä potentiaalienergian muutoksen eteen valittu miinusmerkki tarkoittaa sitä, että kun kenttä tekee työtä, positiivisen varauksen potentiaalienergia vähenee. Kuten sähkökentänkin tapauksessa, myös potentiaalienergiasta voidaan jakaa testivarauksen suuruus q pois, jolloin saamme sähköpotentiaalin (huomaa merkkivalinta)

$$\Delta V = -\frac{W}{q} = \frac{U_B - U_A}{q} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

missä $V_B = \frac{U_B}{q}$ ja $V_A = \frac{U_A}{q}$ ovat *sähköpotentiaalit* pisteissä B ja A. Sähköpotentiaalien ero kahden pisteen A ja B välillä ΔV on *sähköjännite*.

1. Kaiken takana on tavallinen mekaaninen työ. Koska sähkökenttä kohdistaa varaukseen voiman, tulee varauksen liikkuessa kentässä tehtyä työtäkin.

2. Staattisten varausten sähkökenttä ja siis Coulombin voima on konservatiivinen. Tällöin siihen liittyy potentiaalienergia. Kun varaus liikkuu sähkökentässä, sen potentiaalienergia muuttuu.

3. Sähkökentän potentiaalienergia ei riipu siinä liikkuvasta testivarauksesta vaan on kentän ominaisuus. Näin voidaan ottaa käyttöön kenttään liittyvän sähköpotentiaalin käsite.

1.5 Sähkökenttä potentiaalista

Sähköpotentiaalista voidaan määrittää sitä vastaava sähkökenttä. Koska sähköpotentiaali saadaan sähkökentästä integroimalla, saadaan vastaavasti sähkökenttä määritettyä derivoimalla sähköpotentiaalia

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x,y,z)\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y} V(x,y,z)\vec{j} - \frac{\partial}{\partial z} V(x,y,z)\vec{k},$$

eli sähkökenttä on sähköpotentiaalin negatiivinen gradientti.

1.6 Usean varauksen kenttä ja potentiaali: superpositioperiaate

Millaisia kenttä ja potentiaali ovat, jos varauksia on useampia sijoittuneena eri pisteisiin? Kokonaissuureet ovat summa yksittäisten varausten aiheuttamista suureista. Kokonaiskenttä on siis

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i,$$

kun varauksia on N kappaletta ja kukin niistä saa aikaan kentän $\vec{E}_i$. Vastaavasti kokonaispotentiaali on

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i.$$

Sama periaate yleistyy tapaukseen, jossa varaus on jakautunut jatkuvasti kappaleeseen. Jos kappaleen varaustiheys on ρ, niin tilavuusalkiossa $d\mathcal{V}$ on varaus $dq = \rho\, d\mathcal{V}$, joka saa aikaan potentiaaliin komponentin dV. Kokonaispotentiaali jossakin pisteessä on sitten integraali kappaleen tilavuusalkioiden aiheuttamista potentiaalin osista.

2 Magneettikentät

2.1 Kahden virtajohtimen välinen voima

Ensimmäiset modernin luonnontieteen havainnot magnetismista ovat vuodelta 1820, jolloin tanskalainen Hans Christian Ørsted havaitsi, että johdin, jossa kulkee virta vaikuttaa kompassineulaan. Myöhemmin samana vuonna ranskalainen André-Marie Ampère julkaisi tutkimuksensa, jonka mukaan kaksi yhdensuuntaista johdinta, joissa kulkee virta, kohdistavat toisiinsa voiman. Ampèren kvantitatiivinen tulos oli, että johtimien toisiinsa kohdistama voima on

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$$

missä ℓ on johtimien pituus, d niiden välinen etäisyys ja μ_0 on luonnonvakio nimeltään tyhjiön permeabiliteetti. Voiman suunta riippuu siitä, kulkeeko johtimissa virta samaan vai vastakkaiseen suuntaan.

Samoin kuin Coulombin havainnot sähkövarauksille, Ampèrenkin tulos selittyy kentän avulla. Nykyään jaammekin Ampèren tuloksen kahteen osaan

1. Johtimessa kulkeva virta synnyttää ympärilleen magneettikentän, joka on magneettisen voiman välittäjä.
2. Toisessa johtimessa kulkeviin liikkuviin varauksiin kohdistuu voima magneettikentän ansiosta.

Tarkastellaan näitä ilmiöitä erikseen.

2.2 Lorentzin voima

Sähkövirtaa kuljettavat useimmin mikroskooppiset hiukkaset. Yksittäiseen hiukkaseen kohdistuva magneettinen voima on

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

missä q on hiukkasen varaus ja $\vec{v}$ sen nopeus. Kun magneettikentän aiheuttama voima yhdistetään sähköstaattiseen eli Coulombin voimaan, saadaan varattuun hiukkaseen vaikuttava sähkömagneettinen voima eli niin sanottu Lorentzin voima

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Lorentzin voimasta voidaan johtaa magneettikentässä olevaan virtajohtimeen kohdistuva voima

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

missä $\vec{\ell}$ on vektori, joka osoittaa virran kulkusuuntaan johtimessa ja jonka pituus on magneettikentässä olevan johtimen pituus.

2.3 Ampèren laki: sähkövirta synnyttää magneettikentän

Ampèren tulosten mukaisesti johtimessa kulkeva virta synnyttää ympärilleen magneettikentän. Ampèren lain mukaan

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}},$$

missä

1. vasen puoli on viivaintegraali pitkin suljettua polkua, joka kiertää virtajohtimen.
2. oikealla puolella on viivaintegraalin polun määräämän pinnan läpi kulkeva virta I_{encl} kerrottuna tyhjiön permeabiliteetilla.

Ampèren laista kannattaa huomata seuraavaa:

1. Laki on integraalimuotoinen, joten se ei suoraan sano mitään magneettikentän arvosta yhdessäkään avaruuden pisteessä vaan kertoo vain, millainen tulos saadaan, kun nämä arvot lasketaan yhteen.
2. Ampèren laista seuraa heti, että virta synnyttää magneettikentän. Jos johtimessa kulkee virta, niin selvästi lain oikea puoli on nollasta poikkeava. Niinpä vasemmankin puolen tulee olla nollasta poikkeava mutta tämä on mahdollista vain, jos johtimen ympäristössä on magneettikenttä.
3. Ampèren lain sovellettavuus riippuu virtajohtimen geometriasta. Koska laki itsessään ei kerro mitään magneettikentästä tietyssä avaruuden pisteessä, niin tämän ratkaiseminen vaatii symmetria-argumenttien käyttöä. Esimerkiksi suoran virtajohtimen ympärillä magneettikentän voimakkuus riippuu vain etäisyydestä johtimeen, sillä tilanne on selvästi symmetrinen johtimen akselin suhteen.

2.4 Biot-Savartin laki

Vaihtoehtoisesti Ampèren laille, magneettikenttä voidaan ratkaista myös Biot-Savartin lailla, joka on muodoltaan analoginen sähkökenttien Coulombin voimalle. Biot-Savartin laki on

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

joka johtaa Ampèren lain kanssa yhtäpitävään kenttään. Tässä I on johtimessa kulkeva virta, $d\vec{\ell}$ differentiaalinen virta-alkio, r etäisyys johtimen pisteestä tarkastelupisteeseen ja $\hat{r}$ yksikkövektori johtimen pisteestä tarkastelupisteeseen. Ideana on, että tarkastelupiste pidetään paikallaan ja integroidaan virtajohtimen yli, jolloin differentiaalisista kenttäalkioista $d\vec{B}$ muodostuu kokonaiskenttä $\vec{B}$.

2.5 Gaussin laki magneettikentälle: ei ole magneettista monopolia

Toisin kuin sähkökentällä, magneettikentällä ei ole koskaan havaittu pistemäistä lähdettä (vrt. varaus sähkökentällä). Tästä seuraa Gaussin laki magneettikentälle, jonka mukaan

$$\Phi_B = \oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

jokaisen suljetun pinnan A läpi.

3 Sähkömagneettinen induktio

3.1 Faradayn havainto

Faraday havaitsi, että liikuteltaessa käämiä, jossa kulkee virta, toisen käämin sisällä tämän päiden välille syntyy jännite. Jännite syntyy vain, kun käämiä liikutellaan – ei muutoin. Faradayn havainto oli merkittävä, koska se osoitti sähköisten ja magneettisten voimien välisen yhteyden. Ilmiötä kutsutaan sähkömagneettiseksi induktioksi ja se formalisoituu Faradayn induktiolaissa.

3.2 Faradayn induktiolaki: Muuttuva magneettikenttä synnyttää sähkökentän

Faradayn induktiolain mukaan muuttuva magneettikenttä synnyttää sähkökentän. Sähkökenttä eroaa kuitenkin Gaussin lain mukaisesta varausten muodostamasta sähkökentästä, sillä se *ei ole konservatiivinen*. Faradayn induktiolaki voidaan esittää matemaattisesti muodossa

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Tuloksen mukaan sähkö- ja magneettikenttien välillä on yhteyksiä, joihin ei liity sähkövarausta tai -virtaa. Yhtälön oikealla puolella on magneettivuon muutos ja vasemmalla puolella sähkökentän integraali pitkin vuopinnan reunakäyrää.

3.3 Sähkömagneettisen induktion merkitys

Faradayn havainto oli merkittävä kahdesta syystä:

1. Induktio antoi mahdollisuuden tuottaa jännitettä kontrolloidusti. Aiemmin jännitelähteet olivat olleet kemiallisen potentiaalin eroihin perustuvia ns. Voltan pareja, jotka vastasivat lähinnä nykyisiä sähköparistoja. Induktio antoi mahdollisuuden kontrolloida syntyvää jännitettä ja rakentaa sähköön perustuvaa yhteiskuntaa 1800-luvulta alkaen.

2. Induktion avulla on mahdollista muuntaa mekaanista työtä sähköiseksi. Tämä oli käytännössä välttämättömyys sähkövoimalaitosten ja -generaattoreiden synnylle. Mekaanisen työn lähteenä voi toimia lämpövoimakone, vesivoimalaitos tai mikä tahansa mekaanista työtä tekevä laite.

4 Maxwellin yhtälöt ja sähkömagneettinen aalto

4.1 Maxwellin yhtälöt

Sähkömagnetismin yhtälöt tiivistyvät neljään kenttäyhtälöön, joita kutsutaan Maxwellin yhtälöiksi:

1. *Gaussin laki sähkökentälle* eli miten sähkökenttä syntyy sähkövarauksesta:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}$$

2. *Gaussin laki magneettikentälle* eli ettei magneettista monopolia ole olemassa:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

3. *Faradayn induktiolaki* eli miten magneettikentän muutos synnyttää sähkökentän

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

4. *Ampèren laki* eli miten magneettikenttä syntyy virrasta. Alkuperäinen Ampèren laki on kiusallisesti epäsymmetrinen Faradayn induktiolakiin nähden, sillä siinä ei esiinny sähkökentän muutosta. Maxwell lisäsikin Ampèren lakiin niin sanotun kenttämuutosvirran eli magneettikentän lähteeksi sopii myös ajassa muuttuva sähkökenttä:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

missä siis sähkökentän vuo Φ_E lasketaan sen pinnan läpi, jota rajoittaa magneettikentän kiertokäyrä yhtälön vasemmalla puolella.

Maxwellin yhtälöiden lisäksi sähkömagnetismin yhtälöihin kuuluu *Lorentzin voima*, joka kertoo, miten sähkö- ja magneettikentät vaikuttavat varaukseen:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

4.2 Sähkömagneettinen säteily

Kun Maxwellin yhtälöt kirjoitetaan tyhjiössä (eli varaus- ja virtatiheydet ovat nolla), saadaan

$$\begin{cases} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \\ \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \end{cases}$$

Herää epäilys: Faradayn induktiolain mukaan muuttuva magneettikenttä synnyttää sähkökentän. Toisaalta Ampèren-Maxwellin lain mukaan muuttuva sähkökenttä saisi aikaan magneettikentän. Tällöin olisi mahdollista luoda vuorottelevien sähkö- ja magneettikenttien muodostama aalto. Itse asiassa näin käykin. Laeista voidaan johtaa yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ -\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \end{cases}$$

jonka yksi ratkaisu on sinimuotoinen aalto. Tämä kiistatta osoittaa, että jos Maxwellin yhtälöt ovat totta, niin sähkömagneettisia aaltoja on olemassa. Lisäksi aallon nopeudeksi tulee

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792 \, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}},$$

joka on sama kuin valonnopeus c.

4.3 Sähkömagneettinen aalto

Sähkömagneettinen aalto on hämmästyttävä monin tavoin:

1. Se on aalto, joka etenee ilman väliainetta syntyen sähkö- ja magneettikenttien vaihtelusta.
2. Se etenee tyhjiössä valonnopeudella.
3. Se on ennustettu ennen havaitsemistaan. Maxwellin ennustaman aallon havaitsi ensimmäisenä Heinrich Hertz vuonna 1887. Havaitsemisen teki vaikeaksi se, että riittävän lyhyen aallonpituuden tuottaminen vaatii korkeaa taajuutta. Hertzin saavutus olikin korkeataajuisen sähkömagneettisen värähtelijän kehittäminen, jolloin syntyvä aalto mahtui mittaustiloihin.

Vaikka sähkömagneettinen aalto koostuu sähkö- ja magneettikentistä se on kuitenkin ihan oikea aalto. Se taittuu ja heijastuu aalto-opin lakien mukaisesti. Se voi muodostaa seisovan aallon tai polarisoitua.

4.3.1 Sähkömagneettisen säteilyn energia

Sähkömagneettinen aalto kuljettaa mukanaan energiaa ja liikemäärää. Energian ja liikemäärän siirtyminen kenttien mukana tyhjiön läpi perustuu siihen, että sähkö- ja magneettikentillä on omat energiatiheytensä. Sähkömagneettisen kentän energiatiheys u on näiden summa

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

missä siis kentät ja niiden energiatiheydet riippuvat ajasta, kuten aaltoliikkeelle luonnollista onkin.

Sähkömagneettisessa aallossa etenevää energiaa kuvaa *Poyntingin vektori*

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}).$$

Vektori $\vec{S}$ (i) osoittaa aallon etenemissuuntaan ja (ii) sen suuruus kertoo energian kulkeutumistehon pinta-alayksikköä kohden. Poyntingin vektori riippuu ajasta sähkö- ja magneettikentän aikariippuvuuden kautta. Kun lasketaan sen pituuden aikakeskiarvo, saadaan intensiteetti, joka on sinimuotoiselle aallolle

$$\overline{S} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_{\mathrm{rms}} B_{\mathrm{rms}}}{\mu_0},$$

missä E_0 ja B_0 ovat sähkö- ja magneettikenttien oskillointiamplitudit ja E_{rms} ja B_{rms} kenttien neliölliset keskiarvot.

4.3.2 Sähkömagneettisen säteilyn liikemäärä ja säteilypaine

Sähkömagneettinen aalto kuljettaa energian ohella myös liikemäärää. Tämän voiman aikakeskiarvoa pinta-alayksikköä kohden kutsutaan säteilypaineeksi. Säteilypaine P täysin absorboituvalle aallolle on

$$P = \frac{\overline{F}}{A} = \frac{\overline{S}}{c}$$

joka on jälleen ajan suhteen keskiarvoistettu suure.

5 Sähköpiirit

5.1 Kondensaattori

Kondensaattori on laite, joka pystyy varastoimaan sähkövarausta. Tämä siis tarkoittaa sitä, että kondensaattori pitää erimerkkiset varaukset erillään estäen niiden luontaisen taipumuksen yhdistyä. Varausten välillä kondensaattorin sisällä on sähkökenttä, johon liittyy potentiaaliero. Jos tunnetaan tietyn varauseron aiheuttama potentiaaliero kondensaattorissa, voidaan määritellä kondensaattorille tyypillinen suure, kapasitanssi, näiden suhteena

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Tässä määritelmässä varaus Q on vain positiivinen osa erottuneesta varauksesta, ei siis kondensaattorin molempien kohtioiden yhteenlaskettu varaus. Kondensaattorin sähkökenttään sitoutuu energiaa:

$$E_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2.$$

5.2 Käämi

Sähkömagneettinen induktio on ilmiö, joka tulee vastaan kapasitanssin tavoin kaikissa teknisissä laitteissa, joissa käytetään muuttuvaa sähkövirtaa. Piirissä induktiivista komponenttia kutsutaan käämiksi (engl. coil) ja yksinkertaisimmillaan se on peräkkäisiksi silmukoiksi käännettyä johdinta.

Jos käämin läpi johdetaan muuttuva virta, niin tämä aiheuttaa muutoksen käämin läpi kulkevassa magneettivuossa. Faradayn induktiolain mukaan käämiin indusoituu sähkökenttä, joka voidaan käsitellä indusoituneena jännitteenä

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Tässä L on käämin ominaisuuksista riippuva vakio, jota kutsutaan (itseis)induktanssiksi. Huomaa, että koska käämin aiheuttama indusoitunut jännite on seurausta muuttuvasta magneettikentästä, eli aiheutuu ei-konservatiivisesta sähkökentästä, ei jännitteen käsite ole aivan hyvin määritelty. Piirikomponenttina voidaan jännitemuutosta käämin yli kuitenkin kuvata yo. tavalla.

Käämin synnyttämään magneettikenttään sitoutuu energiaa:

$$E_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}LI^2.$$

5.3 RLC-piirit

5.3.1 Kirchoffin lait

Kirchhoffin lait säätelevät sähköpiirien toimintaa. Ne ovat säilymislakeja:

1. Kirchoffin I laki, eli varauksen säilymislaki: sähköpiirin jokaisessa pisteessä (erityisesti risteyskohdissa) saapuvien ja poistuvien virtojen summa on nolla.

2. Kirchoffin II laki, eli energian säilymislaki: suljetulla polulla sähköpiirin jännitteen kokonaismuutos on nolla.

Huomaa että jälkimmäinen laki edellyttää, että sähköpiirissä oleva sähkökenttä on konservatiivinen. Ongelmia tuottavat muuttuvat magneettikenttien vuot, jotka edellyttävät Faradayn induktiolain käsittelyä.

5.3.2 Komponentit

Tarkastelemme kolmea idealisoitua sähköpiirikomponenttia. Vastus, kondensaattori ja käämi. Ne aiheuttavat piirissä jännitehäviöt:

- Vastus: $V_R = RI$, missä R on vastuksen resistanssi ja I virta vastuksen läpi
- Kondensaattori: $V_C = \frac{Q}{C}$
- Käämi: $V_L = L\frac{dI}{dt} = L\dot{I}$
- Jännitelähde: $-V(t)$

5.3.3 RC-piiri eli kondensaattori ja vastus

Tarkastellaan yksinkertaista piiriä, jossa on kondensaattori C, vastus R ja tasajännitelähde V_0. Jännitteiden avulla saadaan (Kirchoffin II laki)

$$V_R(t) + V_C(t) - V(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} - V_0 = 0.$$

Kirchoffin I lain mukaan virta vastuksen läpi I on sama kuin kondensaattorin varauksen muutos, eli

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t)$$

eli yhtälö kondensaattorin varaukselle voidaan kirjoittaa muodossa

$$R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_0$$

Tämä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, joka ei ole homogeeninen, sillä yhtälön oikea puoli poikkeaa nollasta. Tämän ratkaisu on

$$Q(t) = De^{-t/\tau} + CV_0,$$

missä vakio D määräytyy alkuehdosta ja vakio $\tau = RC$ on nimeltään aikavakio.

5.3.4 LC-piiri eli käämi ja kondensaattori

Kun piirissä vaihdetaan vastuksen paikalle käämi ja jätetään tasajännitelähde pois, saadaan piirin jännitteiden avulla yhtälö

$$L\dot{I}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

ja varauksen säilymisen nojalla

$$I(t) = \dot{Q}(t).$$

Yhdistämällä nämä saadaan kondensaattorin varaukselle Q yhtälö

$$\ddot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0.$$

Tämän ratkaisu on

$$Q(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t),$$

missä $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ja vakiot A ja B määräytyvät alkuehdoista.

5.4 Vaihtojännite ja -virta

Eo. piireihin voidaan lisätä vaihtojännitelähde, jonka napojen välinen jännite-ero ei ole vakio vaan muuttuu ajan funktiona. Yksinkertaisin on sinimuotoinen vaihtojännitelähde, jonka huippuarvo on V_0 ja kulmataajuus ω:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t).$$

Esimerkkinä lisätään RLC-piiriin vaihtojännitelähde: Kirchoffin II laki on nyt

$$L\dot{I}(t) + RI(t) + Q(t)/C - V(t) = 0,$$

jossa virta I, kondensaattorin varaus Q ja jännitelähteen jännite $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ riippuvat ajasta. Virtatasapainon mukaan $I = \dot{Q}$, joten derivoimalla jännitetasapaino ajan suhteen saadaan

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + I(t)/C = -\omega V_0 \sin(\omega t).$$

Tämän ratkaisu on

$$I(t) = \frac{V_0}{Z}\left(\frac{(X_L - X_C)}{Z}\sin(\omega t) + \frac{R}{Z}\cos(\omega t)\right),$$

missä induktiivinen reaktanssi $X_L = \omega L$, kapasitiivinen reaktanssi $X_C = 1/(\omega C)$ ja impedanssi $Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$. Voidaan määritellä myös käsite kokonaisreaktanssi $X = X_L - X_C$.