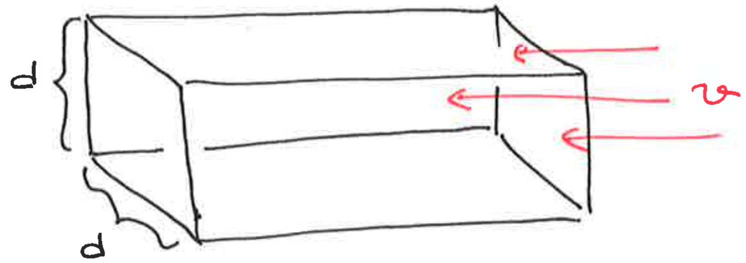
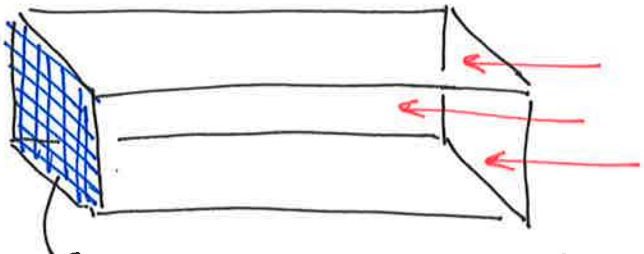
Vuo ja Gaussin laki

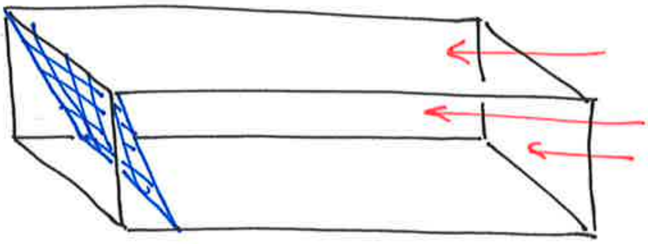


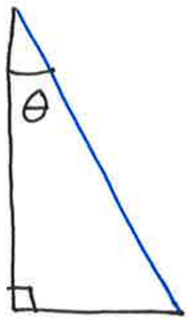
"Virtauksen vuo"

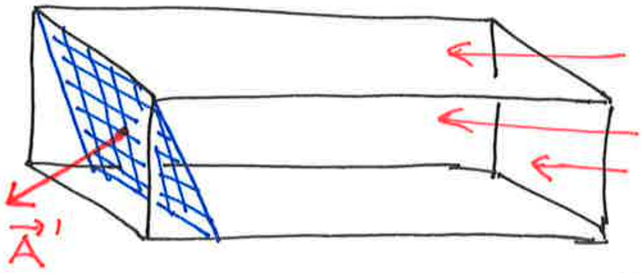
$$V = v \cdot A = v \cdot d^2$$

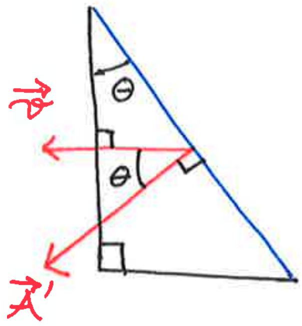


Sihdin pinta-ala $A = d^2$.







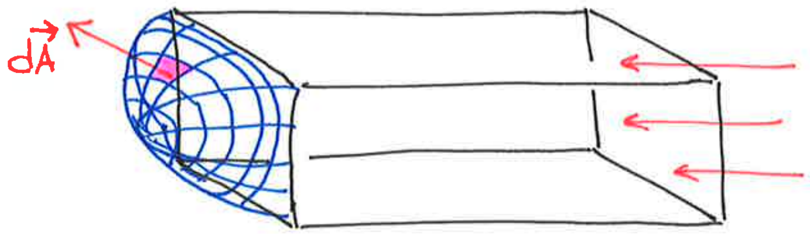


Sihdin pinta-ala $A' = \dfrac{d^2}{\cos\theta}$.

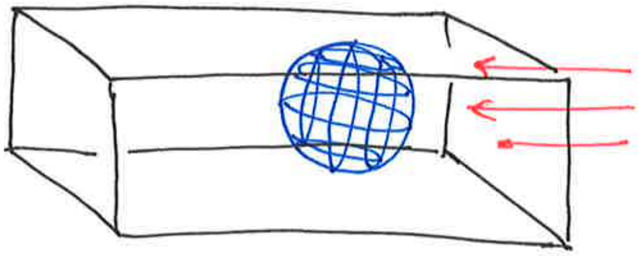
Vuo

$$V = v \cdot d^2 = v \cdot \frac{d^2}{\cos\theta} \cos\theta = v A' \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{A}'.$$

vektorien pistetulo.



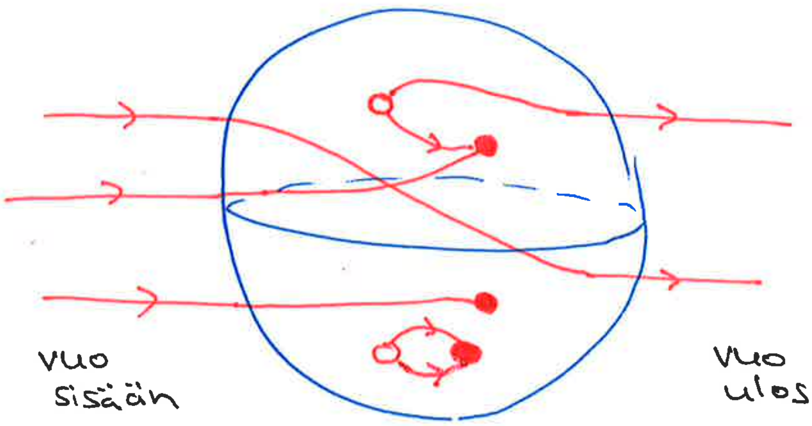
$$\mathcal{V} = \int \vec{v} \cdot d\vec{A}$$



Vuo suljetun pinnan A lävitse

$$\mathcal{V}_A = \oint \vec{v} \cdot d\vec{A}.$$

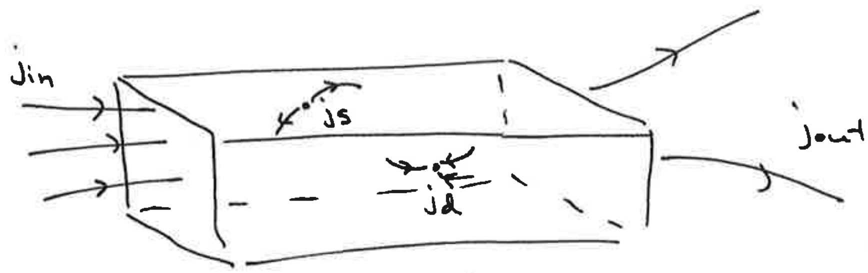
Gaussin laki sähkökentille



$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0}$$

"vuo ulos − vuo sisään = lähteet − kaivot"

Gaussin laki sähkökentille



vuo sisään − vuo ulos = kaivot − lähteet

ELI

$$j_{in} - j_{out} = j_d - j_s$$

Gaussin laki:

$$\underbrace{\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{kokonaisvuo suljetun pinnan } A \text{ läpi}} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0}}_{\text{luonnonvakio}} \cdot \underbrace{\overbrace{\iiint_V}^{\text{tilavuusintegraali}} \underset{\text{varaustiheys}}{\rho(\vec{r})}\, dV}$$

pinnan A rajaaman tilavuuden V sisältämä kokonaisvaraus

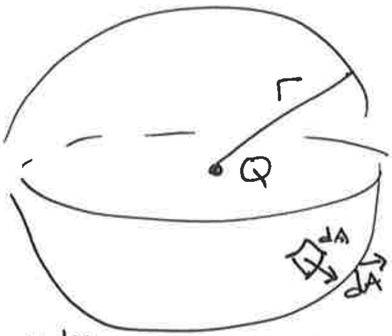
positiiviset varaukset lähteitä,

negatiiviset varaukset kaivoja.

"Q_{encl}".

"enclosed"

Esim. Gaussin laki pistevaraukselle



Valitaan tarkasteltavaksi pinnaksi A r-säteinen pallo jonka keskellä pistevaraus Q on.

pallosymmetria $\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = E(r)\cdot\hat{r}$

$\hat{r}$: säteen-suuntainen yksikkövektori

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r})\cdot\underbrace{\vec{dA}}_{\hat{r}\,dA} = \overbrace{\oint_A \underbrace{E(r)}_{\text{vakio pallopinnalla } A}\,\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}\,dA}^{\oint_A E(r)\,dA}$$

$\hat{r}$: pinta-alkion normaalivektori

dA: pinta-alkion suuruus (pinta-ala)

$$= E(r)\underbrace{\oint_A dA}_{\substack{\text{pallon pinta-ala}\\ 4\pi r^2}} = E(r)\cdot 4\pi r^2 \underset{\text{Gaussin laki}}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}}$$

pistevarauksen sähkökenttä kuten pitikin

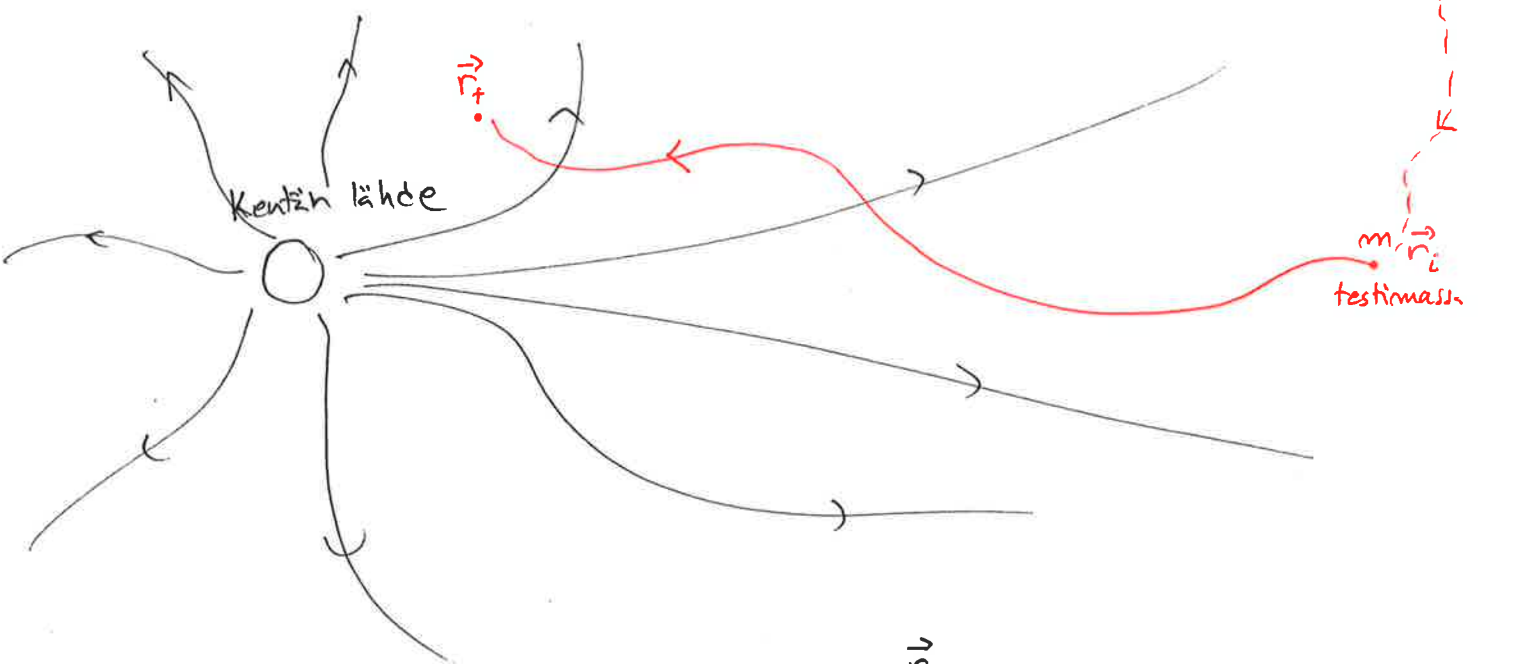
Konservatiivisen voimakentän potentiaalienergia

Voimakenttä $\vec{F}(\vec{r})$

vektorikenttä

määritelty kaikkialla $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Tuodaan testimassa m kaukaisuudesta $\vec{r}_i$ pisteeseen $\vec{r}_f$.



Tehty työ
$$W(\vec{r}_f, \vec{r}_i) = W(\vec{r}_f) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

ei riipu lähtöpisteestä $\vec{r}_i$ kunhan alkupiste on tarpeeksi kaukana (oletus: $\vec{F}(\vec{r})$ menee nollaan kaukana lähteestä)

Jos alku- ja loppunopeudet samat $\Rightarrow$ tehty työ = potentiaalienergian muutos.

Määritellään potentiaalienergiakenttä (skalaarikenttä)

$$U(\vec{r}) = W(\vec{r}_f = \vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'}$$

Huomaa vahva oletus: potentiaalienergia $U(\vec{r})$ ei riipu polusta pisteestä $\vec{r}_i$ pisteeseen $\vec{r}_f$.

"Path independent"

= Konservatiivinen kenttä